



Applying weighted smoothed norm in sparse representation classification for face recognition

M .Alamdari *, M .Fatemi 

*Faculty of Mathematical Sciences, University of K.N.T University, Teharn, Iran

((Received: 2023/04/13, Revised: 2023/06/13, Accepted: 2023/08/05, Published: 2023/09/28))

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.23224347.1402.11.3.6.1>

Abstract

Classification and recognition is one of the most important methods of extracting information from images, and among them, facial image recognition as one of the most efficient biometric features for human identification has always been of interest, and extensive research has been conducted in this field in recent years. So far, various solutions for face recognition have been proposed by researchers, but among them, the use of Sparse representation classification has been considered as an effective and specific solution. One of the features of Sparse representation is to obtain features from input images without the need of feature extraction methods, therefore, in this article, the proposed method is aimed at applying weighted smoothed ℓ_0 norm for face recognition using Sparse representation.

To check the performance of the proposed method, ORL and AR databases including images of different facial expressions have been used, and the simulated results show that the method performs very well compared to other well-known methods in the field of face recognition.

Keywords: Face recongnition, Feature extraction, Sparse representation classification, Weighted smoothed ℓ_0 norm

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

Publisher: Imam Hussein University

Authors



*Corresponding Author Email: m.s.alamdari69@gmail.com

بکارگیری نرم صفر هموار شده وزن دار در طبقه‌بندی نمایش تُنک جهت شناسایی چهره

محمد سعید علمداری^{۱*}، مسعود فاطمی^۲

۱- دانشجوی دکترا، ۲- دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۴، بازنگری: ۱۴۰۲/۰۳/۲۳، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۱۴، انتشار: ۱۴۰۲/۰۷/۰۶)

DOR: <https://dorl.net/dor/20.1001.1.23224347.1402.11.3.6.1>



* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز (Creative Commons Attribution) (CC BY) توزیع شده است.

© نویسندگان

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

چکیده

طبقه‌بندی و شناسایی یکی از مهم‌ترین روش‌های استخراج اطلاعات از تصاویر می‌باشد که از میان آن‌ها، شناسایی تصاویر چهره به‌عنوان یکی از کارآمدترین ویژگی‌های بیومتریک در جهت شناسایی انسان‌ها همواره مورد توجه بوده است و درسالیان اخیر در این زمینه تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است. تاکنون راه‌حل‌های مختلفی برای شناسایی چهره از سوی محققان مطرح شده است ولی در میان آن‌ها استفاده از طبقه‌بندی نمایش تُنک به‌عنوان راه‌حلی مؤثر و خاص مورد توجه قرار گرفته است. یکی از محاسن نمایش تُنک، دریافت تصاویر ورودی بدون نیاز به استفاده از روش‌های استخراج ویژگی است، لذا در این مقاله روش پیشنهادی با بکارگیری نرم صفر هموار شده وزن دار و بر اساس نمایش تُنک جهت شناسایی چهره معرفی می‌شود. برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی از دو پایگاه داده ORL و AR شامل تصاویر حالات مختلف چهره استفاده شده است که نتایج شبیه‌سازی شده نشان‌دهنده عملکرد بسیار مناسب روش نسبت به سایر روش‌های معروف در زمینه شناسایی چهره می‌باشد.

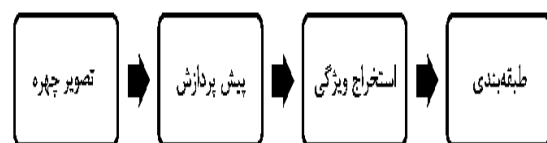
کلیدواژه‌ها: شناسایی چهره، استخراج ویژگی، طبقه‌بندی نمایش تُنک، نرم صفر هموار شده وزن دار.

۱. مقدمه

باشد با استفاده از الگوریتم طبقه‌بندی ساده نیز روش عملکرد خوبی در شناسایی چهره خواهد داشت، لذا این بخش اهمیت زیادی دارد. از طرفی انتخاب طبقه‌بندی مناسب در مرحله چهارم سیستم شناسایی چهره که در شکل ۱ نمایش داده شد نیز دارای اهمیت بسیار بالایی است، در این خصوص بررسی‌ها نشان می‌دهد استفاده از طبقه‌بندی قوی و مناسب در شرایطی که سیستم دارای الگوریتم انتخاب ویژگی ساده باشد، می‌تواند باعث عملکرد بسیار مطلوبی در سیستم شناسایی شود.

در برخی تحقیقات نشان داده شده است، یکی از الگوریتم‌های طبقه‌بندی که می‌تواند بدون نیاز به الگوریتم‌های استخراج ویژگی به‌صورت مستقیم ویژگی‌های مفید را از تصویر ورودی دریافت کند الگوریتم طبقه‌بندی نمایش تُنک^۱ (SRC) [۲] است. این الگوریتم باوجود استفاده از ساده‌ترین روش کاهش تعداد ویژگی یعنی down-sampling از عملکرد خیلی بهتری نسبت به الگوریتم‌های طبقه‌بندی ماشین بردار پشتیبان^۲ (SVM)،

استفاده از ویژگی‌های بیومتریک جهت شناسایی انسان‌ها در چند سال گذشته توجه زیادی از جوامع دانشگاهی و تجاری را به خود منعطف کرده است. در این میان شناسایی چهره به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های بیومتریک، همواره جهت شناسایی انسان مورد توجه بوده است که به دلیل طیف وسیع تغییراتی که در چهره وجود دارد هنوز هم شناسایی دقیق آن کار دشواری است. سیستم‌های شناسایی چهره با چالش‌های مختلفی از قبیل تغییرات نور، ژست‌های مختلف صورت، گرد و غبار، دود موجود در محیط، وجود عینک در چهره و ... مواجه هستند لذا محققان راه‌کارهای مختلفی جهت غلبه بر این مشکلات ارائه کرده‌اند. شکل ۱ چهارچوب کلی شناسایی چهره را نمایش می‌دهد.



شکل (۱). الگوریتم کلی شناسایی چهره [۱]

^۱ Sparse Representation Classification

^۲ Support Vector Machines

اگر سیستم دارای عملکرد مناسبی در بخش استخراج ویژگی

[۷] یا نرم صفر هموار شده^۶ (SL0) [۸] استفاده می‌شود. در این مقاله برای کاهش پیچیدگی محاسبات و زمان اجرای برنامه از نرم صفر هموار شده وزن‌دار^۷ (WSL0) [۹] استفاده می‌شود. ساختار کلی مقاله به این شرح است: در بخش ۲ نمایش تُنک و دستگاه معادلات خطی تُنک بررسی می‌شود. طبقه‌بندی مبتنی بر نمایش تُنک در بخش ۳ آرایه می‌گردد. در بخش ۴ روش نرم صفر هموار شده وزن‌دار مرور می‌گردد. در بخش ۵ روش پیشنهادی و نتایج عددی مقاله جهت بررسی عملکرد روش پیشنهادی در زمینه شناسایی چهره آرایه می‌شود و در نهایت نتیجه‌گیری در بخش ۶ آورده شده است.

