

# یک رویکرد هدایت مبتنی بر زاویه خط دید در مسأله هدایت صفحه‌ای

ولی اله غفاری<sup>۱\*</sup> و حسن محمدخانی<sup>۲</sup>

۱- دانشگاه خلیج فارس، vghaffari@pgu.ac.ir

۲- دانشگاه جامع امام حسین (علیه‌السلام)، hm4393@gmail.com

## چکیده:

در قوانین هدایت مبتنی بر نرخ زاویه خط دید، شتاب جانبی وسیله به گونه‌ای تعیین می‌گردد که نرخ زاویه خط دید بین جسم و هدف صفر شود. با ثابت ماندن زاویه خط دید، اگر سرعت جسم از سرعت هدف بزرگ‌تر باشد آنگاه جسم به هدف مورد انتظار به صورت مجانبی خواهد رسید. در این مقاله، به ارائه یک الگوریتم هدایت جدید مبتنی بر زاویه خط دید جهت استفاده در سیستم‌های هدایت دو بعدی پرداخته شده است. بدین منظور، با توجه به روابط حاکم بر موضوع و استفاده از روابط مثلثاتی، قانون هدایت پیشنهادی به یک رابطه جبری منجر می‌گردد. اگر چه رویکرد به کار گرفته شده در این مسأله هدایت، مستقل از نرخ زاویه خط دید می‌باشد؛ اما صفر شدن تغییرات زاویه خط دید با کمک منطق ارائه شده، در لحظه اعمال قانون هدایت رخ خواهد داد. قانون استخراج شده در یک مسأله هدایت دو بعدی ارزیابی شده و مزیت راه‌حل پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر نشان داده خواهد شد.

## واژه‌های کلیدی:

قانون هدایت، زاویه خط دید، نرخ زاویه خط دید و مسأله هدایت.

## A Guidance Approach Based on Line-of-sight Angle in Planar Guidance Problem

Valiollah Ghaffari<sup>1</sup>, Hasan Mohammad khani<sup>2</sup>

1- Persian Gulf University, vghaffari@pgu.ac.ir

2- Imam Hossein University, hm4393@gmail.com

### Abstract:

In the guidance algorithms based on the line-of-sight (LOS) rate, the lateral acceleration commands are computed in such a way that the LOS rate is nullified. So, keeping constant the LOS angle, the condition in which the vehicle speed is greater than the target speed, the vehicle reaches the target position asymptotically. In this paper, a new guidance algorithm, based on the LOS angle, is presented for a typical guidance system. To this aim, considering the governed guidance equations and using the corresponding trigonometric relations, the proposed guidance law is transformed into an algebraic equation. Although the utilized guidance procedure is independent of the rate of LOS angle, the rate of LOS angle would equal zero instantly via applying the proposed method. Then, to illustrate the effectiveness of the idea, the derived mechanism is evaluated in a two-dimensional guidance problem. The advantages of the approach are shown in comparison with similar methods.

### Keywords:

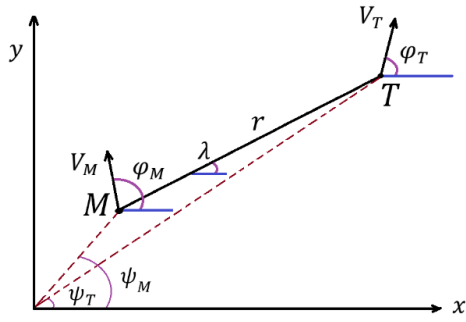
Guidance law, Line-of-sight angle, Rate of line-of-sight, Guidance problem.

گاهی اوقات، مدت زمان رسیدن جسم به هدف بایستی کمینه گردد. با انجام بهینه‌یابی، زمان و زاویه رسیدن وسیله به هدف را به صورت بهینه تعیین نمود [۹]. هر چند مرتبه مشتق ظاهر شده در مسائل هدایت صحیح می‌باشد؛ از مشتقات مرتبه کسری می‌توان در قانون هدایت بهره‌مند شد. برای بهبود عملکرد حلقه هدایت، با ایده مد لغزشی مشتمل بر مشتق کسری، طراحی قانون هدایت انجام شده است [۱۰].

با در نظر گرفتن محدودیت‌ها، قانون هدایت زیر بهینه بدست می‌آید [۱۱]. در حضور عدم قطعیت‌ها، با کمینه نمودن نرم دوم خطا، قانون هدایت مقاومی برای یک سیستم هدایت پیشنهاد شده است [۱۲]. معمولاً از نظریه پایداری لیانوف نیز می‌توان برای دستیابی به قوانین هدایت کارا و موثر بهره برد [۱۳]. گاهی اوقات، همگرایی در زمان محدود [۱۴] و پایدار ورودی به حالت در زمان محدود [۱۵] در موضوع هدایت اهمیت فراوانی دارد. اخیراً از نظریه پایداری در زمان محدود جزیی برای انتخاب و بهبود دادن الگوریتم هدایت استفاده شده است [۱۶]. از کنترل مد لغزشی مرتبه دوم می‌توان برای طراحی قانون هدایت اثربخش بهره برد [۱۷]. برخی از زمان‌ها، الگوریتم هدایت برای اهداف دارای مانور طراحی می‌شود. بدین سبب ضروری است تغییرات هدف در معادلات حاکم لحاظ گردد [۱۸-۲۰]. اگر چه قوانین هدایت عموماً برای دستگاه مختصات دو بعدی مانند هدایت شناورهای سطحی مطرح می‌شوند؛ با در نظر گرفتن دو صفحه عمود بر هم، روش هدایت را برای دستگاه مختصات سه بعدی تعمیم داده شده است [۲۰، ۲۱]. مسائل هدایت عمدتاً دارای محدودیت فیزیکی و قیود هستند از قابلیت‌ها و مفاهیم مورد استفاده در کنترل پیش‌بین، در انتخاب قوانین هدایت مفید و اثرگذار بهره‌گیری شده است [۲۲، ۲۳]. اخیراً تحقیقات مهمی در ارتباط با هدایت مبتنی بر زاویه خط دید انجام شده است. از آن جمله، در [۲۴] پایداری هدایت تعقیب با وابسته به زاویه خط دید بررسی شده است. در [۲۵، ۲۶] برای یک شناور زیرآبی و در [۲۷، ۲۸] برای سیستم‌های چند عاملی به بررسی هدایت مبتنی بر زاویه خط دید پرداخته شده است. در این سبک، زاویه خط دید به همراه داده‌های دیگر در الگوریتم هدایت استفاده خواهد گردید.

