مکانیک هوافضا/ سال ۱۴۰۲/ دوره ۱۹/ شماره ۱/ صفحه ۱۲۳-۱۳۵

نشریه علمی مکانیک هوافضا

DOR: 20.1001.1.26455323.1402.19.1.9.4

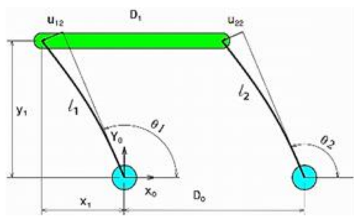
وارونگی پایدار برای کنترل پیش‌خور ربات‌های انعطاف‌پذیر همکار

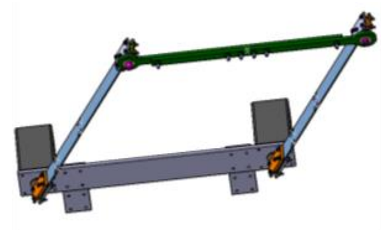
هادی دارابی[۱]، محمدرضا الهامی[۲*]

[۱] دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

[۲] دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

چکیده گرافیکی





برجسته‌ها

- ضرایب لاگرانژ در سیستم‌های مقید نشان معرف نیروهای داخلی هستند؛ و با تنظیم آن‌ها نیروهای داخلی کنترل می‌شوند.
- قید نامساوی به‌عنوان قیود مسئله کمینه‌سازی، برای همگرایی به پاسخ صحیح واردشده است.

چکیده

در این مقاله، حل دینامیک معکوس برای کنترل پیش‌خور ربات‌های انعطاف‌پذیر همکار بررسی می‌شود. دینامیک داخلی ربات‌های انعطاف‌پذیر ناپایدار است و برای به دست آوردن یک حل کران‌دار مسئله دینامیک معکوس از روش بهینه‌سازی غیرخطی مقید استفاده‌شده است. در روش بهینه‌سازی، هدف کمینه کردن انرژی الاستیک بازوها باوجود قیدهای متعدد است این قیدها شامل: ۱) معادلات دینامیکی؛ ۲) معادلات مسیر حرکت و نیرو؛ ۳) قیدهای سینماتیکی محدودکننده حرکت ربات‌ها؛ ۴) قیدهای مربوط به متغیرهای اضافی و ۵) قیدهای روش α تعمیم‌یافته برای پایداری حل است. روش مورداستفاده برای مدل‌سازی دینامیکی بر اساس معادله لاگرانژ و گسسته‌سازی به روش اجزای محدود است. از ضرایب لاگرانژ برای کنترل نیروهای داخلی اعمالی به باربری مفید استفاده‌شده است و برای جلوگیری از تغییر جهت در کنترل نیرو یک قید نامساوی به مجموعه قیدهای بهینه‌سازی اضافه‌شده است. این روش روی ربات‌های تک لینکی انعطاف‌پذیر همکار، پیاده‌سازی شده است و توانایی کنترل مسیر بار و نیروی اعمالی به آن را دارد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: علمی پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۲

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۸/۱۳

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۱۷

ارائه برخط: ۱۴۰۱/۰۹/۲۱

*نویسنده مسئول:

melhami@ihu.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

ربات انعطاف‌پذیر

اجزای محدود

روش لاگرانژ

وارونگی پایدار

روش α تعمیم‌یافته

۱- مقدمه

به دلیل کاهش وزن و سفتی، ربات‌های انعطاف‌پذیر سریع‌تر، ایمن‌تر و کارآمدتر از ربات‌های صلب هستند. با افزایش نسبت بار حمل شده به وزن ربات، سرعت حرکت و پهنای باند کنترل، انعطاف‌پذیری بازوی رباتیک بیشتر نمایان می‌شود. انعطاف‌پذیری، باعث ایجاد خطای حالت ماندگار، خطا در ردیابی مسیر و ارتعاشات در مجری نهایی ربات می‌شود. به همین دلیل تغییر شکل الاستیک اعضا باید در حین حرکت کنترل شود، استراتژی‌های کنترل ربات‌های انعطاف‌پذیر معمولاً شامل کنترل پیش‌خور[1] که سیگنال کنترلی حلقه باز برای تعقیب مسیر را ایجاد می‌کند و سیگنال کنترل پس‌خور[2] که اختلالات و عدم قطعیت‌های مدل را جبران می‌کند [۱].

مهم‌ترین روش‌های کنترل پیش‌خور برای ربات‌های انعطاف‌پذیر شامل: شکل‌دهی ورودی [۲ و ۳]، فیلتر گشتاور ورودی [۴] و دینامیک معکوس است. روش‌های شکل‌دهی ورودی و فیلتر گشتاور ورودی برای سیستم‌های خطی طراحی‌شده‌اند. برای سیستم‌های غیرخطی که فرکانس طبیعی با تغییر حالت سیستم، تغییر می‌کند، می‌تواند اشکال ایجاد کند. همچنین، از آن‌ها بیشتر برای کنترل نقطه‌به‌نقطه و کمتر در ردیابی مسیر استفاده می‌شود [۵]. روش دینامیک معکوس توانایی کنترل مسیر در سیستم‌های غیرخطی را دارد.

به دلیل ماهیت پیوسته اعضای ربات انعطاف‌پذیر، برای مدل‌سازی دینامیکی از روش‌های گسسته‌سازی مختلف برای تقریب اعضای پیوسته استفاده می‌شود. مهم‌ترین این روش‌ها شامل روش مدهای فرضی[3]، روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود[4] و روش توده پارامتر[5] است[۶]. روش اجزای محدود نسبت به سایر روش‌ها دقیق‌تر اما دارای بار محاسباتی بیشتر است[۷]. همچنین در روش اجزا محدود، قیدهای سینماتیکی را ساده‌تر می‌توان به سیستم اعمال کرد. این قیدها معمولاً به دلیل تعامل با محیط و یا همکاری ربات‌ها و ایجاد زنجیره بسته سینماتیکی به مسئله وارد می‌شود. مسئله دینامیک معکوس برای ربات‌های انعطاف‌پذیر به محاسبه نیروها و گشتاورهای لازم برای تولید یک حرکت مشخص در عملگر نهایی، به‌صورت تابعی از زمان گفته می‌شود.