۲. نمایش تُنک و دستگاه معادلات خطی تُنک

در سالیان اخیر نمایش تُنک کاربردهای متنوعی در پردازش سیگنال پیدا کرده است. نتایج موفقیت‌آمیز این نمایش دارای کاربردهای زیادی در روش‌های کاهش نویز، بازسازی تصاویر پزشکی و راداری، طبقه‌بندی، ناحیه بندی، کدینگ، فشرده‌سازی، خوشه‌بندی، انطباق تصویر، یادگیری ماشین و ... سبب شده است تا انواع روش‌های حل آن مورد بررسی قرار گیرد.

منظور از نمایش تُنک، نمایشی از سیگنال است که در آن قسمت عمده‌ای از اطلاعات اساسی سیگنال در تعداد کمی از ضرایب متمرکز می‌شوند. گرچه تعریف و معیاری برای تُنک بودن وجود ندارد، اما در یک بیان ساده تُنکی به معنای صفر بودن بیشتر مؤلفه‌های سیگنال است و در بیان عملی یعنی اکثر مؤلفه‌های سیگنال کوچک بوده و تنها چند مؤلفه سیگنال دارای مقادیر قابل توجهی باشند.

سیستم معادله خطی زیر را که در آن $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس دیکشنری و $y \in \mathbb{R}^m$ بردار سیگنال می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$y = Ax \quad (1)$$

به بیان ریاضی در مسائلی بازیابی سیگنال، هدف یافتن تنک‌ترین بردار ممکن $x \in \mathbb{R}^n$ است که در دستگاه معادلات خطی (۱) صدق کند. بر اساس ابعاد مسائلی، برای حل دستگاه معادلات خطی فوق سه حالت قابل تصور است:

(۱) حالت فرا معین، وقتی که تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات باشد: $m > n$ در جبر خطی به صورت گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

(۲) حالت معین، وقتی که تعداد معادلات برابر تعداد مجهولات باشد $m = n$: در این حالت جواب دستگاه معادلات یکتا می‌باشد

نزدیک‌ترین زیرمجموعه^۱ (NS) و نزدیک‌ترین همسایگی^۲ (NN) برخوردار است.

برای مثال عودت و همکاران [۳] جهت شناسایی تصاویر چهره از طبقه‌بندی نمایش تُنک با استفاده از حداقل مربعات مبتنی بر ادغام خطی نرم l_1 و نرم l_2 استفاده کردند و جهت بررسی عملکرد روش پیشنهادی خود، تغییرات ابعاد فضای ویژگی و تعداد تصاویر آموزشی برای هر فرد را بر روی دو پایگاه داده مختلف مورد ارزیابی قرار دادند که در نهایت روش آن‌ها توانست عملکرد بهتری نسبت به الگوریتم‌های محبوب طبقه‌بندی مانند SVM و NN از خود نشان دهد. رایت و همکاران [۲] در پژوهش خود به صورت عملی و تئوری به بررسی عملکرد الگوریتم طبقه‌بندی تُنک برای داده‌های با ابعاد بزرگ می‌پردازند که با حداقل سازی نرم l_1 الگوریتم طبقه‌بندی جهت شناسایی ارائه می‌کنند و به این موضوع اشاره دارند که استفاده از این روش سبب رفع مشکلاتی از قبیل استخراج ویژگی‌ها شده و مقاومت در برابر انسداد بخشی از تصویر در مسأله شناسایی چهره را افزایش می‌دهد. در کار آن‌ها با وجود استفاده از ساده‌ترین روش کاهش ویژگی یعنی down-sampling مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی عملکرد بسیار مناسب‌تری نسبت به روش‌های طبقه‌بندی NN، NS و SVM دارد.

لیو و همکاران [۴] استفاده از یک الگوریتم طبقه‌بندی تُنک تقویت شده را جهت شناسایی چهره پیشنهاد می‌کنند و در آن یک ماشین تشخیص خطا همراه با آشکارسازهای خطای چندگانه جهت بهبود کدگذاری نمایش ارائه داده‌اند که این کار موجب تشخیص و حذف قسمت‌های خراب شده یک تصویر می‌شود. به‌طور کلی استفاده از یک الگوریتم طبقه‌بندی مناسب و قوی در سیستم‌های شناسایی چهره گاهی می‌تواند عملکرد سیستم را به قدری بهبود بخشد که سیستم حتی بدون استفاده از هیچ الگوریتم استخراج ویژگی بتواند عملکرد قابل قبولی از خود نشان دهد. لذا روش پیشنهادی در این مقاله بهره‌مندی از روش طبقه‌بندی نمایش تُنک در دریافت ویژگی‌های تصویر به صورت مستقیم و بدون استفاده از استخراج ویژگی می‌باشد. این روش دارای عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌های طبقه‌بندی می‌باشد و از جمله ویژگی‌های خیلی مهم و متمایز کننده آن، مقاوم بودن در برابر محوشدگی بخشی از چهره است.

برای یافتن جواب تُنک از روش‌های بهینه‌سازی نرم l_1 ، جستجوی تطابق^۳ [۵]، جستجوی پایه^۴ [۶]، برنامه‌ریزی خطی^۵

⁵ Linear Programing

⁶ Smoothed l_0 norm

⁷ Weighted Smoothed l_0 norm

¹ Nearest Subspace

² Nearest Neighbor

³ Matching Pursuit

⁴ Basis Pursuit

و از رابطه $x = A^{-1}y$ محاسبه می‌شود. پاسخ بدست آمده برای نمایش بردار x گرچه یکتا می‌باشد اما در بسیاری از موارد تُنک نیست.