همواره انتخاب الگوریتم مناسب، چالش و امری اجتناب‌ناپذیر در غالب مسائل هدایت و ناوبری است. به همین دلیل نگرش‌های متنوعی برای این موضوع وجود دارد. برای محقق نمودن هدف هدایت، برخی از محققان بر شیوه‌های تحلیلی اتکا می‌کنند. با این حال، روش‌های غیرتحلیلی از قبیل ایده جدول‌بندی بهره، تکنیک سعی و خطا و موارد دیگر نیز در برخی مقالات دیده می‌شود. آن چه روشن است فنون تحلیلی بر پایه اثبات و تحلیل ریاضی وضع شده‌اند. از طرفی روش‌های غیرتحلیلی توأم با استدلال، منطق و هوش انسانی است. معمولاً روندهای تحلیلی دو دسته عمده دارند. در نوع اول، یک دینامیک کمکی برای نرخ زاویه خط دید استخراج می‌گردد. چنین دینامیکی با یک معادله دیفرانسیل معمولی توصیف خواهد شد. نرخ زاویه خط دید توسط یک سنسور یا جستجوگر اندازه‌گیری می‌گردد. سپس خروجی سنسور به همراه دیگر کمیت‌های اندازه‌گیری شده در الگوریتم هدایت استفاده می‌شود. در گونه دیگر، زاویه خط دید مستقیماً در قوانین ظاهر می‌شود. با این حال، به دلیل وجود نظریه‌های متعدد برای تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل، غالب تحقیقات موجود در طراحی قانون هدایت بر نوع اول تمرکز یافته‌اند. هدایت تناسبی از مشهورترین و پرکاربردترین روش مبتنی بر نرخ زاویه خط دید است. امروزه، بسته به شرایط و داشتن حالات خاص، نسخه‌های متعددی از هدایت تناسبی توسعه داده شده است. معادلات حاکم بر حلقه هدایت، نوعاً شبیه به روابط سیستم‌های کنترل می‌باشد. از این جهت، پایداری و عملکرد حلقه هدایت در حضور نویز اندازه‌گیری [۱]، اثرات تاخیر زمانی [۲]، در نظر گرفتن دینامیک اتوپایلویت [۳] و موارد دیگر بررسی شده است. بنابراین تاثیر هر جز به تنهایی و اصلاح اثر آن بر رفتار حلقه هدایت تعیین خواهد شد.

اگر چه با وجود ساده و مقاوم بودن، هدایت تناسبی در اغلب اوقات سودمند است ولیکن تحقیقات گسترده‌ای برای بهبود قانون هدایت مبتنی بر نرخ زاویه خط دید صورت گرفته است. به همین منظور، از فنون بهینه‌سازی [۴]، خطی‌سازی با فیدبک [۵]، کنترل ساختار متغیر [۶]، ایده گام به عقب [۷]، تطبیقی [۸] و سایر رویکردهای کنترلی برای رسیدن به روش هدایت کارآمد بهره گرفته شده است.



شکل ۱- شماتیک مساله هدایت

معادلات حاکم بر مساله به طریق زیر می‌تواند بیان گردد:

$$\begin{cases} \dot{r} = V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \\ r\dot{\lambda} = -V_T \sin(\lambda - \varphi_T) + V_M \sin(\lambda - \varphi_M) \end{cases} \quad (1)$$

فرض ۱: زاویه هدف  $\varphi_T$  یک سیگنال زمان پیوسته است. سرعت جسم  $V_M$  و سرعت هدف  $V_T$  ثابت می‌باشد. سرعت جسم از سرعت هدف بزرگ‌تر است ( $V_T < V_M$ ).

فرض ۲: مقادیر لحظه‌ای زاویه‌های  $\lambda$ ،  $\varphi_T$  و  $\varphi_M$  برای استفاده در قانون هدایت در دسترس است.

در شبیه‌سازی، زمان آغازین و زمان نهایی هدایت را به ترتیب با  $t_0$  و  $t_f$  نامگذاری می‌کنیم. در دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل ۱، موقعیت جسم از رابطه‌های زیر تعیین خواهد شد:

$$\begin{cases} x_M(t) = x_M(t_0) + V_M \int_{t_0}^t \cos(\varphi_M(\tau)) d\tau \\ y_M(t) = y_M(t_0) + V_M \int_{t_0}^t \sin(\varphi_M(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (2)$$

به طریق مشابه، موقعیت هدف نیز به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} x_T(t) = x_T(t_0) + V_T \int_{t_0}^t \cos(\varphi_T(\tau)) d\tau \\ y_T(t) = y_T(t_0) + V_T \int_{t_0}^t \sin(\varphi_T(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (3)$$

فاصله نسبی جسم با هدف (بر حسب متر) از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$r(t) = \sqrt{(x_T(t) - x_M(t))^2 + (y_T(t) - y_M(t))^2} \quad (4)$$

اگر  $x_M$  و  $y_M$  موقعیت‌های جسمی نسبت به مبدا باشد آن وقت زاویه در دستگاه مختصات اینرسی به صورت زیر تعیین خواهد شد:

$$\psi_M = \begin{cases} \psi'_M, & y_M > 0, x_M > 0 \\ -\psi'_M, & y_M < 0, x_M > 0 \\ \pi - \psi'_M, & y_M > 0, x_M < 0 \\ -\pi + \psi'_M, & y_M < 0, x_M < 0 \end{cases} \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $\psi'_M = \tan^{-1}\left(\frac{y_M}{x_M}\right)$  مقدار زاویه (بر حسب رادبان) بین  $\pi$  و  $-\pi$  در نظر گرفته شده است.