دینامیک داخلی به‌عنوان دینامیک باقی‌مانده و ظاهرنشده یک سیستم وقتی‌که خروجی سیستم تعیین‌شده باشد تعریف می‌شود و این دینامیک داخلی به خاطر اینکه ورودی و خروجی سیستم در یک مکان تجمیع نشده[6] است. برخلاف ساختارهای صلب ایده‌آل که در آن‌ها سرعت انتشار موج نامحدود است، یعنی اثر نیرو به‌طور لحظه‌ای ازیک‌طرف ساختار به سر دیگر منتقل می‌شود، سرعت انتشار موج در ساختارهای انعطاف‌پذیر محدود است. درنتیجه، هرچه ساختار انعطاف‌پذیرتر باشد، تأخیر بین فعال شدن بازو و حرکت عملگر نهایی بیشتر است. این منجر به تأخیر فاز در پاسخ سیستم می‌شود که می‌تواند کنترل سیستم را ناپایدار کند. بسته به اهمیت تأخیر فاز، دینامیک داخل سیستم می تواند مینیمم فاز[7] یا غیر مینیمم فاز[8] باشد، در سیستم مینیمم فاز، دینامیک داخلی سیستم پایدار است، در سیستم غیر مینیمم فاز، دینامیک داخلی ناپایدار است. این ویژگی‌ها بر طراحی کنترلر سیستم حلقه باز تأثیر زیادی دارد. رفتار غیر مینیمم فاز زمانی اتفاق می‌افتد که از محرک‌های مفاصل برای کنترل عملگر نهایی یک ربات انعطاف‌پذیر [۸] یا یک ربات با مفاصل غیرفعال [۹] استفاده شود. تجزیه‌وتحلیل پایداری دینامیک داخلی در سیستم‌های غیرخطی، در عمل، محدود به بررسی دینامیک صفر سیستم خطی شده است [۱۰] و به‌عنوان دینامیک باقیمانده وقتی‌که خروجی‌ها در یک نقطه تعادل ثابت نگه‌داشته شوند، تعریف می‌شود.

سیستم‌های مینیمم فاز، دینامیک داخلی پایدار دارند و دینامیک معکوس را می‌توان با انتگرال‌گیری روبه‌جلو در زمان حل کرد. ولی ربات‌های انعطاف‌پذیر سیستم‌هایی با دینامیک داخلی ناپایدار هستند؛ و انتگرال‌گیری روبه‌جلو در زمان به حل بی‌کران منجر می‌شود [۱۱]. برای به دست

[1] Feedforward
[2] Feedback
[3] Assumed Mode Method
[4] Finite Difference
[5] Lumped Parameter Method
[6] Non-Collocated
[7] Minimum Phase
[8] Non-Minimum Phase

آوردن یک حل کران‌دار برای سیستم‌هایی با دینامیک داخلی ناپایدار، از روش‌های وارونگی پایدار استفاده می‌شود. اولین روش وارونگی پایدار توسط دواسیا و چن ارائه شد و شامل ترکیبی از انتگرال‌گیری زمانی روبه‌جلو و عقب معادله دینامیک داخلی است که به یک راه‌حل غیر سببی[1] منجر می‌شود این بدان معناست که ورودی‌های کنترل باید قبل از شروع مسیر اعمال شود و پس از پایان مسیر هم ادامه داشته باشد. با انتخاب متغیر مستقل مناسب و فرمول‌بندی مجدد می‌توان DAE را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد؛ که با استفاده از روش پارتیشن‌بندی مختصات انجام‌شده است [۱۲]. سپس، شکل نرمال ورودی- خروجی[2] را می‌توان همان‌طور که سیفراید نشان داده است استخراج کرد [۱۳]. بااین‌حال، به دست آوردن فرم نرمال ورودی-خروجی یک فرآیند نسبتاً پیچیده تحلیلی به نظر می‌رسد. ازنظر مهندسی، تعریف روش وارونگی پایدار به‌طور مستقیم بر اساس فرم DAE معادلات بسیار ساده‌تر است تا بتوان از کدهای مدل‌سازی چندجسمی[3] استاندارد استفاده کرد.

بورولس و همکاران، یک روش وارونگی پایدار DAE برای سیستم‌های چندجسمی انعطاف‌پذیر پیشنهاد کرده‌اند [۱]. این روش معادل روش وارونگی پایدار محلی است اما در این روش به دست آوردن، شکل نرمال ورودی-خروجی لازم نیست. به همین دلیل، می‌توان آن را به‌راحتی در نرم‌افزارهای شبیه‌سازی استاندارد برای سیستم‌های چندجسمی توسعه داد. این روش منجر به مسئله DAE مقدار مرزی دونقطه‌ای می‌شود که نیاز به تعریف صحیح شرایط مرزی بر اساس تجزیه‌وتحلیل منیفولدهای پایدار و ناپایدار در تنظیم DAE دارد. سپس مسئله حاصل را می‌توان با استفاده از حل‌کننده DAE برای مسائل مقدار مرزی به‌صورت عددی حل کرد.

باستوس و همکاران، یک روش جایگزین مبتنی بر روش بهینه‌سازی مستقیم برای به دست آوردن حل کران‌دار مسئله دینامیک معکوس، بدون نیاز به شرایط مرزی پیشنهاد داده‌اند [۱۴] که اجرای این استراتژی ساده‌تر است. زیرا از تجزیه‌وتحلیل منیفولدهای پایدار و ناپایدار، که در تنظیمات DAE یک گام مهم است، جلوگیری می‌کند. این مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به‌طور معادل برای شکل نرمال ورودی-خروجی [۱۵] یا برای فرم DAE تعریف کرد. تیلر و لی مسئله دینامیک معکوس را به‌عنوان یک مسئله مقدار مرزی فرمول‌بندی کردند، به‌طوری‌که اگر دینامیک داخلی ناپایدار باشد، می‌توان یک راه‌حل محدود پیدا کند [۱۶]. موریسون و همکاران مسئله دینامیک معکوس را به‌عنوان یک مسئله کنترل بهینه DAE فرموله کردند. آن‌ها تابع هدف را برای به حداقل رساندن دامنه دینامیک داخلی در طول مسیر، تعریف کردند. و مسئله مقدار مرزی با استفاده از روش شوتینگ چندگانه[4] حل‌شده است [۱۷]. این روش به دلیل استحکام، کارایی محاسباتی و توانایی برای مقابله با مشکلات ناپایداری، شناخته‌شده است [۱۸]. این روش همچنین برای پردازش موازی مناسب است. بازه زمانی به تعدادی زیر بازه کوچک‌تر تقسیم می‌شود و برای هر زیر بازه، دینامیک معکوس در فرم DAE با ادغام زمان روبه‌جلو محاسبه می‌شود. این ادغام را می‌توان حتی اگر دینامیک داخلی ناپایدار باشد، انجام داد، مشروط بر اینکه فواصل فرعی شوتینگ به‌اندازه کافی کوچک باشند تا از ناپایداری راه‌حل جلوگیری شود.