حالت فرو معین، وقتی که تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات باشد $n > m$: در این حالت دستگاه معادلات خطی دارای بی‌شمار جواب است.

$$V(s) = \begin{cases} 1 & s \neq 0 \\ 0 & s = 0 \end{cases}$$

مشخص است که ناپیوستگی نرم صفر به دلیل ناپیوستگی تابع $V(s)$ است. اگر این تابع با تابعی هموار جایگزین شود، آن‌گاه تخمین هموار نرم صفر به دست می‌آید. توابع گوناگونی برای این منظور می‌توان استفاده نمود که مناسب‌ترین انتخاب، قرینه تابع گوسی با میانگین صفر است. در این صورت داریم:

مدل رایج، مسائله حداقل سازی نُرم صفر است، به عبارتی

$$f_{\sigma}(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{\sigma^2}\right)$$

که در آن $\|x\|_0$ معرف تعداد درآیه‌های غیر صفر بردار x است. استفاده از این نُرم به دلیل ناپیوستگی، عدم مشتق‌پذیری و حساسیت زیاد به نویز برای حل مسائل بهینه‌سازی مناسب نیست و حل آن مستلزم یک جستجوی ترکیبیاتی است که در ابعاد بالا امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل محققان در سال‌های اخیر به‌صورت تجربی [۱۱] و نظری [۱۲-۱۵] نشان داده‌اند که می‌توان نُرم یک را جایگزین نُرم صفر کرد و مسائله حداقل سازی نُرم یک را حل کرد.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

در نتیجه $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_{\sigma}(s) = 1 - V(s)$. بنابراین، اگر فرض کنیم $F_{\sigma}(s) = \sum_{j=1}^n f_{\sigma}(s_j)$ داریم:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_{\sigma}(s) = \sum_{j=1}^n (1 - V(s_j)) = n - \|s\|_0$$

آنگاه $n - F_{\sigma}(s)$ می‌تواند تخمین نرم صفر s باشد، یعنی:

$$\|s\|_0 \approx n - F_{\sigma}(s) \quad (4)$$

از آنجا که این تابع جدید هموار است به سادگی می‌توان آن را بهینه‌سازی نمود. اگر σ را در رابطه (۴) به سمت صفر میل دهیم، تقریب به‌تساوی تبدیل می‌شود. بنابراین بیشینه کردن تابع $F_{\sigma}(s)$ برای σ کوچک معادل با حداقل کردن نرم صفر است. نکته مهم در استفاده از نُرم صفر هموار شده، پارامتر هموارسازی σ است. الگوریتم‌های مبتنی بر نُرم صفر هموار شده در مقایسه با روش‌های مبتنی بر حداقل کردن نُرم صفر و نُرم یک، علاوه بر سرعت بیشتر دارای ویژگی‌های مطلوبی از قبیل پیوستگی، مشتق‌پذیری، سادگی و رفتار عددی مناسب می‌باشد که در [۸] به تفصیل گزارش شده است.

پس از اینکه پاسخ مسأله تُنک بر اساس روش‌های ذکر شده محاسبه شد، باید شرایطی برای یکتا بودن پاسخ آرایه گردد. یک ویژگی که نقش اساسی در قضیه یکتایی دارد، اسپارک ماتریس است که روشی برای توصیف فضای پوچ ماتریس می‌باشد.

در پردازش تصویر، صوت و در حالت کلی پردازش سیگنال، یکی از روش‌هایی که برای حل دستگاه فرو معین وجود دارد افزودن قیدهایی به آن است [۱۰]. در بسیاری از کاربردها از میان بی‌شمار جواب، مطلوب ما جوابی است که تا حد ممکن درآیه صفر (یا خیلی نزدیک صفر) داشته باشد. لذا در این خصوص یک مدل رایج، مسائله حداقل سازی نُرم صفر است، به عبارتی

$$P_0: \min_x \|x\|_0 \quad s.t \quad y = Ax \quad (2)$$

به‌طورکلی، دسته‌ای از توابع که مسائله را به سمت تُنک بودن هدایت می‌کنند به فرم زیر می‌باشند:

$$P_1: \min_x \|x\|_1 \quad s.t \quad y = Ax$$

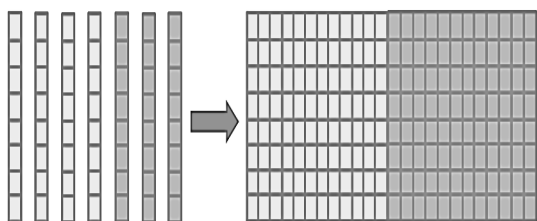
$$P_p: \min_x \|x\|_p^p = \sum_i |x_i|^p \quad s.t \quad y = Ax$$

که در آن $0 \leq p \leq 1$ می‌باشد. توجه به این نکته ضروری است که در کاربردهای عملی که داده‌های موجود در معرض نویز و خطاهای اندازه‌گیری هستند، مسائل مقاوم به نویز زیر حل می‌شوند [۱۶] که در آن $\varepsilon > 0$ حد بالایی برای نویز است.

$$P_0^{\varepsilon}: \min_x \|x\|_0 \quad s.t \quad \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon \quad (3)$$

$$P_1^{\varepsilon}: \min_x \|x\|_1 \quad s.t \quad \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon$$

یکی دیگر از الگوریتم‌های مناسب برای یافتن پاسخ تُنک، نرم صفر هموار شده نام دارد که در سال ۲۰۰۹ توسط مهیمنی و همکارانش [۸] معرفی شده‌است. در این روش تلاش بر آن است تا به جای نرم صفر از تابع همواری استفاده شود که تقریبی از نرم صفر را نتیجه می‌دهد. نرم صفر بردار s



شکل (۲). ساخت دیکشنری

برای داشتن یک نمایش تُنک برای نمونه جدید، باید دیکشنری ساخته شده فرا کامل^۳ باشد. به عبارت ساده‌تر باید ماتریس A یک ماتریس پهن ($n > m$) باشد که لازمه آن بیشتر بودن تعداد نمونه‌های آموزش از تعداد ویژگی‌های هر نمونه است.