در روش‌های بر پایه نرخ زاویه خط دید معمولاً نیاز است سه داده (نرخ زاویه خط دید، سرعت نزدیک شونده‌گی و شتاب هدف) در اختیار الگوریتم هدایت قرار گیرد. علاوه بر آن، خروجی چنین قوانینی از جنس شتاب جانبی است. لذا لازم است شتاب جانبی جسم نیز به سیگنال زاویه متناظر تبدیل شود. با نظر به موارد بیان شده، در این مقاله به دنبال آن هستیم با تعداد سنسور کمتری، قاعده هدایتی را توسعه دهیم که مستقیماً زاویه فرمان جسم را تولید نماید. به زبان دیگر، با اندازه‌گیری دو کمیت (زاویه هدف و زاویه خط دید)، زاویه مطلوب جسم تعیین شود. بدان جهت، با به کارگیری روال پیشنهادی، تا زمانی که زاویه هدف مقدار ثابتی است زاویه فرمان سمت جسم نیز به مقدار ثابتی منتج خواهد شد.

در ادامه، در بخش دوم، قانون و مساله هدایت صفحه‌ای تعریف می‌گردد. نحوه دستیابی به الگوریتم پیشنهادی در بخش سوم ذکر شده است. سپس در بخش چهارم، مساله هدایت با رویکرد ارائه شده شبیه‌سازی خواهد شد. در نهایت، نتیجه‌گیری تحقیق در بخش پنجم ذکر می‌گردد.

## ۲- بیان مساله هدایت

مطابق شکل ۱، در دستگاه مختصات دو بعدی، جسمی با سرعت  $V_M$  و زاویه  $\varphi_M$  در حرکت می‌باشد. همچنین هدف دارای سرعت  $V_T$  و زاویه  $\varphi_T$  است. در شکل ۱،  $\lambda$  بیانگر زاویه خط دید و  $r$  نشان دهنده فاصله نسبی جسم با هدف می‌باشد. توجه گردد که زاویه‌های  $\varphi_M$ ،  $\varphi_T$  و  $\lambda$  بر حسب رادیان، مقدار آن بین  $\pi$  و  $-\pi$  بوده و نسبت به سطح افق سنجیده می‌شوند. توجه گردد شکل ۱ یک شماتیک کلی است که می‌تواند در حوزه‌های مختلف هوایی، دریایی، زمینی و ... تصور گردد. برای اجسام شش درجه آزادی نیازمند به تعریف زوایای جسم و هدف و خط دید در دو جهت (صفحه) می‌باشد؛ اما در اجسام دارای حرکت صفحه‌ای مانند شناورهای سطحی زوایای مورد نیاز مشابه شکل ۱ می‌باشد. در این پژوهش، وسیله‌ای که قانون هدایت بر روی آن پیاده‌سازی خواهد شد به اختصار جسم اطلاق می‌گردد. روشن است در مساله هدایت صفحه‌ای روی سطح آب، جسم می‌تواند یک شناور سطحی باشد. در این سیستم، به دنبال یافتن فرمان زاویه  $\varphi_M$  هستیم که جسم  $M$  به سمت هدف  $T$  میل نماید. پس منظور از طراحی قانون هدایت، انتخاب مناسب زاویه  $\varphi_M$  می‌باشد.

به طریق مشابه، با محاسبه  $\psi_T' = \tan^{-1}\left(\frac{y_T}{x_T}\right)$  زاویه هدف  $\psi_T$  را می‌توان بدست آورد. همچنین زاویه خط دید از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y_T - y_M}{x_T - x_M}\right) \quad (۶)$$

با رویکردهای متفاوتی می‌توان رسانیدن جسم به مقصد (هدف مورد انتظار از بحث هدایت) را انجام داد. تعدادی از تکنیک‌ها با زاویه خط دید و برخی دیگر با اندازه‌گیری نرخ زاویه خط دید کار می‌کنند. با این حال، مشهورترین قاعده (که مبتنی بر اندازه‌گیری نرخ زاویه خط دید است) به شرح زیر انجام می‌شود. با مشتق‌گیری از رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r\dot{\lambda} + r\ddot{\lambda} = & -\dot{\lambda}V_T \cos(\lambda - \varphi_T) + \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T) \\ & + \dot{\lambda}V_M \cos(\lambda - \varphi_M) - \dot{\varphi}_M V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \end{aligned} \quad (۷)$$

با جایگزینی رابطه (۱) در معادله (۷) داریم:

$$\begin{aligned} r\ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda} = & \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T) - \dot{\varphi}_M V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \end{aligned} \quad (۸)$$

با تعریف متغیرهای زیر

$$\begin{cases} w \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varphi}_T V_T \cos(\lambda - \varphi_T) \\ u \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\varphi}_M V_M \cos(\lambda - \varphi_M) \\ x \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\lambda} \\ v_c \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{r} \end{cases}$$

تساوی (۸) به رابطه زیر منجر می‌گردد:

$$\dot{x} = \frac{1}{r}(2v_c x + w - u) \quad (۹)$$

در رابطه (۹)،  $x$  بیان کننده تغییرات زاویه خط دید و  $v_c$  نشان دهنده سرعت نزدیک شونده جسم به هدف می‌باشد. نشان داده شده است با انتخاب قانون زیر معادلات توصیف کننده سیستم هدایت پایدار جانبی خواهد شد [۲۹].

$$u = N v_c x + w, \quad N > 2 \quad (۱۰)$$

بدیهی است که اگر زاویه هدف مقدار ثابتی باشد ترم  $w$  از رابطه (۱۰) حذف خواهد شد. معمولاً در علم هدایت و ناوبری، رابطه (۱۰) به هدایت تناسبی مشهور است. در امر هدایت اجسام، تاکنون استفاده‌های متنوع و فراوانی از ضابطه (۱۰) شده است؛ همچنین با توجه به محدودیت‌ها و داشتن شرایط خاص، انواع و مشتقات دیگری از هدایت تناسبی نیز توسعه داده شده است.