در این مقاله، به مسئله دینامیک معکوس برای بازوهای انعطاف‌پذیری همکار پرداخته می‌شود. این مسئله با دینامیک معکوس ربات‌های سری به‌طور قابل‌توجهی متفاوت است به این دلیل که با همکاری ربات‌ها، زنجیره سینماتیکی بسته می‌شود؛ و قیدهای سینماتیکی و ضرایب لاگرانژ در مسئله وارد می‌شود. ضرایب لاگرانژ در قیدهای سینماتیکی نشان‌دهنده نیروهای اعمالی به جسم مشترک است و با کنترل و تنظیم آن‌ها می‌توان نیروهای داخلی را کنترل کرد علاوه بر قیدهای حاکم بر مسئله از قیدهای تساوی و نامساوی اضافی برای کنترل نیروهای داخلی استفاده‌شده است. برای بررسی صحت حل دینامیک معکوس، با گشتاورهای محاسبه‌شده از حل آن، دینامیک مستقیم شبیه‌سازی‌شده است و مسیر خروجی حل دینامیک مستقیم با مسیر مطلوب دینامیک یکسان هستند.

---

[1] Noncausal
[2] Input-Output Normal Form
[3] Multibody
[4] Multiple Shooting

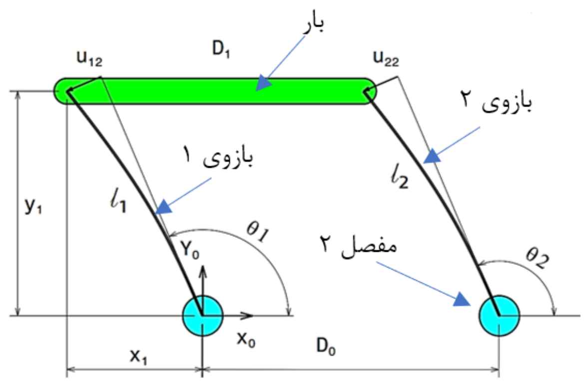
۲- دینامیک بازوهای تک لینکی انعطاف‌پذیر همکار

سیستم بررسی‌شده به‌صورت دو بازوی همکار مطابق با شکل **۱** در نظر گرفته‌شده است. سیستم از دو بازوی تک لینکی انعطاف‌پذیر تشکیل‌شده که هر یک از بازوها، در نقطه انتهایی به بار صلب، به‌صورت لولایی متصل شده است. سیستم به‌صورت صفحه‌ای و هر یک از اجزا به‌صورت تیر اویلر-برنولی مدل شده است هر عضو آزادانه می‌تواند در صفحه خم شود اما در جهت عمود بر صفحه نمی‌تواند خم نمی‌شود. در لولاها توپی شامل موتور و گیربکس، قرار دارد. شکل کلی معادلات دینامیکی سیستمی از ربات‌های انعطاف‌پذیر، باوجود قیدهای سینماتیکی به‌صورت معادله (۱) نشان داده می‌شود [۱۹].

$$M(q)\ddot{q} + g(q,\dot{q};t) + B^T\lambda = Au \qquad \text{(۱-الف)}$$

$$\Phi(q) = 0 \qquad \text{(۱-ب)}$$

که در آن q بردار مختصات تعمیم‌یافته، M ماتریس جرم، g بردار نیروهای حاصل از گرانش و گریز از مرکز، کوریولیس و سفتی است. Φ برداری شامل m قید سینماتیکی، λ برداری شامل m ضریب لاگرانژ و $B = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q}$ ماتریس گرادیان قیدها است. ماتریس A ورودهایی کنترلی u را در جهت مختصات سیستم توزیع می‌کند.



شکل (۱): دو بازوی تک لینکی همکار.

قیدهای سینماتیکی به خاطر تعامل با محیط، همکاری بین ربات‌ها و در مسئله وارد می‌شود. در مسئله دینامیک مستقیم با داشتن u در معادله (۱) خروجی سیستم $y(q)$ را می‌توان با انتگرال‌گیری روبه‌جلو در زمان به دست آورد. در مسئاله دینامیک معکوس با داشتن $y_d(t)$ به‌صورت تابعی از زمان به دنبال محاسبه u هستیم و قید مسیر به‌صورت تابعی از زمان باید در هرلحظه ارضا شود:

$$y(q) - y_d(t) = 0 \qquad (۲)$$

که در آن $y(q)$ خروجی سیستم و تابعی از q است و $y_d(t)$ مسیر دلخواه هموار است که در یک بازه زمانی محدود $[t_0, t_f]$ تعریف می‌شود. معادله (۱-ب) و (۲) به‌صورت معادلات جبری هستند و باوجود معادلات جبری فرم معادلات از ODE به DAE تغییر می‌کند. قید سینماتیکی حاکم بر مسئله ثابت بودن فاصله دونقطه انتهایی بازوها است. که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_1^2 - (X_1 - X_2)^2 - (Y_1 - Y_2)^2 = 0 \qquad \text{(۳-الف)}$$

$$X_1 = l_1\cos(\theta_1) - u_{12}\sin(\theta_1) \qquad \text{(۳-ب)}$$

$$Y_1 = l_1\sin(\theta_1) + u_{12}\cos(\theta_1) \qquad \text{(۳-پ)}$$

$$X_2 = D_0 + l_2\cos(\theta_2) - u_{22}\sin(\theta_2) \qquad \text{(۳-ت)}$$

$$Y_2 = l_2\sin(\theta_2) + u_{22}\cos(\theta_2) \qquad \text{(۳-ث)}$$

که در آن‌ها θ_1 زاویه مفصل بازوی ۱، u_{12} خمش خطی و v_{12} خمش زاویه‌ای نقطه انتهایی بازوی ۱ مطابق شکل **۱** است و θ_2, u_{22}, v_{22} مختصات بازوی ۲ می‌باشد. همچنین مختصات X_1 و Y_1 برای توصیف موقعیت انتهای بازوی ۱ استفاده‌شده و X_2 و Y_2 مختصات انتهای بازوی ۲ است. مختصات توصیف سینماتیکی بازوهای همکار به‌صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$q = [\theta_1, u_{12}, v_{12}, \theta_2, u_{22}, v_{22}, X_1, Y_1, X_2, Y_2]^T \qquad (۴)$$

برای توصیف موقعیت سیستم شش متغیر اول در معادله (۴) کافی است X_1, Y_1, X_2, Y_2 و مختصات اضافی هستند که به ازای هر یک از آن‌ها یک معادله قید وجود دارد. با مشتق‌گیری از رابطه (۳) نسبت به متغیرهای معادله (۴) ماتریس ژاکوبی قیدهای سینماتیکی B^T به دست می‌آید.