پس از ساخت ماتریس دیکشنری، مدل نمایش خطی برای نمونه جدید به صورت $y = Ax$ خواهد بود. بردار $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ بردار ضرایب نامیده می‌شود و درآیه‌های آن ضرایب نمونه‌های آموزش در ترکیب خطی نمونه جدید را نشان می‌دهند. ترکیب خطی y به صورت رابطه (۸) نیز نوشته می‌شود.

$$y = x_{11}a_{11} + x_{12}a_{12} + \dots + x_{cn_c}a_{cn_c} = Ax \quad (8)$$

اگر تعداد نمونه‌ها بیشتر از تعداد ویژگی‌ها باشد ($n > m$) بی‌شمار پاسخ برای x وجود خواهد داشت. همان‌طور که گفته شد در حالت ایده‌آل اگر y متعلق به طبقه λ باشد و تعداد کافی از نمونه‌های این طبقه وجود داشته باشد، در تنک‌ترین پاسخ x فقط درآیه‌های مربوط به طبقه λ ام غیر صفر خواهد بود. به عبارت دیگر بردار x به صورت رابطه (۹) خواهد بود.

$$x = [0, \dots, 0, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}, 0, \dots, 0]^t \quad (9)$$

با توجه به آن‌که به دنبال یافتن تُنک‌ترین پاسخ برای x هستیم، لذا به دنبال جواب مسأله بهینه‌سازی P_0 رابطه (۲) خواهیم بود که در عمل پایدار نیست و افزودن مقدار اندکی نویز به داده‌ها، موجب می‌شود که پاسخ مسأله به‌طور کلی تغییر کند و لذا در عمل برای یافتن x مسأله P_0^E رابطه (۳) را حل می‌کنیم که بدین منظور روش‌های مختلفی برای یافتن پاسخ مسأله نمایش تُنک ارائه شده است.

پس از یافتن تُنک‌ترین پاسخ x برچسب طبقه نمونه جدید باید انتخاب شود که بدین منظور از روش نزدیک‌ترین زیر فضا بهره‌مند می‌شویم که در آن طبقه نمونه آزمایشی y برابر کلاسی انتخاب می‌شود که نمونه‌های آن طبقه با ضرایب مربوط به آن‌ها

طبق تعریف، اسپارک یک ماتریس برابر حداقل تعداد ستون‌های وابسته خطی ماتریس است [۱۲] و بنابر تعریف برای که آن‌های بالا و پایین اسپارک ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ داریم:

$$1 \leq \text{Spark}(A) \leq m + 1$$

با این تعریف، قضیه یکتایی با استفاده از اسپارک [۱۵] به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه [۱۵]: اگر جوابی از دستگاه فرومعین $y = Ax$ در (۵) صدق کند، آنگاه لزوماً این جواب تنک‌ترین جواب ممکن است.

$$\|x\|_0 \leq \frac{\text{Spark}(A)}{2} \quad (5)$$

۳. طبقه‌بندی مبتنی بر نمایش تُنک

طبقه‌بندی بر مبنای نمایش تُنک، یک روش جدید برای طبقه‌بندی داده‌ها است که برای اولین بار توسط رایت و همکارانش برای تشخیص چهره^۱ طراحی و ارائه شد [۲] البته قبل از آن نیز از نمایش تُنک در طبقه‌بندی سیگنال‌ها استفاده شده بود [۱۷]، ولی رایت و همکارانش در مقاله خود روشی را برای طبقه‌بندی مقاوم چهره مورد بحث قرار داده‌اند.

طبقه‌بندی نمایش تُنک عملکرد خوبی برای تشخیص چهره و تشخیص چهره مقاوم^۲ از خود نشان داد و سبب شد که توجهات زیادی در زمینه تشخیص الگو به خود جلب کند و پژوهش‌های زیادی توسط محققان بر روی آن انجام شود [۱۸-۲۰].

برای بیان مدل ریاضی این نمایش تُنک، فرض کنید برچسب کلاس‌ها به صورت $i = 1, 2, \dots, c$ بوده و نمونه جدید $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ متعلق به طبقه λ باشد که m تعداد ویژگی‌های هر نمونه است. برای ساخت ماتریس دیکشنری برای مدل نمایش تُنک، نمونه‌های طبقه λ را که تعداد آن‌ها برابر n_i است به صورت رابطه (۶) در یک ماتریس قرار می‌دهیم:

$$A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in_i}] \in \mathbb{R}^{m \times n_i} \quad (6)$$

حال با کنار هم قرار دادن این ماتریس‌ها، ماتریس دیکشنری A مطابق شکل ۲ و رابطه (۷) ساخته می‌شود.

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_c] \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (7)$$

که مقدار n برابر کل تعداد نمونه‌های آموزش است.

³ Over complete

¹ Face Reconnition

² Robust Face Reconnition

سیگنال ورودی و ستون وابسته است لذا هیچ رقابتی میان فعال بودن یا نبودن ستون‌ها وجود ندارد و هیچ‌گونه عامل خارجی فعالیت ستون‌ها را در نمایش تنک سیگنال y کنترل نمی‌کند.

برای بهبود عملکرد روش پیشنهادی مقاله جهت شناسایی چهره بر اساس طبقه‌بندی نمایش تنک از نرم صفر هموار شده وزن دار بهره‌مند می‌شویم و لذا راه‌کاری ارائه می‌دهیم که احتمال فعالیت هر ستون به وسیله یک وزن کنترل می‌شود.

بدین منظور تابع هزینه نرم صفر وزن دار $\|x\|_{0,w}$ به صورت رابطه زیر تقریب زده می‌شود.

$$\|x\|_{0,w} \approx \sum_{k=1}^n w_k - F_{\sigma}^w(x) \quad (12)$$

که در آن بردار $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^t$ بردار وزن‌ها نامیده شده و $w_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ هزینه‌های غیر صفر بودن ضرایب ترکیب خطی را نشان می‌دهند و همچنین تابع $F_{\sigma}^w(\cdot)$ نیز به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌گردد:

$$F_{\sigma}^w(x) = \sum_{k=1}^n w_k f_{\sigma}(x_k). \quad (13)$$

در نهایت با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$\|x\|_{0,w} \approx \sum_{k=1}^n w_k - \sum_{k=1}^n w_k f_{\sigma}(x_k).$$

در این حالت احتمال فعال بودن تمام ستون‌های A یکسان نیست و w_k ها به نوعی احتمال فعالیت اتم‌ها را مشخص می‌کنند. عملکرد w_k را می‌توان به این صورت تفسیر نمود، اگر w_k بزرگ باشد با توجه به تابع هزینه احتمال فعال بودن ستون k کم است و برعکس، اگر w_k کوچک باشد احتمال فعال بودن ستون k زیاد است. به عبارت دیگر با کمک این وزن‌ها فضای جستجوی خود را با توجه به یک سری داده قبلی محدود می‌نماییم. بدین ترتیب با تغییر w_k ها میزان فعالیت ستون‌ها در نمایش تنک سیگنال y کنترل می‌شود.