در استفاده از هدایت تناسبی نیاز است تغییرات زاویه خط دید و سرعت نزدیک شونده اندازه‌گیری شود. همان‌گونه دیده می‌شود به منظور اعمال قانون هدایت به جسم، بایستی از رابطه زیر شتاب جانبی به زاویه تبدیل گردد:

$$\varphi_M(t) = \varphi_M(0) + \int_0^t \frac{u(\tau)}{V_M \cos(\lambda(\tau) - \varphi_M(\tau))} d\tau \quad (۱۱)$$

از این رو، در هدایت تناسبی و مشتقات آن، فرمان زاویه سمت جسم با استفاده توأم از رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) تعیین خواهد شد.

با توجه به موارد بیان شده، در این مطالعه به دنبال آن هستیم (صرفاً با استفاده از روابط مثلثاتی) صفر شدن  $\dot{\lambda}$  را با طرق دیگری انجام دهیم. در نهایت به سازوکاری دست خواهیم یافت که مبتنی بر زاویه خط دید بوده و پایدار در زمان محدود است.

### ۳- الگوریتم هدایت پیشنهادی

**قضیه ۱:** معادله (۱) با فرض‌های ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. در

لحظه  $t_i$ ، با اعمال قانون هدایت زیر

$$\varphi_M = \lambda - \sin^{-1}\left(\frac{V_T}{V_M} \sin(\lambda - \varphi_T)\right) \quad (۱۲)$$

الف) تغییرات زاویه خط دید متحد با صفر خواهد شد.

$$\lambda(t) = \lambda(t_i), \quad t \geq t_i \quad (۱۳)$$

ب) در مدت زمان  $\Delta t = t_f - t_i$  جسم به هدف خواهد

رسید. مقدار دقیق  $\Delta t$  از حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$r(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{A^2(\tau) + B^2(\tau)} d\tau \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴)، ضرایب  $A = V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)$  و  $B = V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)$  می‌باشد.

**اثبات:** معادله دیفرانسیل (۱) به صورت زیر می‌تواند بازنویسی شود:

$$\begin{cases} \dot{r} = V_T \cos(\lambda) \cos(\varphi_T) + V_T \sin(\lambda) V_T \sin(\varphi_T) \\ \quad - V_M \cos(\lambda) \cos(\varphi_M) - V_M \sin(\lambda) \sin(\varphi_M) \\ r\dot{\lambda} = -V_T \sin(\lambda) \cos(\varphi_T) + V_T \cos(\lambda) \sin(\varphi_T) \\ \quad + V_M \sin(\lambda) \cos(\varphi_M) - V_M \cos(\lambda) \sin(\varphi_M) \end{cases} \quad (۱۵)$$

با ساده‌سازی و مرتب نمودن رابطه (۱۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos(\lambda) (V_T \cos(\varphi_T) - V_M \cos(\varphi_M)) \\ \quad + \sin(\lambda) (V_T \sin(\varphi_T) - V_M \sin(\varphi_M)) \\ r\dot{\lambda} = \cos(\lambda) (V_T \sin(\varphi_T) - V_M \sin(\varphi_M)) \\ \quad + \sin(\lambda) (V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)) \end{cases} \quad (۱۶)$$

برای رسیدن به هدف، متغیرهای  $A$  و  $B$  به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} A \stackrel{\text{def}}{=} V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T) \\ B \stackrel{\text{def}}{=} V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T) \end{cases}$$

با بازنویسی رابطه (۱۶) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \dot{r} = -B \sin(\lambda) - A \cos(\lambda) \\ \quad = -\sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda + \psi_r) \\ r\dot{\lambda} = A \sin(\lambda) - B \cos(\lambda) \\ \quad = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda - \psi_\lambda) \end{cases} \quad (۱۷)$$

در رابطه (۱۷)،  $\psi_r = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$  و  $\psi_\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$  می‌باشد. با توجه به روابط مثلثاتی، تساوی زیر بدیهی است:

$$\psi_\lambda + \psi_r = \frac{\pi}{2} \quad (۱۸)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\sqrt{V_T^2 + V_M^2 - 2V_T V_M \cos(\varphi_T - \varphi_M)} \sin(\lambda + \psi_r) \\ r\dot{\lambda} = \sqrt{V_T^2 + V_M^2 - 2V_T V_M \cos(\varphi_T - \varphi_M)} \sin(\lambda - \psi_\lambda) \end{cases} \quad (19)$$

همچنین با توجه به تعریف زاویه  $\psi_r$  و  $\psi_\lambda$  داریم:

$$\begin{cases} \tan(\psi_r) = \frac{V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)}{V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)} \\ \tan(\psi_\lambda) = \frac{V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)}{V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)} \end{cases} \quad (20)$$

در ادامه به دنبال یافتن شرایطی هستیم که زاویه خط دید مقدار ثابتی می‌گردد.

با توجه به بدیهی بودن رابطه  $V_T^2 + V_M^2 - 2V_T V_M > 0$  همواره نامساوی  $\frac{V_T^2 + V_M^2}{2V_T V_M} > 1$  برقرار خواهد بود. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$V_T^2 + V_M^2 - 2V_T V_M \cos(\varphi_T - \varphi_M) = 0 \quad (21)$$

روشن است جواب (21) به فرم:

$$\varphi_M = \varphi_T - \cos^{-1} \frac{V_T^2 + V_M^2}{2V_T V_M}$$

می‌باشد. از آن جا که اندازه تابع کیسینوس بین صفر و یک است معادله (21) در اعداد حقیقی جوابی نخواهد داشت. در نتیجه، با توجه (19)، زمانی تغییرات زاویه خط دید صفر می‌گردد که تساوی زیر برقرار شود:

$$\lambda = \psi_\lambda \pm k\pi \quad (22)$$

با اعمال تانژانت به طرفین رابطه (22)، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\tan(\psi_\lambda) = \tan(\lambda) = \frac{V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)}{V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)} \quad (23)$$

با ساده‌سازی معادله (23)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)) \sin(\lambda) &= \\ (V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)) \cos(\lambda) \end{aligned} \quad (24)$$

رابطه (24) به صورت زیر مرتب می‌گردد:

$$\begin{aligned} V_M \sin(\lambda) \cos(\varphi_M) - V_M \cos(\lambda) \sin(\varphi_M) &= \\ V_T \sin(\lambda) \cos(\varphi_T) - V_T \cos(\lambda) \sin(\varphi_T) \end{aligned} \quad (25)$$

در نهایت با استفاده از روابط مثلثاتی، خواهیم داشت:

$$V_M \sin(\lambda - \varphi_M) = V_T \sin(\lambda - \varphi_T) \quad (26)$$

روشن است رابطه (12) جواب معادله (26) می‌باشد. بنابراین صفر شدن تغییرات زاویه خط دید ( $\dot{\lambda} = 0$ )، با ضابطه (12) تضمین خواهد شد. معمولاً در مسائل هدایت  $V_T < V_M$  می‌باشد پس معادله جبری (26) همواره جواب حقیقی خواهد داشت.