به ازای هر یک از معادلات (۳) یک ضریب لاگرانژ و مجموعاً پنج ضریب لاگرانژ وجود دارد.

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]^T \qquad (۵)$$

ضریب لاگرانژ نشان‌دهنده نیروهای قیدی هستند.

$$\lambda_2 = F_{X1};\ \lambda_3 = F_{Y1};\ \lambda_4 = F_{X2};\ \lambda_5 = F_{Y2}; \qquad (۶)$$

برای به دست آوردن معادلات دینامیکی ماتریس‌های جرم، سفتی، گریز از مرکز و گرانش باید محاسبه شود.

ماتریس جرم به شکل بلوک قطری به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$M = \mathrm{blkdiag}(M_1, M_2, M_o) \tag{۷}$$

که در آن M_1 ماتریس جرم بازوی ۱ و M_2 ماتریس جرم بازوی ۲ و M_o ماتریس جرم بار است. ماتریس سختی و گریز از مرکز- کوریولیس نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C = \mathrm{blkdiag}\left(C_1, C_2, 0_{[4\times4]}\right) \tag{۸}$$

$$K = \mathrm{blkdiag}\left(K_1, K_2, 0_{[4\times4]}\right) \tag{۹}$$

ماتریس جرم، سختی و گریز از مرکز-کوریولیس برای ربات تک عضوی در پیوست (۱) آمده است. انعطاف‌پذیری بازوها با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی مدل‌سازی شده است. از معادلات لاگرانژ، همراه با روش گسسته‌سازی اجزای محدود، برای ایجاد معادلات دینامیکی ربات استفاده‌شده است[۲۰]. بردار $g(q, \dot{q}, t)$ در معادله (۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + Kq \tag{۱۰}$$

۳- مسئله بهینه‌سازی

مسئله دینامیک معکوس به‌عنوان یک مسئله بهینه‌سازی مقید فرمول‌بندی می‌شود که در آن انرژی الاستیک اعضا در طول مسیر حداقل می‌شود. در مسئله کنترل بهینه، شکل کلی تابع هدف با فرم بولزا[1] را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$J = \int_{t_i}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t), \lambda(t), u(t), t)dt + \mathrm{E}(\mathrm{q}(\mathrm{t_f}), \dot{\mathrm{q}}(\mathrm{t_f})) \tag{۱۱}$$

این تابع هدف یک انتگرال هزینه را در بازه $[t_i, t_f]$ (ترم لاگرانژ) و تابعی از متغیرهای حالت در زمان پایانی t_f (ترم مایر) ترکیب می‌کند. به‌طورکلی، قیدهای مسیر و قیدهای پایانی، محدودیت‌هایی را به دینامیک سیستم اعمال می‌کنند. این محدودیت‌ها می‌توانند به قیدهای نامساوی یا قیدهای تساوی منجر شوند. در اینجا قید پایانی در نظر گرفته نشده است، و معادله (۱۱) به‌صورت قید تساوی در طول مسیر در نظر گرفته‌شده است که به شکل فشرده به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$c\big(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \lambda(t), u(t)\big) = 0 \tag{۱۲}$$

روش‌های کنترل بهینه به‌طورکلی به موارد زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

- روش‌های برنامه‌ریزی پویا که نیاز به حل معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی دارند [۲۱].
- روش‌های غیرمستقیم که نیاز به حل مسئله مقدار مرزی دارند [۲۲].
- روش‌های مستقیم که مسئله کنترل بهینه را به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کند.

روش‌های مستقیم، شرایط بهینه را پس از گسسته‌سازی زمانی مسئله، فرموله می‌کنند و مزایای متعددی مانند مقاومت، فرمول‌بندی مجدد آسان برای مسائل مختلف و توانایی حل مسائل غیرخطی پیچیده و ناپایدار را ارائه می‌دهند. در بین روش‌های مستقیم، تمایز بیشتری را می‌توان بین روش‌های رونوشت مستقیم [۲۳]، روش‌های شوتینگ تکی[2] و روش‌های شوتینگ چندگانه[3] [۲۴] داد. در اینجا تمرکز بر روی روش رونوشت مستقیم است که در آن انتگرال‌گیری زمانی و بهینه‌سازی به‌طور هم‌زمان حل می‌شوند. این بدان معنی است که همه متغیرهای کنترل و حالت در هر گام از شبکه زمانی به‌عنوان متغیرهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند که منجر به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) بزرگ اما پراکنده می‌شود [۱۴].

۴- روش رونوشت مستقیم[4]

در روش رونوشت مستقیم، مسئله کنترل بهینه در زمان به شبکه‌ای از N نقطه $t^{(k)}$ گسسته می‌شود؛ که $k = 1, \dots, N$ و $t^1 = t_i$ و $t^N = t_f$ است. مجموعه متغیرهای طراحی شامل جابجایی‌ها q، سرعت‌ها $\dot{q}$، شتاب‌ها $\ddot{q}$ ، ضرایب لاگرانژ λ و ورودی‌های کنترلی u سیستم در هر گام زمانی است. مجموعه متغیرهای طراحی در هر گام زمانی k به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x^{(k)} = \left[q^{(k)}; \dot{q}^{(k)}; \ddot{q}^{(k)}; a^{(k)}; \lambda^{(k)}; u^{(k)}\right] \tag{۱۳}$$

[1] Bolza

[2] Single shooting
[3] Multiple shooting
[4] Direct transcription method

متغیرهای طراحی در همه گام‌های زمانی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x = \left[x^{(1)}; x^{(2)}; \dots ; x^{(k)}\right] \tag{۱۴}$$

روش α تعمیم‌یافته، [۲۵] که بر اساس فرمول‌های نیومارک است، می‌تواند به‌عنوان الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی به‌صورت زیر استفاده شود.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}}^{(k+1)} &= \dot{\boldsymbol{q}}^{(k)} + (1 - \gamma)h\boldsymbol{a}^{(k)} + \gamma h\boldsymbol{a}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{q}^{(k+1)} &= \boldsymbol{q}^{(k)} + h\dot{\boldsymbol{q}}^{(k)} + (½ - \beta)h^2\boldsymbol{a}^{(k)} \\ &\quad + \beta\, h^2\boldsymbol{a}^{(k+1)} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

و روابط شتاب کمکی به‌صورت زیر است [۲۵].