بنابراین می‌توان مسئله بهینه‌سازی نرم صفر همواره شده را به صورت زیر نمایش داد.

$$\min_x \|x\|_{0,w} \text{ s.t. } y = Ax$$

در بردار x بتوانند نمونه y را به صورت خطی به بهترین شکل بازسازی کنند. به عبارت دیگر برای انتخاب طبقه نمونه جدید، تصویر آن را در زیرفضای هر طبقه با ضرایب مربوطه‌اش در نمایش تنک، ساخته و برچسب تصویری که به بردار نمونه آزمایش نزدیک‌تر باشد را به عنوان برچسب طبقه نمونه جدید در نظر می‌گیریم که بر اساس رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$i^* = \arg \min_i \|y - A\delta_i(x)\|_2 \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) عملگر $\delta_i(0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع مشخصه^۱ نامیده شده و $\delta_i(x)$ برداری هم‌اندازه با بردار x بوده که شامل ضرایبی از بردار x است که مربوط به طبقه i ام هستند و درآیه‌های دیگر آن برابر صفر خواهد بود. رابطه (۱۱) نحوه عملکرد این عملگر را بیان می‌کند.

$$\delta_i(x) = [0, \dots, 0, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}, 0, \dots, 0]^t \quad (11)$$

الگوریتم روش طبقه‌بندی نمایش تنک SRC به صورت زیر می‌باشد.

الگوریتم ۱. روش طبقه‌بندی نمایش تنک SRC
<p>ورودی: ماتریس نمونه‌های آموزش A و داده آزمون y.</p> <p>۱- نرمالیزه کردن ستون‌های ماتریس A با تعریف نرم دو</p> <p>۲- به دست آوردن نمایش تنک داده آزمون</p> <p>۳- تعریف ماتریس δ_i برای تمام کلاس‌ها:</p> $\delta_i(x) = [0, \dots, 0, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}, 0, \dots, 0]^t \in \mathbb{R}^n$ <p>۴- محاسبه باقیمانده تخمین $r_i(y)$ برای تمام کلاس‌ها:</p> $r_i(y) = \ y - A\delta_i(x)\ _2 \quad i = 1, \dots, k$ <p>خروجی: شناسایی y بر اساس $class(y) = \min_i r_i(y)$</p>

۴. مروری بر روش نرم هموار شده وزن دار

در مسأله بهینه‌سازی P_0 رابطه (۲) تمام ستون‌های ماتریس A یکسان در نظر گرفته می‌شوند و فعال بودن ستون k ام به معنای بزرگ بودن مقدار $|x_k|$ ها می‌باشد. فعال بودن یا نبودن هر ستون به نمونه سیگنال ورودی y بستگی دارد که این موضوع به انطباق

¹ Characteristic Function

طبقه نمونه جدید از یک مرحله پیش‌پردازش یعنی روش نزدیک‌ترین زیر فضا استفاده می‌کنیم که در بخش سوم به آن اشاره شد. این راهکار منجر به آرایه الگوریتم خیلی سریع با حجم محاسبات خیلی کم می‌گردد و آن را روش طبقه‌بندی نمایش تُنک بر اساس نُرم صفر هموار شده وزن‌دار (SRC with WSL0) می‌نامیم.

روش طبقه‌بندی نمایش تُنک SRC (الگوریتم ۱) را بکار می‌بریم و در گام دوم الگوریتم جهت به دست آوردن نمایش تُنک داده آزمون، در روش پیشنهادی آرایه شده در مقاله از نُرم صفر هموار شده وزن‌دار استفاده می‌نماییم. در ادامه و در گام چهارم الگوریتم جهت محاسبه باقیمانده تخمین برای انتخاب طبقه نمونه جدید از روش نزدیک‌ترین زیر فضا بهره‌مند می‌شویم و در زیر فضای هر طبقه، ضرایب مربوطه‌اش را در نمایش تُنک بر اساس رابطه (۱۰) محاسبه و برچسب تصویری که به بردار نمونه آزمایش نزدیک‌تر باشد را به‌عنوان برچسب طبقه نمونه جدید در نظر می‌گیریم. در نهایت الگوریتم روش پیشنهادی به‌صورت زیر می‌باشد.

الگوریتم ۳. روش پیشنهادی SRC with WSL0
<p>ورودی: نمونه‌های آموزشی A_{ij} به‌صورت بردارهای ستونی دریافت و در ماتریس A قرار می‌گیرند و نمونه داده آزمون y و پارامتر نویز ε نیز به‌عنوان ورودی‌های دیگر دریافت می‌شوند.</p> <p>۱- ستون‌های ماتریس A با استفاده از نُرم دو و نمونه داده آزمون y با استفاده از فرمول زیر نرمال می‌شوند.</p> $y \leftarrow \frac{y}{\ y\ }$ <p>۲- به دست آوردن نمایش تُنک داده آزمون با استفاده از الگوریتم ۲</p> <p>۳- تعریف ماتریس δ_i برای تمام کلاس‌ها:</p> $\delta_i(x) = [0, \dots, 0, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM_i}, 0, \dots, 0]^t \in \mathbb{R}^n$ <p>۴- انتخاب طبقه نمونه جدید در زیر فضای هر طبقه با ضرایب مربوطه‌اش بر اساس رابطه (۱۰) محاسبه و برچسب تصویری که به بردار نمونه آزمایش نزدیک‌تر باشد، به‌عنوان برچسب طبقه نمونه جدید در نظر گرفته می‌شود یعنی برچسب طبقه y را با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود.</p> $r_i(y) = \ y - A\delta_i(x)\ _2 \quad i = 1, \dots, k$ <p>خروجی: شناسایی y بر اساس $class(y) = \min_i r_i(y)$</p>

در این بخش جهت بررسی روش پیشنهادی در شناسایی چهره از دو پایگاه داده معروف [۲۱] ORL و [۲۲] AR استفاده و عملکرد روش با سه الگوریتم معروف SRC with MP، SRC with

یا

$$\max_x F_\sigma^W \quad s.t \quad y = Ax$$

که در کاربردهای عملی و در معرض نویز و خطاهای اندازه‌گیری به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند که در آن $\varepsilon > 0$ حد بالایی برای نویز است.

$$\min_x \|x\|_{0,W} \quad s.t \quad \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon$$

یا

$$\max_x F_\sigma^W \quad s.t \quad \|y - Ax\|_2 \leq \varepsilon$$

الگوریتم نرم صفر هموار شده وزن‌دار به‌صورت الگوریتم ۲ است.

الگوریتم ۲. روش نرم صفر هموار شده وزن‌دار WSL0

مقداردهی اولیه:

(۱) مقدار اولیه بردار x را برابر $x = W^{-1}A^t(AW^{-1}A^t)^{-1}y$ قرار

دهید که در آن $W = \text{diag}\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ است.