با اعمال قانون هدایت (12) و با لحاظ نمودن (22)، رابطه (19) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\sqrt{A^2 + B^2} \sin(\psi_\lambda + \psi_r) \\ \dot{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

در نتیجه، با استفاده از تساوی (18)، داریم:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\sqrt{A^2 + B^2} \\ \lambda(t) = \lambda(t_i), t > t_i \end{cases} \quad (28)$$

بدیهی است معادله (14) جواب معادله دیفرانسیل بیان شده در رابطه (28) است. بنابراین با اعمال قانون (12)، تغییرات زاویه خط دید متحد با صفر می‌شود (زاویه خط دید مقدار ثابتی می‌گردد). همچنین در مدت زمان  $\Delta t$  جسم به هدف خواهد رسید.

**توجه ۱:** زاویه مطلوب سمت جسم (12) تابع غیر خطی از زاویه خط دید  $\lambda$  و زاویه هدف  $\varphi_T$  است. دیده شد که زاویه خط دید با اعمال روش پیشنهادی همواره مقدار ثابتی خواهد بود. اگر زاویه هدف متغیر با زمان باشد آن وقت زاویه فرمان (12) وابسته به زمان خواهد بود. از این رو، برای اهداف با زاویه ثابت، (12) به مقدار ثابتی منجر خواهد شد.

**حالت خاص:** در شرایطی که زاویه هدف ثابت باشد؛ زاویه  $\varphi_M$  محاسبه شده با (12) نیز مقدار ثابتی خواهد بود. در نتیجه، مدت زمان پرواز  $\Delta t$  از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\Delta t = \frac{r(t_i)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (29)$$

**توجه ۲:** روش طرح شده در قضیه ۱، بر پایه زاویه خط دید بوده و زاویه سمت مطلوب جسم را مستقیماً استخراج می‌کند. از این رو در مقایسه با قوانین هدایت موجود (که عمدتاً مبتنی بر اندازه‌گیری تغییرات زاویه خط دید است)، الگوریتم پیشنهادی ساده‌تر بوده و حجم محاسبات کمتری دارد.

**توجه ۳:** با انتخاب قانون هدایت (12)، به صورت آنی تغییرات زاویه خط دید متحد با صفر می‌گردد. از این رو بین دو مقدار متفاوت (زاویه محاسبه شده با رابطه (12) و زاویه کنونی جسم) در مدت زمان صفر سوئیچینگ اتفاق می‌افتد ( $\varphi_M(t_i^-) \neq \varphi_M(t_i^+)$ ). با توجه به الگوریتم هدایت مورد استفاده  $u = \dot{\varphi}_M V_M \cos(\lambda - \varphi_M)$ ، این امر می‌تواند شتاب جانبی بزرگی را برای جسم، در لحظه اعمال فرمان زاویه، ایجاد کند. در کاربردهای عملی، این مشکل را می‌توان به ۲ طریق زیر حل نمود:

الف) فرمان زاویه هدایت از طریق یک فیلتر پایدار (برای مثال تابع تبدیل مرتبه اول) با ثابت زمانی معلوم به جسم اعمال شود. در نتیجه به اندازه کافی زمان برای سوئیچ وجود خواهد داشت. در این صورت، ورودی فیلتر مقدار محاسبه شده با رابطه (12) و خروجی فیلتر سیگنال فرمان زاویه سمت خواهد بود. روشن است استفاده از فیلتر با

و زاویه ثابت در حرکت است. برای یافتن زمان رسیدن جسم به هدف، از فیزیک مکانیک می‌دانیم:

$$\begin{cases} r(t_i) \cos(\lambda) + V_T \cos(\varphi_T) \Delta t \\ = V_M \cos(\varphi_M) \Delta t \\ r(t_i) \sin(\lambda) + V_T \sin(\varphi_T) \Delta t \\ = V_M \sin(\varphi_M) \Delta t \end{cases} \quad (31)$$

در رابطه (۳۱) مقدار مسافت‌های طی شده در راستای افقی و عمودی صفحه منظور شده است. در نتیجه،  $\Delta t$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Delta t = \frac{r(t_i) \cos(\lambda)}{V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)} \quad (32)$$

یا

$$\Delta t = \frac{r(t_i) \sin(\lambda)}{V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)} \quad (33)$$

رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) معادل با (۲۹) می‌باشد. با حذف  $\Delta t$  داریم:

$$\frac{\sin(\lambda)}{V_M \sin(\varphi_M) - V_T \sin(\varphi_T)} = \frac{\cos(\lambda)}{V_M \cos(\varphi_M) - V_T \cos(\varphi_T)} \quad (34)$$

تساوی (۳۴) معادل با رابطه (۲۳) خواهد بود. بنابراین زاویه مطلوب جسم از رابطه (۱۲) تعیین خواهد شد.