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}^{(k+1)}(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha_m}) + \boldsymbol{\alpha_m}\boldsymbol{a}^{(k)} - \\ &\quad (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\alpha_f})\ddot{\boldsymbol{q}}^{(k+1)} - \boldsymbol{\alpha_f}\ddot{\boldsymbol{q}}^{(k)} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن α_m، β، γ، و α_f پارامترهای عددی روش α تعمیم‌یافته هستند و می‌توانند برای ترکیب پایداری غیرشرطی و دقت مرتبه دوم انتخاب شوند. میرایی عددی را می‌توان برای به دست آوردن یک شعاع طیفی معین در فرکانس‌های بی‌نهایت ρ^∞ تنظیم کرد.

روش رونوشت مستقیم می‌تواند با قیدهای نامساوی و تساوی به‌راحتی کار کند که در مقایسه با روش‌های دیگر یک مزیت است. اگر قیود تساوی و نامساوی مسیر فقط در گره‌های شبکه زمانی اعمال شود، مسئله بهینه‌سازی به‌عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) بیان می‌شود. در این روش تنها قیدهای تساوی و نامساوی مسیر، وجود دارد، مسئله NLP شکل کلی زیر را به خود می‌گیرد.

$$\min J^d(x) \quad s.t. \quad \begin{cases} c^d_{ieq}(x) \leq 0 \\ c^d(x) = 0 \end{cases} \tag{۱۷}$$

که در آن $J^d : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_{ec}}$ تابع هدف گسسته شده، و $c^d : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ بردار قیدهای تساوی و $c^d_{ieq} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ بردار قیدهای نامساوی مسیر گسسته شده است که شامل روابط انتگرال‌گیری زمانی است. حل بهینه شرایط بهینه کاروش-کوهن-تاکر[۱] را برآورده می‌کند. حل گرهای استاندارد NLP را می‌توان برای حل چنین مسائلی به‌طور مؤثر مورد استفاده قرار داد.

گسسته‌سازی تابع هدف در معادله (۱۲) با توجه به روش صریح اویلر معادله زیر را نتیجه می‌دهد.

$$J^d = \sum_{k=1}^{N-1} L(\boldsymbol{q}^k, \dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{u}^k)h + E(\boldsymbol{q}^N, \dot{\boldsymbol{q}}^N) \tag{۱۸}$$

[1] Karush–Kuhn–Tucker

که در آن h گام زمانی گسسته‌سازی است. به‌منظور افزایش دقت از گسسته‌سازی مرتبه بالاتر مانند قانون ذوزنقه‌ای می‌توان استفاده کرد. در هر گام زمانی معادلات حرکت (۱) و معادله مسیر (۲) در هر گام زمانی به‌عنوان قیدهای تساوی به‌صورت معادله (۱۹) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_m^{(k)} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{m1}^{(k)} \\ \boldsymbol{C}_{m2}^{(k)} \\ \boldsymbol{C}_{m2}^{(k)} \end{bmatrix} = 0 \\ \boldsymbol{C}_{m1}^{(k)} &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^{(k)})\ddot{\boldsymbol{q}}^{(k)} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{(k)}, \dot{\boldsymbol{q}}^{(k)}) + \\ &\quad \boldsymbol{B^T}(\boldsymbol{q}^{(k)})\boldsymbol{\lambda^{(k)}} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(k)} \\ \boldsymbol{C}_{m2}^{(k)} &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}^{(k)}) \\ \boldsymbol{C}_{m2}^{(k)} &= \boldsymbol{y}(\boldsymbol{q}^{(k)}) - \boldsymbol{y}_d(t^{(k)}) \\ k &= 1، \dots ،N \end{aligned} \tag{۱۹}$$

همچنین به‌طور مشابه، فرمول‌های انتگرال‌گیری روش α تعمیم‌یافته، معادلات (۱۵) و (۱۶) به‌عنوان قیدهای تساوی به تعداد $N - 1$ برای اطمینان از پیوستگی حل و سازگاری بین متغیرهای جابجایی، سرعت و شتاب بین گام‌های زمانی اعمال می‌شوند.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_\alpha^{(k)} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\alpha1}^{(k)} \\ \boldsymbol{C}_{\alpha2}^{(k)} \\ \boldsymbol{C}_{\alpha2}^{(k)} \end{bmatrix} = 0 \\ \boldsymbol{C}_{\alpha1}^{(k)} &= \dot{\boldsymbol{q}}^{(k+1)} - \dot{\boldsymbol{q}}^{(k)} - (1 - \gamma)h\boldsymbol{a}^{(k)} \\ &\quad - \gamma h\boldsymbol{a}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{C}_{\alpha2}^{(k)} &= \boldsymbol{q}^{(k+1)} - \boldsymbol{q}^{(k)} - h\dot{\boldsymbol{q}}^{(k)} \\ &\quad -(½ - \beta)h^2\boldsymbol{a}^{(k)} - \beta\, h^2\boldsymbol{a}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{C}_{\alpha2}^{(k)} &= (1 - \alpha_m)\boldsymbol{a}^{(k+1)} \mp \boldsymbol{a}^{(k)} \\ &\quad -(1 - \alpha_f)\ddot{\boldsymbol{q}}^{(k+1)} - \alpha_f\ddot{\boldsymbol{q}}^{(k)} \\ k &= 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

بردار قیدهای تساوی برداری متشکل از قیدهای ذکرشده در هر گام زمانی است.

$$\boldsymbol{c}^d = \left(\boldsymbol{c}_m^{(1)}; \boldsymbol{c}_\alpha^{(1)}; \dots; \boldsymbol{c}_m^{(N-1)}; \boldsymbol{c}_\alpha^{(N-1)}; \boldsymbol{c}_\alpha^{(N)}\right) = 0 \tag{۲۱}$$

در معادله (۲۱) هر قید فقط به چند مؤلفه از بردار بزرگ x بستگی دارد. به همین دلیل، مسئله NLP حاصل، ساختار بسیار پراکنده‌ای دارد.