(۲) یک دنباله کاهش مناسب از مقادیر σ انتخاب کنید.

(۳) یک مقدار مناسب برای μ انتخاب کنید.

تکرار مراحل زیر به ازای $k = 1, 2, \dots, K$

(۱) قرار دهید $\sigma = \sigma_k$

(۲) با تکرار L مرتبه الگوریتم سریع‌ترین رشد، مقدار حداکثرکننده تابع

$F_\sigma^W(x)$ را بیابید و این پاسخ را بر روی مجموعه پاسخ‌های معادله

$y = Ax$ تصویر کنید.

• مقداردهی اولیه $x = \hat{x}_{k-1}$

• L مرتبه تکرار مراحل زیر به ازای: $l = 1, 2, \dots, L$

- قرار دهید:

$$\nabla F_\sigma^W(x) = -\frac{1}{\sigma^2} [w_1 x_1 e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}}, \dots, w_n x_n e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}}]^t$$

- بردار x را به‌روز کنید:

$$x \leftarrow x + \mu \sigma^2 \nabla F_\sigma^W(x)$$

- در حالت نویزی اگر $\|y - Ax\|_2 > \varepsilon$ باشد، بردار x را بر مجموعه

χ تصویر کنید:

$$x \leftarrow x - A^t(AA^t)^{-1}(x - A^t y)$$

• قرار دهید: $\hat{x}_k = x$

پاسخ نهایی برابر با $\hat{x} = x_k$ است.

۵. روش پیشنهادی و نتایج عددی

در الگوریتم SL0 به دلایلی مانند دقیق نبودن مدل یا وجود نویز امکان گیر افتادن در مینیمم‌های محلی و نرسیدن به جواب مطلوب در جهت به دست آوردن نمایش تُنک وجود دارد.

برای رفع این مشکلات، در روش پیشنهادی جهت یافتن تنک‌ترین پاسخ x از روش حداقل سازی نرم صفر هموار شده وزن‌دار بهره می‌بریم و پس از یافتن آن برای انتخاب برچسب

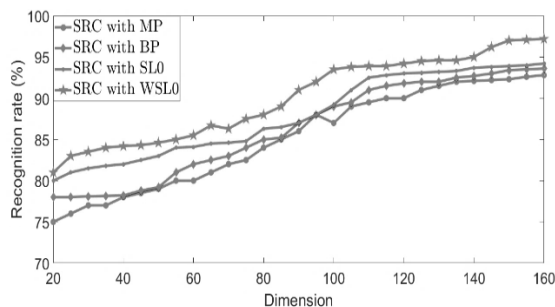
برای محاسبه نرخ شناسایی^۱ از فرمول زیر بهره‌مند می‌شویم.

$$\text{Recognition rate} = \frac{\text{size}(\text{test labels} = \text{predicted labels})}{\text{size}(\text{test labels})}$$

که در آن منظور از test labels برچسب داده‌های آزمون و predicted labels برچسب داده‌های پیش‌بینی شده جهت شناسایی می‌باشد که در پایگاه داده ORL، هر دو بردار ۴۰۰ تایی می‌باشند و مقادیر درآیه‌های آن‌ها اعداد ۱ تا ۴۰ است. برای محاسبه نرخ شناسایی ابتدا درایه‌هایی که هر دو بردار test labels و predicted labels با یکدیگر یکسان باشند محاسبه و تعداد درآیه‌های محاسبه شده یکسان بر تعداد درآیه‌های بردار test labels تقسیم می‌شود و در نهایت مقدار نرخ شناسایی، عددی بین صفر و یک خواهد بود.

به عنوان مثال اگر دو بردار test labels و predicted labels در ۳۸۳ درآیه برابر باشند میزان نرخ شناسایی برابر $\frac{383}{400} = 0.9575$ معادل ۹۵/۷۵ درصد خواهد بود.

با توجه به محدودیت حافظه RAM رایانه، تصاویر کلاس‌ها را با ابعاد ۳۲ در ۳۲ پیکسل تغییر دادیم و آزمایش بر روی تصاویر ۱۰۰ بار تکرار و متوسط نرخ شناسایی نسبت به تغییر ابعاد شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل (۴). متوسط نرخ شناسایی ۱۰۰ تکرار نسبت به تغییر ابعاد جهت شناسایی چهره در پایگاه ORL

همان‌طور که از شکل ۴ مشخص است، الگوریتم روش پیشنهادی (SRC with WSL0) مستقل از تغییر ابعاد عملکرد بهتری در مقایسه با سه الگوریتم دیگر به دست آورده و همیشه بهتر از آن‌ها عمل کرده است.

جدول ۱ بیشترین مقدار نرخ شناسایی متوسط متناظر با هر یک از روش‌های شناسایی را در طول ۱۰۰ تکرار نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که الگوریتم روش پیشنهادی به بالاترین نرخ شناسایی یعنی ۹۷/۲ درصد رسیده است.

جدول (۱). بیشترین مقدار نرخ متوسط شناسایی روش‌های مختلف برای پایگاه داده ORL در طول ۱۰۰ بار اجرا

الگوریتم				درصد نرخ شناسایی
WSL0	SL0	BP	MP	

BP و SRC with SL0 مقایسه می‌شود. تمام شبیه‌سازی‌های انجام‌شده در نرم‌افزار MATLAB روی سیستم با مشخصات

Core i5-6200U, 2.3 GHz processor with 8GB of RAM

پایاده‌سازی شده است.

آزمایش اول: آزمون بر روی پایگاه داده ORL

پایگاه داده چهره ORL شامل ۴۰۰ تصویر از ۴۰ فرد مختلف یعنی به ازای هر فرد ۱۰ تصویر می‌باشد که تصاویر در زمان‌های مختلف گرفته شده‌اند و شامل حالت‌ها مختلفی از چهره فرد مانند چشمان باز و بسته، در حال خنده و یا اخم و جزئیات دیگر چهره مانند با عینک و بدون عینک می‌باشد. همچنین این تصاویر در یک محدوده چرخش و پیچش زاویه صورت تا ۲۰ درجه گرفته شده‌اند. با پشت سر هم قرار دادن ستون‌های هر تصویر یک سطر از ماتریس تصویر این پایگاه داده ساخته می‌شود.

بنابراین ماتریس تصاویر پایگاه داده ORL یک ماتریس ۴۰۰ در ۱۰۲۴ است که در آن هر سطر معادل یک تصویر و هر ستون معادل یک پیکسل از تصاویر مختلف می‌باشد.