#### ۴- شبیه‌سازی

قانون هدایت پیشنهادی با فرض قرار گرفتن حرکت جسم و هدف در یک صفحه و همچنین ثابت بودن سرعت استخراج شده است. بنابراین آن محدود به نوع محیط نبوده و قابل استفاده در انواع کاربردهای زمینی، دریایی و هوایی است. برای نشان دادن اثر بخشی الگوریتم ارائه شده در شناورها، یک مساله هدایت صفحه‌ای با داده‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$r(0) = 1000$ ,  $\lambda(0) = 0.1$ ,  $\varphi_M(0) = 0.5$ ,  $\varphi_T = -0.3$   
در این سناریو، سرعت شناور  $V_M = 40$  متر بر ثانیه و سرعت هدف مورد نظر  $V_T = 20$  متر بر ثانیه انتخاب می‌گردد. با محاسبه قانون (۱۲)، زاویه مرجع شناور، مقدار  $\varphi_M = -0.0960$  رادیان تعیین خواهد شد. در تولید سیگنال فرمان  $\varphi_M$  از یک فیلتر مرتبه اول با ثابت زمانی ۲ ثانیه استفاده شده است. معادلات حاکم بر سیستم هدایت، با زمان انتگرال‌گیری ۱ میلی ثانیه و انتخاب  $t_i = t_0 = 0$  شبیه‌سازی می‌گردد. برای نشان دادن اثر بخش بودن قانون هدایت مطرح شده، روش پیشنهادی با هدایت تناسبی ( $N = 5$ ) مقایسه شده است. تغییرات زاویه خط دید  $\lambda(t)$  بین شناور و هدف در شکل ۲ و همچنین زاویه  $\lambda(t)$  در شکل ۳ مشاهده می‌گردد. زاویه سمت شناور  $\varphi_M(t)$  در شکل ۴ نمایش داده شده است. دیده می‌شود که زاویه  $\varphi_M$

پهنای باند زیاد، دامنه شتاب جانبی در لحظات ابتدایی را افزایش می‌دهد. به علاوه کاهش پهنای باند فیلتر باعث تأثیر مخرب بر پایداری و یا پاسخ گذرای معادلات حلقه بسته می‌گردد. بنابراین ضروری است در انتخاب پهنای باند، بین این دو مورد بیان شده مصالحه انجام گیرد.

ب) قانون هدایت (۱۲) بلافاصله در شروع مساله (زمان  $t_0$ ) استفاده نشود مادمی که یک شرط مناسبی برآورده می‌گردد. چنین شرطی می‌تواند به این صورت باشد که زاویه کنونی جسم به اندازه کافی نزدیک به زاویه محاسبه شده با رابطه (۱۲) شود. به عبارت دیگر، در لحظات آغازین شبیه‌سازی ( $t \in [t_0 \quad t_i]$ )، یک الگوریتم هدایت نوعی مانند هدایت تناسبی به کار گرفته شود؛ سپس در لحظه معین  $t_i$  به روش پیشنهادی سوئیچ گردد.

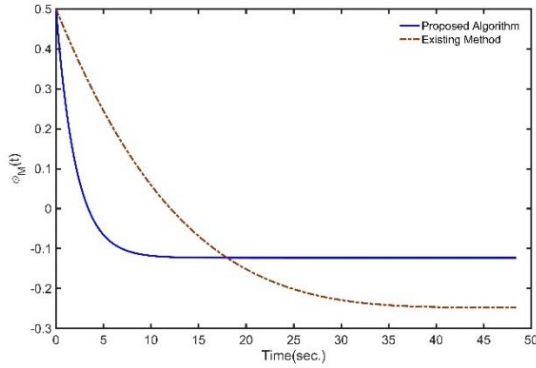
توجه ۴. در کنترلرهای PID، هنگام تغییر مد از دستی به اتوماتیک چالشی شبیه به آن چه در فوق بیان گردید پیش می‌آید. از این رو روش‌های انتقال بدون ضربه (Bumpless Transfer) برای این مشکل مطرح شده‌اند. عملاً دو رویکرد پیشنهادی یاد شده می‌تواند در دسته روش‌های انتقال بدون ضربه قرار گیرد.

توجه ۵: وجود توام توابع  $\sin(\cdot)$  و  $\sin^{-1}(\cdot)$  در قانون (۱۲)، علی‌الخصوص زمانی که  $V_T \ll V_M$  می‌باشد، ممکن باعث ایجاد خطای محاسباتی در تولید زاویه فرمان  $\varphi_M$  گردد. به همین دلیل، توصیه می‌گردد در شبیه‌سازی تحلیل حساسیت به خطای محاسباتی انجام گیرید. برای این منظور فرض می‌کنیم اختلاف زاویه خط دید  $\lambda$  با زاویه هدف  $\varphi_T$  دارای خطای  $\delta$  است. از این رو، به ازای مقادیر  $\lambda$ ،  $\varphi_T$ ،  $V_M$  و  $V_T$  معلوم، تابع هزینه زیر می‌تواند در نظر گرفته شود:

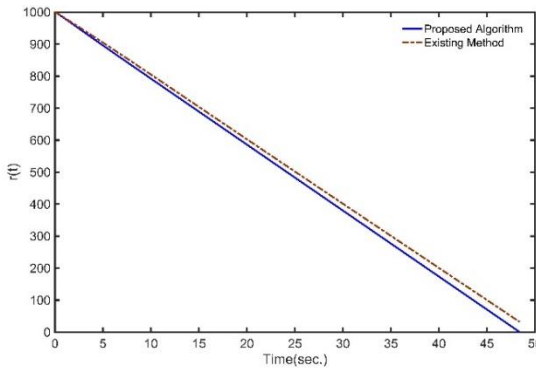
$$J = \left| \sin^{-1} \left( \frac{V_T}{V_M} \sin(\lambda - \varphi_T + \delta) \right) - \sin^{-1} \left( \frac{V_T}{V_M} \sin(\lambda - \varphi_T) \right) \right| \quad (30)$$

در نتیجه، در شبیه‌سازی عددی می‌توان کران بالایی برای  $\delta$  تعیین نمود. بدیهی است که زمانی که مقادیر عددی  $V_M$  و  $V_T$  به هم نزدیک باشد است، موجب خطای قابل ملاحظه‌ای نخواهد شد.