اکثر الگوریتم‌های بهینه‌سازی به ارزیابی گرادیان تابع هدف و قیدها بر اساس متغیرهای طراحی نیاز دارند. این گرادیان‌ها را با روش تفاضل محدود می‌توان به دست آورد. بااین‌حال، اگر ساختار پراکنده مسئله کنترل بهینه استفاده نشود، منجر به محاسبات نسبتاً ناکارآمد به دلیل محاسبه

گرادیان توابع خواهد شد. به‌جای روش تفاضل محدود، می‌توان از روش‌های تحلیلی برای محاسبه گرادیان توابع J^d، c^d و c_{ieq}^d نسبت به متغیرهای طراحی x استفاده کرد. در اینجا از جعبه‌ابزار ریاضیات سمبولیک[1] متلب برای مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای طراحی استفاده‌شده است. این روش منجر به محاسبه دقیق و سریع گرادیان‌ها نسبت به روش تفاضل محدود می‌باشد، اندازه متغیرهای طراحی و ماتریس ژاکوبی قیود و تابع هدف با افزایش تعداد نقاط شبکه زمانی به‌شدت افزایش می‌یابد. حذف بعضی از قیدهای خطی می‌تواند برای کاهش تعداد متغیرهای طراحی و قیود در فرآیند بهینه‌سازی اعمال شود. بااین‌حال، حذف قیود ممکن است الگوی پراکندگی مسئله بهینه‌سازی را تغییر دهد، به‌طوری‌که حذف این قیدها ممکن است، سودمند نباشد.

۵- شبیه‌سازی عددی

خصوصیات فیزیکی سیستم بازوهای انعطاف‌پذیر شکل **۱** در جدول **۱** نشان داده‌شده است.

جدول (۱): پارامترهای ربات دو عضوی

پارامتر	نمایه	ابعاد و ضریب	مقدار
طول عضو ۲	l_1	m	۰/۵
طول عضو ۲	l_2	m	۰/۵
ممان اینرسی مقاطع	I	$10^{-11}\ \mathrm{m}^4$	۲
مساحت مقطع	A	$10^{-5}\ \mathrm{m}^2$	۶
چگالی عضو ۱	ρ_1	$\mathrm{kg/m^3}$	۲۶۶۶/۶۷
چگالی عضو ۲	ρ_2	$\mathrm{kg/m^3}$	۲۶۸۴/۵۶
مدول یانگ	E_1	$10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$	۲
نسبت تبدیل	Gr	–	۱
جرم بار	m_p	kg	۰/۱
ممان اینرسی بار	I_p	$10^{-3}\mathrm{kg.\,m^2}$	۰/۵

هدف کنترل مسیر حرکت بار و نیروهای داخلی اعمالی توسط هر یک از بازوها به بار خارجی می‌باشد. ضرایب لاگرانژ برابر با نیروهای قیدی اعمالی به جسم است و مسیر مطلوب، مختصه y مرکز جرم جسم صلب دارای مقدار اولیه ۰/۰۹ متر و مقدار نهایی ۰/۲۷ متر است. حرکت در صفحه افقی و از گرانش صرف‌نظر شده است.

فرکانس طبیعی سیستم به موقعیت بار بستگی دارد و بیشترین مقدار تقریباً برابر ۰/۳ ثانیه است به این دلیل زمان شبیه‌سازی مقداری کمتر و برابر با ۰/۲۵ ثانیه در نظر گرفته‌شده است. ازآنجایی‌که سیستم غیر مینیمم فاز است، می‌توان پیش فعال و پس فعال بودن سیستم را انتظار داشت. به همین ۰/۰۲ ثانیه ابتدایی و انتهایی زمان پیش فعال و پس فعال[2] بودن سیستم است. مجموعه متغیرهای طراحی در هر گام زمانی k به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{gathered} q^{(k)} = [\theta_1^{(k)};\ u_{12}^{(k)};\ v_{12}^{(k)}; \theta_2^{(k)};\ u_{22}^{(k)}; \\ v_{22}^{(k)}; X_1^{(k)}; Y_1^{(k)}; X_2^{(k)}; Y_2^{(k)}] \\ x^{(k)} = \left[q^{(k)}; \dot{q}^{(k)}; \ddot{q}^{(k)}; a^{(k)}; \lambda^{(k)}; u^{(k)}\right] \end{gathered} \tag{۲۲}$$

گام زمانی شبیه‌سازی ۰/۰۰۱ ثانیه لحاظ شده است و بازه زمانی به ۲۵۰ مرحله زمانی گسسته شده است.

تابع هدف بهینه‌سازی، انرژی الاستیک اعضا است و به‌صورت معادله (۲۳) در نظر گرفته‌شده است. به‌منظور افزایش سرعت همگرایی الگوریتم بهینه‌سازی، گرادیان تابع هدف، نسبت به متغیرهای طراحی، به‌صورت تحلیلی محاسبه و به برنامه داده‌شده است.

$$\boldsymbol{J}^d = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} h\, q^{(k)}\, K^{(k)}\, q^{(k)} \tag{۲۳}$$

قید تساوی بر اساس رابطه (۱۹) شامل معادلات دینامیکی حرکت، قیدهای سینماتیکی قید مسیر است. معادلات دینامیکی حرکت $\boldsymbol{C}_{m1}^{(k)}$ بر اساس رابطه (۱-الف) با در نظر گرفتن ماتریس‌های جرم، سختی، کوریولیس هر یک از بازوها و بار و ماتریس ژاکوبی قیدها محاسبه می‌شود. معادله (۳) قیدهای سینماتیکی $\boldsymbol{C}_{m2}^{(k)}$ را نشان می‌دهد. با توجه به این‌که هدف، کنترل موقعیت y مرکز جرم بار است قید مسیر $\boldsymbol{C}_{m2}^{(k)}$ به‌صورت تابع چندجمله‌ای درجه پنج به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} y_d(t) = \frac{Y_1 + Y_2}{2} &= ½\big(l_1 \sin(\theta_1) \\ &+ u_{12}\cos(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \\ &+ u_{22}\cos(\theta_2)\big) \end{aligned} \tag{۲۴}$$