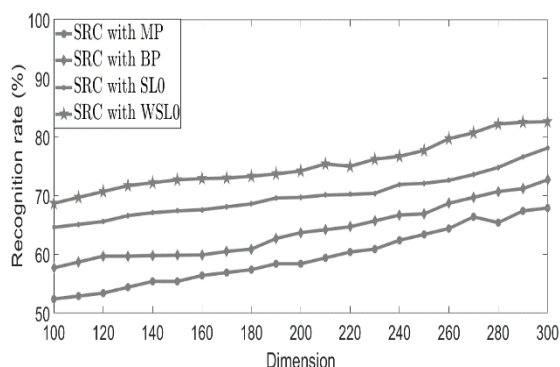
اندازه هر تصویر این پایگاه داده برابر ۱۱۲ در ۹۲ پیکسل می‌باشد که در شکل ۳ تصویر نمونه از یک شخص نشان داده شده است.



شکل (۳). نمونه تصویر یک فرد از پایگاه داده ORL [۲۱]

به‌منظور آزمون، برای هر کلاس، نصف تصاویر را به‌طور تصادفی به‌عنوان نمونه‌های آموزش انتخاب و مابقی را برای آزمون استفاده می‌کنیم، لذا در اینجا به دلیل محدودیت زمانی در شبیه‌سازی از میان نمونه‌های آزمون، از هر کلاس ۱۰ نمونه آزمون به‌طور تصادفی انتخاب که پنج تصویر از هر شخص برای آموزش و پنج تصویر باقیمانده به‌منظور آزمون انتخاب شدند. از آنجا که ماتریس تصاویر پایگاه داده ORL یک ماتریس ۴۰۰ در ۱۰۲۴ می‌باشد و تصاویر از ۴۰ نفر مختلف و به ازای هر نفر ۱۰ تصویر را شامل می‌شود بدیهی است که برچسب کلاس‌ها بردار ۴۰ تایی با مقادیر اعداد صحیح ۱ تا ۴۰ (به ازای ۴۰ نفر مختلف) می‌باشد.

^۱ Recognition rate



شکل (۶). متوسط نرخ شناسایی ۱۰۰ تکرار نسبت به تغییر ابعاد جهت شناسایی چهره در پایگاه AR

در جدول ۳ بیشترین مقدار نرخ شناسایی متوسط متناظر با هر یک از روش‌های شناسایی در طول ۱۰۰ تکرار نشان داده می‌شود. از این جدول نیز مشاهده می‌شود که بالاترین نرخ شناسایی به الگوریتم روش پیشنهادی تعلق دارد. از شکل ۶ هم می‌توان دید که روش پیشنهادی نسبت به سه الگوریتم دیگر مستقل از تغییر ابعاد عملکرد بهتری داشته است.

جدول (۳). بیشترین مقدار نرخ متوسط شناسایی روش‌های مختلف برای پایگاه داده AR در طول ۱۰۰ بار اجرا

درصد نرخ شناسایی	الگوریتم			
	WSLO	SLO	BP	MP
	۸۶/۹	۸۴/۲	۸۳/۷	۸۲/۲

در جدول ۴ زمان صرف شده توسط CPU بر حسب ثانیه را برای هر یک از الگوریتم‌ها نشان داده شده است. لازم به ذکر است که این جدول مربوط به زمان اجرای روش‌های مختلف در پایگاه داده چهره AR می‌باشد. از بررسی نتایج حاصل از جدول ۴ مشخص می‌گردد که سرعت روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها بیشتر است.

جدول (۴). زمان اجرای روش‌ها در پایگاه داده چهره AR

ابعاد ویژگی	الگوریتم			
	WSLO	SLO	BP	MP
۵۰	۰,۰۹	۰,۲۹	۶,۵۳	۶,۴۸
۱۰۰	۰,۱۸	۰,۴۵	۷,۳۶	۷,۲۹
۲۰۰	۰,۲۴	۰,۹۳	۸,۷۶	۸,۶۷
۳۰۰	۰,۳۸	۱,۸	۹,۴۲	۹,۳۷

۹۶/۲	۹۴/۲	۹۳/۶	۹۲/۸
------	------	------	------

جهت بررسی پیچیدگی محاسباتی و زمان اجرای روش پیشنهادی در پایگاه داده چهره ORL، جدول ۲ زمان صرف شده توسط CPU بر حسب ثانیه را برای هر یک از الگوریتم‌ها نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که روش پیشنهادی، یک الگوریتم بسیار سریع با حجم محاسبات کم نسبت به سایر روش‌ها می‌باشد.

جدول (۲). زمان اجرای روش‌ها در پایگاه داده چهره ORL

ابعاد ویژگی	الگوریتم			
	WSLO	SLO	BP	MP
۴۰	۰,۰۷	۰,۲۴	۵,۷۱	۵,۶۷
۸۰	۰,۱۴	۰,۳۱	۶,۸۲	۶,۷۹
۱۲۰	۰,۱۹	۰,۶۷	۷,۸۳	۷,۷۶
۱۶۰	۰,۲۲	۰,۸۲	۸,۴۳	۸,۳۷

آزمایش دوم: آزمون بر روی پایگاه داده AR

آزمون بر روی پایگاه داده چهره AR، این پایگاه داده شامل ۴۰۰۰ تصویر چهره رنگی از ۱۲۶ نفر می‌باشد که شامل ۲۶ تصویر از روبروی چهره با حالت‌های چهره مختلف و شرایط نوری مختلف می‌باشد. تصاویر ۱۲۰ نفر در دو بازه زمانی (با ۱۴ روز فاصله) و در هر بازه شامل ۱۳ تصویر رنگی می‌باشد. ۱۴ تصویر چهره (شامل ۷ تصویر از هر بازه زمانی) از این ۱۲۰ نفر برای آزمون در نظر گرفته شدند و سپس تصاویر رنگی به تصاویر خاکستری تبدیل شدند. شکل ۵ یک نمونه تصویر از یک شخص را از این پایگاه داده را نشان می‌دهد.



شکل (۵). نمونه تصویر یک فرد از پایگاه داده AR [۲۲]

در این آزمایش نیز با توجه به محدودیت حافظه RAM رایانه، تصاویر کلاس‌ها را به ابعاد ۶۴ در ۶۴ پیکسل تغییر و آزمایش بر روی تصاویر ۱۰۰ بار تکرار شد. شکل ۶ متوسط نرخ شناسایی نسبت به تغییر ابعاد را نشان می‌دهد.