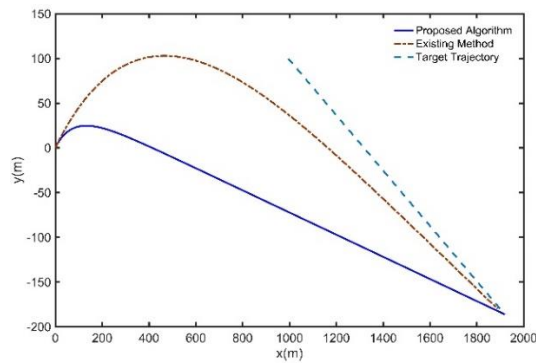
تفسیر هندسی روش هدایت پیشنهادی: در حین پرواز، با اعمال قانون (۱۲)، زاویه خط دید مقدار ثابتی خواهد بود. حال اگر زاویه هدف مقدار ثابتی باشد، مقدار زاویه مطلوب بدست آمده با (۱۲) ثابت خواهد بود. پس جسمی با سرعت و زاویه ثابت به سمت هدف دارای سرعت



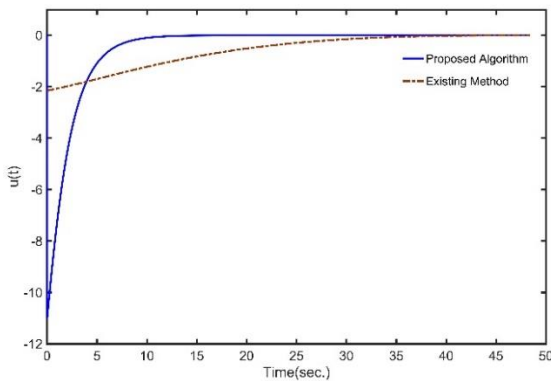
شکل ۴- تغییرات زاویه سمت شناور  $\varphi_M(t)$



شکل ۵- فاصله نسبی  $r(t)$



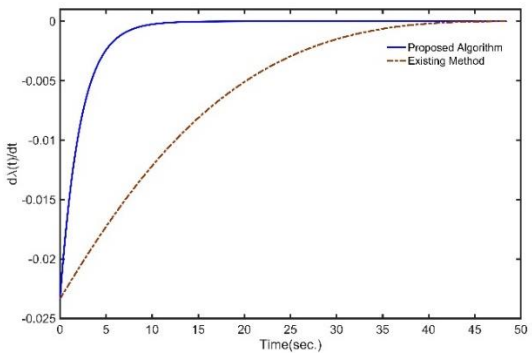
شکل ۶- مسیر حرکت شناور و هدف



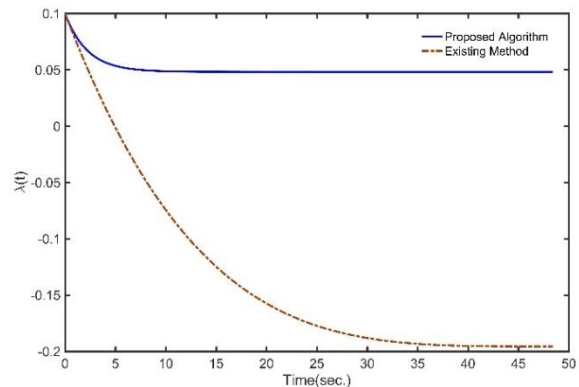
شکل ۷- شتاب جانبی اعمال شده به شناور

و زاویه خط دید  $\lambda$  سریعاً و به صورت نمایی به مقدار مطلوب همگرا می‌گردد. در نتیجه تغییرات زاویه خط دید در زمان کوتاهی (حدوداً ۴ برابر ثابت زمانی) صفر خواهد شد. فاصله نسبی شناور از هدف  $r(t)$  در شکل ۵ و مسیر حرکت دو بعدی شناور و هدف در شکل ۶ نشان داده است. شتاب جانبی اعمال شده به شناور در شکل ۷ آورده شده است. روشن است با رویکرد پیشنهادی در مدت زمان کمتری، شناور به هدف مورد نظر می‌رسد. مطابق شکل ۷، بیشینه شتاب جانبی 1.2g در ابتدای زمان شبیه‌سازی به شناور اعمال شده است. هر چند در مقایسه با روش موجود، شتاب جانبی بیشتری به وسیله وارد شده است؛ اما این مقدار در محدوده مجاز وسیله قرار دارد.

مشابه با روش موجود، الگوریتم استخراج شده در این پژوهش سعی در صفر نمودن نرخ زاویه خط دید دارد. در نتیجه در هر دو روش، صفر شدن تغییرات زاویه خط دید (شکل ۲) و شتاب جانبی (شکل ۷) به صورت مجانبی انجام شده است. در پیاده‌سازی قانون هدایت، ورودی فیلتر مرتبه اول مقدار محاسبه شده با رابطه (۱۲) و خروجی آن فرمان زاویه سمت شناور خواهد بود.



شکل ۲- تغییرات زاویه خط دید  $\dot{\lambda}(t)$



شکل ۳- زاویه خط دید  $\lambda(t)$

[۴] M. Guelman and J. Shinar, "Optimal guidance law in the plane," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 7, no. 4, pp. 471-476, 1984.

[۵] I.-J. Ha and S. Chong, "Design of a CLOS guidance law via feedback linearization," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 51-63, 1992.

[۶] J. Moon, K. Kim, and Y. Kim, "Design of missile guidance law via variable structure control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 24, no. 4, pp. 659-664, 2001.

[۷] H.-G. Kim and H. J. Kim, "Backstepping-based impact time control guidance law for missiles with reduced seeker field-of-view," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 82-94, 2018.

[۸] J. Guo, Y. Li, and J. Zhou, "A new continuous adaptive finite time guidance law against highly maneuvering targets," *Aerospace Science and Technology*, vol. 85, pp. 40-47, 2019.

[۹] X. Chen and J. Wang, "Optimal control based guidance law to control both impact time and impact angle," *Aerospace Science and Technology*, vol. 84, pp. 454-463, 2019.

[۱۰] Y. Sheng, Z. Zhang, and L. Xia, "Fractional-order sliding mode control based guidance law with impact angle constraint," *Nonlinear Dynamics*, vol. 106, no. 1, pp. 425-444, 2021.

[۱۱] C. Wang, W. Dong, J. Wang, and J. Shan, "Nonlinear suboptimal guidance law with impact angle constraint: An SDRE-based approach," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 56, no. 6, pp. 4831-4840, 2020.

[۱۲] D. Zhou, C. Mu, and T. Shen, "Robust guidance law with  $L_2$  gain performance," *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, vol. 44, no. 144, pp. 82-88, 2001.