[1] Symbolic Math Toolbox

[2] Pre- and post-actuation

$$
=\begin{cases} y_0 & t < t_1 \\ \Delta y(10\eta^3 - 15\eta^4 + 6\eta^5) + y_0 & t_1 < t < t_2 \\ y_0 + \Delta y & t_2 < t \end{cases}
$$

$$
\eta = \frac{t - t_1}{Ts}
$$

قید دیگر مسئله بهینه‌سازی، برای کنترل نیروی داخلی اعمالی توسط ربات‌ها به جسم مشترک قید زیر روی ضرایب لاگرانژ وارد می‌شود.

$$
\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = F_{xa}^2 + F_{ya}^2 + F_{xb}^2 + F_{yb}^2 = 18 \qquad (۲۵)
$$

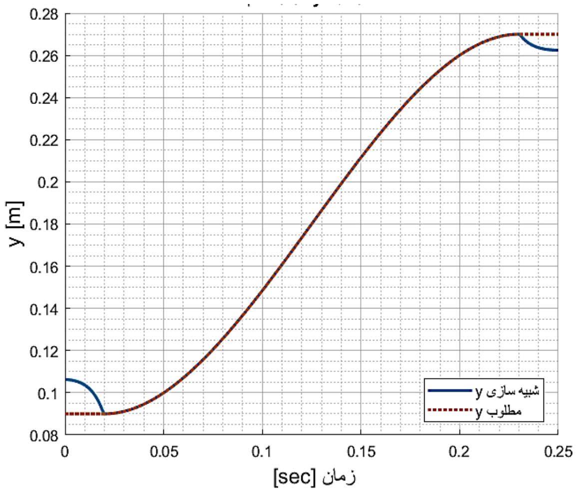
با اعمال قید فوق اندازه نیروی داخلی اعمالی، برابر سه نیوتن در طول بازه زمانی اعمال قید می‌شود. قیدهای روش α تعمیم‌یافته مطابق با معادلات (۲۰) روی سیستم اعمال می‌شود. پارامترهای عددی روش α تعمیم‌یافته با انتخاب شعاع طیفی ρ بر روی ۰/۵ به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است.

$$
\beta = 0.44, \gamma = 0.83, \alpha_m = 0, \alpha_f = 0.33
$$

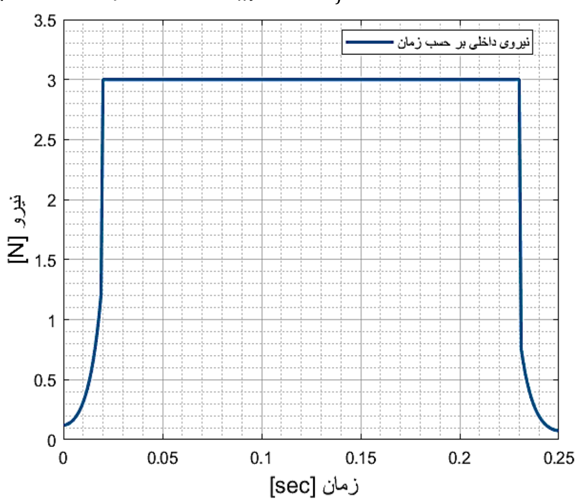
گرادیان‌های توابع قید، نسبت به متغیرهای طراحی، نیز به‌صورت تحلیلی محاسبه و به برنامه داده‌شده است. برای بهینه‌سازی از تابع fmincon متلب با الگوریتم interior-point با تلورانس $۱۰^{-۸}$ برای قیدها و توابع استفاده‌شده است. بهتر است حدس اولیه بهینه‌سازی، برابر با حرکت سیستم صلب باشد. ولی در این مسئله با حدس اولیه صفر نیز الگوریتم همگرا می‌شود.

۶- نتایج

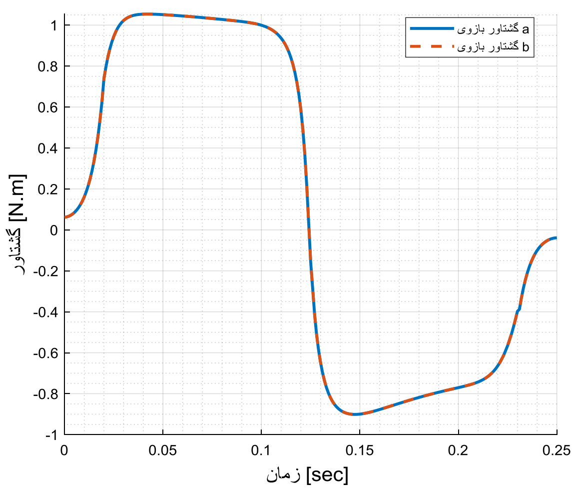
با استفاده از کامپیوتر i7-7700HQ CPU @2.8 GHz، حل دینامیک معکوس بعد از ۲۶ تکرار و ۴۳ ثانیه به پاسخ نهایی همگرا شده است. در شکل **۲** مسیر مطلوب و مسیر طی شده حین شبیه‌سازی نشان داده‌شده است. با توجه به شکل ۰/۰۲ ثانیه به‌عنوان زمان پیش و پس فعال در نظر گرفته‌شده است و در قبل از زمان پیش فعال و بعد از زمان پس فعال قید سرو به سیستم اعمال نمی‌شود. در زمان مابین [۰/۲۳ ۰/۰۲] ثانیه مسیر مطلوب با مسیر شبیه‌سازی‌شده کاملاً بر هم منطبق است. در شکل **۳** اندازه نیروی شبیه‌سازی‌شده اعمالی به جسم توسط بازوها نشان داده‌شده و در محدوده زمانی قید سرو ([۰/۲۳، ۰/۰۲] ثانیه) نیروی مطلوب سه نیوتن را ردیابی می‌کند. در شکل **۴** گشتاور اعمالی محاسبه‌شده توسط الگوریتم ارائه‌شده رانشان می‌دهد. مطابق با نمودار گشتاور بازوی a و b کاملاً باهم برابر محاسبه‌شده است.



شکل (۲): Y مرکز جرم جسم مشترک برحسب زمان.