۶. نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا نمایش تنک و دستگاه معادلات خطی آن بررسی شد و در ادامه با طبقه بندی نمایش تنک SRC آشنا شدیم. ایده مقاله در بکارگیری الگوریتم روش طبقه بندی نمایش تنک جهت یافتن تنک ترین پاسخ با استفاده از روش حداقل سازی نرم صفر هموار شده وزن دار بود که برای افزایش سرعت الگوریتم و کاهش حجم محاسبات، پس از یافتن تنک ترین پاسخ و جهت انتخاب برچسب طبقه نمونه جدید از یک مرحله پیش پردازش به نام روش نزدیک ترین زیر فضا استفاده کردیم و روش پیشنهادی برای شناسایی چهره را طبقه بندی نمایش تنک بر اساس نرم صفر هموار شده وزن دار (SRC with WSL0) نامیدیم.

در نهایت جهت بررسی عملکرد روش پیشنهادی در شناسایی چهره، مجموعه ای از آزمایش های گسترده بر روی پایگاه داده ORL و AR در ابعاد مختلف انجام شد و نشان داده شد که در همه موارد روش پیشنهادی از الگوریتم های معرفی شده در این زمینه بهتر عمل می کند.

۷. مراجع

- Speech and Signal Processing (ICASSP), IEEE International Conference on. 2012, DOI: 10.1109/ICASSP.2012.6288652.
- [10] D. L. Donoho, "For most large underdetermined systems of linear equation the minimal ℓ_1 norm solution is also the sparsest solution," Tech. Rep, 2004, DOI: 10.1002/cpa.20132.
- [11] M. Malek-Mohammadi, M. Jansson, A. Owrang, A. Koochakzadeh, and M. Babaie-Zadeh, "DOA estimation in partially correlated noise using low-rank/sparse matrix decomposition," in IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, pp. 373–376, 2014, DOI: 10.1109/SAM.2014.6882419.
- [12] D. L. Donoho, and M. Elad, "Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization," Proc of the National Academy of Sciences vol. 100, 2003, DOI: 10.1073/pnas.0437847100
- [13] M. S. Alamdari, M. Fatemi and A. Ghaffari, "A Modified Sequential Quadratic Programming Method for Sparse Signal Recovery Problems," Signal Processing, 2023, DOI: 10.1016/j.sigpro.2023.108955.
- [14] M. S. Alamdari, M. Fatemi, A. Ghaffari, "The Recovery of Sparse Signals by Sequential Quadratic Programming Approach," Journal of Operational Research and Its Applications, pp. 19–32, 2023, DOI: 10.21018/jamlu.2023.1932.21.
- [15] M. Elad, "Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing," Springer Science and Business Media, 2010, DOI: 10.1007/978-1-4419.
- [16] D. L. Donoho, M. Elad, and V. Temlyakov, "Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise," IEEE Trans. Info. Theory, vol. 52, no. 1, pp. 6–18, 2006, DOI: 10.1109/TIT.2005.860430.
- [17] K. Huang, and S. Aviyente, "Sparse representation for signal classification," in Advances in neural information processing systems. 2006.
- [18] M. S. Alamdari and M. Fatemi, "Presenting a new method to separate fetal heart signals from the mother by using sequential quadratic programming," Journal of Advanced Mathematical Modeling, pp. 153–167, 2023, DOI: 10.22055/jamm.2023.43652.2157.
- [19] M. Shahrezaee and M. S. Alamdari, "The Application of Numerical Analysis Techniques to Pattern Recognition of Helicopters by Area Method, Journal of Mathematical Research," pp. 51–60, 2015, DOI: 10.29252/mmr.1.2.51.
- [20] M. S. Alamdari, "Providing an optimal mathematical model based on sparse display to improve image reconstruction," Journal of New Researches in Mathematics, 2023, DOI: 10.30495/jnrm.2023.73817.2426.
- [21] F. Samaria, and A. Harter, "Parameterisation of a stochastic model for human face identification," In Second IEEE workshop on applications of computer vision, Sarasota, 1994.
- [22] A. Martinez, and R. Benavente, "The AR face database. In: CVC technical report, no. 24, 1998.
- [23] H. Khosravi, A. Ghaffari, and J. Vahidi, "Face recognition via weighted non-negative sparse representation," International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, vol. 12, no. 2, pp. 1141–1150, 2021.
- [24] H. Motameni, "Face recognition using sparse representations and p-laplacian," Journal of Advances in Computer Research, vol. 10, no. 4, pp. 37–49, 2019.
- [1] K. R. Kakkirala, S. R. Chalamala, and S. Jami, "Thermal Infrared Face Recognition: A review," UKSim-AMSS 19th International Conference on Modelling & Simulation, pp. 55–60, 2017, DOI:10.1109/UKSim.2017.38
- [2] J. Wright, A. Y. Yang, A. Ganesh, S. S. Sastry, and Yi Ma, "Robust face recognition via sparse representation," IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, no. 2, pp. 210–227, February 2009, DOI: 10.1109/TPAMI.2008.79.
- [3] K. Awedat, A. Essa, and V. Asari, "Sparse Representation Classification Based Linear Integration of ℓ_1 -norm and ℓ_2 -norm for Robust Face Recognition," presented at the Electro Information Technology (EIT), IEEE International Conference on, Lincoln, NE, USA, 2017, DOI:10.1109/EIT.2017.8053403.
- [4] T. Liu, J. X. Mi, Y. Liu, and C. Li, "Robust face recognition via sparse boosting representation," Neurocomputing, vol. 214, pp. 944–957, 2016, DOI:10.1016/j.neucom.2016.06.071.
- [5] W. Jinming, and L. Haifeng, "Binary sparse signal recovery with binary matching pursuit," Inverse Problems., vol. 37, no. 6, pp. 14–65, 2021, DOI: 10.1088/1361-6420/abf903.
- [6] R. Liu, M. Shu, and C. Chen, "ECG Signal Denoising and Reconstruction Based on Basis Pursuit," Applied Sciences 11, no. 4, 2021, DOI:10.3390/app11041591.
- [7] A. Wan, "Uniform RIP Conditions for Recovery of Sparse Signals by ℓ_p ($0 < p \leq 1$) Minimization," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 68, pp. 5379–5394, 2020, DOI:10.1109/TSP.2020.3022822.
- [8] H. Mohimani, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten, "A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ_0 norm," IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, no. 1, pp. 289–301, 2009, DOI: 10.1109/TSP.2008.2007606.
- [9] Babaie-Zadeh, M., B. Mehrdad, and G.B. Giannakis, "Weighted sparse signal decomposition. in Acoustics,"