[۱۳] A. Saleem and A. Ratnoo, "Lyapunov-based guidance law for impact time control and simultaneous arrival," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, no. 1, pp. 164-173, 2016.

به دلیل استفاده از فیلتر در قانون هدایت پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که با رویکرد ارائه شده، زاویه سمت شناور (شکل ۴) از مقدار اولیه 0.5 رادیان به مقدار ثابت  $-0.12322$  رادیان (اندکی متفاوت با مقدار محاسبه شده  $\varphi_M = -0.0960$  با رابطه (۱۲)) می‌رسد. همچنین با رویکرد پیشنهادی، زاویه خط دید (شکل ۳) از مقدار اولیه 0.1 رادیان به مقدار 0.0482 رادیان تغییر یافته است. بنابراین در مقایسه با رویکردهای مشابه، روش هدایت پیشنهادی ساده بوده و در شبیه‌سازی دارای عملکرد قابل قبولی است.

### ۵- نتیجه‌گیری

با توجه روابط ریاضی حاکم بر بحث و به‌کارگیری روابط مثلثاتی، یک الگوریتم مبتنی بر زاویه خط دید جهت استفاده در سیستم‌های هدایت پیشنهاد گردید. مشاهده شد که برخلاف قاعده‌های موجود، قانون پیشنهادی به یک رابطه جبری منجر می‌گردد. اگر چه منطق ارائه شده در مقاله، ذاتا مستقل از نرخ زاویه خط دید بود اما صفر شدن تغییرات زاویه خط دید با کمک چنین روالی، به صورت لحظه‌ای رخ می‌دهد. از این روی، در مقایسه با رویه‌های موجود، رویکرد مطرح شده دارای نقاط قوت و قابلیت‌های مفیدی است. به همین منظور، قانون هدایت مستخرج در مساله هدایت شناور سطحی ارزیابی گردید. با انجام شبیه‌سازی عددی، مزیت روش هدایت در مقایسه با شیوه‌های دیگر نشان داده شد.

### منابع

[۱] V. Ghaffari and P. Karimaghaee, "Performance and Stability Investigation of a line of sight based Guidance System in the Presence of Measurement Noise," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 11, no. 1, pp. 31-40, 2018.

[۲] S. Talole, A. Ghosh, and S. Phadke, "Proportional navigation guidance using predictive and time delay control," *Control Engineering Practice*, vol. 14, no. 12, pp. 1445-1453, 2006.

[۳] D. Zhou and B. Xu, "Adaptive dynamic surface guidance law with input saturation constraint and autopilot dynamics," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, no. 5, pp. 1155-1162, 2016.



Robust Model Predictive Control to Obtain Optimal LOS for Flying Vehicle," *Tabriz Journal of Electrical Engineering* vol. 48, no. 4, pp. 1645-1652, 2019.

[۲۳] V. Ghaffari, "Model predictive guidance law design in a two-dimensional guidance problem in presence of Input constraint," *Aerospace Knowledge and Technology Journal*, vol. 8, no. 2, pp. 169-178, 2020.

[۲۴] L. Lin and J. J. Zhu, "Line-of-sight pure pursuit guidance stability analysis and design guideline for car-like autonomous ground vehicles," in *Dynamic Systems and Control Conference*, 2019.

[۲۵] R. Rout and B. Subudhi, "Design of line-of-sight guidance law and a constrained optimal controller for an autonomous underwater vehicle," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 68, no. 1, pp. 416-420, 2020.

[۲۶] N. Gu, D. Wang, Z. Peng, J. Wang, and Q.-L. Han, "Advances in Line-of-Sight Guidance for Path Following of Autonomous Marine Vehicles: An Overview," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, doi: 10.1109/TSMC.2022.3162862.

[۲۷] Z. Qian, W. Lyu, Y. Dai, and J. Xu, "A Consensus-Based Model Predictive Control with Optimized Line-of-Sight Guidance for Formation Trajectory Tracking of Autonomous Underwater Vehicles," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 106, no. 1, pp. 1-13, 2022.

[۲۸] M. Zhang and J. Ma, "Adaptive fixed-time cooperative intercept guidance law with line-of-sight angle constraint," in *International Conference on Mechatronics and Automation*, 2019.

[۲۹] G. M. Siouris, *Missile guidance and control systems*. Springer Science & Business Media, 2004.

[۱۴] D. Zhou, S. Sun, and K. L. Teo, "Guidance laws with finite time convergence," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 32, no. 6, pp. 1838-1846, 2009.

[۱۵] G. Li, M. Xin, and C. Miao, "Finite-time input-to-state stability guidance law," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 41, no. 10, pp. 2199-2213, 2018.

[۱۶] T. Binazadeh, M. H. Shafiei, and E. Bazregarzadeh, "New approach in guidance law design based on finite-time partial stability theorem," *Journal of Space Science and Technology*, vol. 8, no. 1, pp. 1-7, 2015.

[۱۷] V. Behnam Gol, I. Mohammad Zaman, A. Vali, and N. A. Ghahramani, "Guidance law design using finite time second order sliding mode control," *Journal of Control*, vol. 5, no. 3, pp. 36-44, 2011.

[۱۸] S. Xiong, W. Wang, X. Liu, S. Wang, and Z. Chen, "Guidance law against maneuvering targets with intercept angle constraint," *ISA transactions*, vol. 53, no. 4, pp. 1332-1342, 2014.

[۱۹] s. khankalantary, m. hajizadeh, heidari, azem, and h. mohammadkhani, "Impact Time Guidance Law against Maneuvering Targets Using Sliding Mode Control," *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, vol. 53, no. 2, pp. 913-922, 2021.

[۲۰] C. Wang, X. Ding, J. Wang, and J. Shan, "A robust three-dimensional cooperative guidance law against maneuvering target," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 10, pp. 5735-5752, 2020.

[۲۱] Y. Ji, D. Lin, W. Wang, S. Hu, and P. Pei, "Three-dimensional terminal angle constrained robust guidance law with autopilot lag consideration," *Aerospace Science and Technology*, vol. 86, pp. 160-176, 2019.

[۲۲] S. Ebadollahi, M. Madani, and M. Golestani, "Guidance Law based on LMI-based