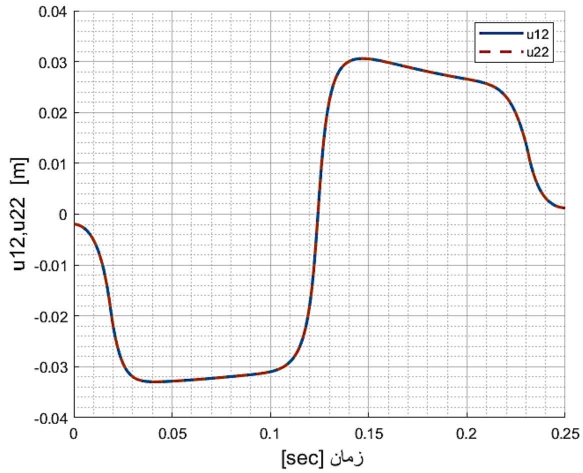


شکل (۳): نیروی داخلی جسم برحسب زمان.

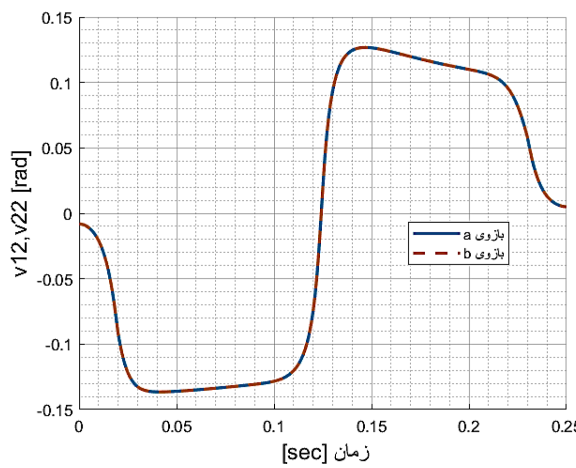


شکل (۴): گشتاور بازوها برحسب زمان.

همچنین جابجایی الاستیک بازوها در شکل‌های **۵** و **۶** نشان داده‌شده است که مقداری مساوی در هر دو بازو دارد. تغییر اندازه گشتاور بازوها باعث تغییر در جهت نیرو در جسم می‌شود؛ که برای کنترل نیرو در بازوهای همکار مناسب نیست.



شکل (۵): $u12$ و $u22$ (جابجایی الاستیک بازوها) برحسب زمان.

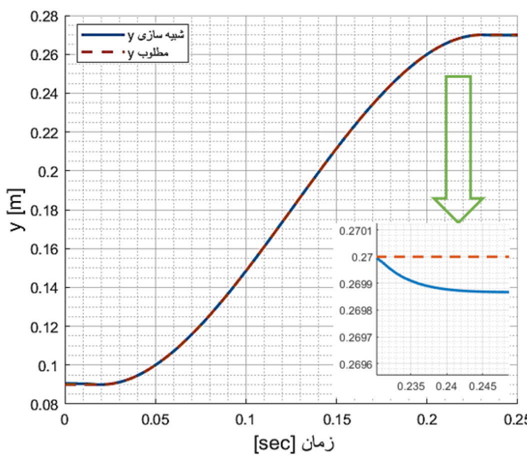


شکل (۶): $v12$ و $v22$ برحسب زمان.

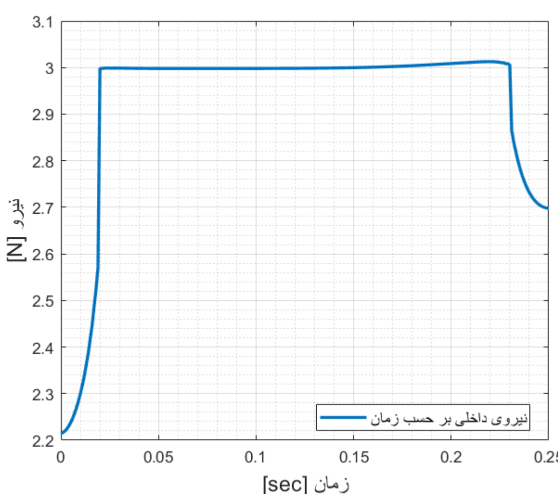
با توجه به این‌که جهت اعمال نیرو حین شبیه‌سازی عوض می‌شود قید نامساوی مطابق با معادله (۱۹) روی مسئله بهینه‌سازی اعمال می‌شود.

$$-(\lambda_1+\lambda_2)<0 \qquad (۲۶)$$

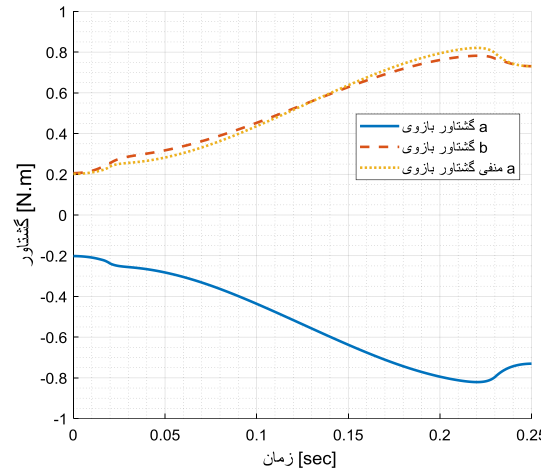
با اعمال قید نامساوی (۱۹) زمان حل افزایش می‌یابد و بعد از ۲۲۰ تکرار و ۵۱۹ ثانیه به پاسخ نهایی همگرا می‌شود. در شکل‌های **۷** و **۸** مسیر حرکتی و نیروی داخلی جسم مشترک با اعمال قید نامساوی را نشان می‌دهد. در این حالت میزان تغییرات پاسخ در زمان پیش و پس فعال با قید سرو کمتر شده است. ولی در اواخر زمان اعمال قید سرو مقداری خطا در ردیابی نیرو وجود دارد. شکل **۹** گشتاور اعمالی به هر یک از بازوها را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها جهت گشتاور در بازوها متفاوت است و ازنظر مقدار نیز مقدار یکسانی ندارند. برعکس شبیه‌سازی بدون اعمال قید نامساوی که ازنظر مقدار و جهت کاملاً یکسان بودند. در شکل **۱۰** و **۱۱** تغییر شکل الاستیک خطی و زاویه‌ای بازوها نشان داده‌شده است. مقادیر به‌دست‌آمده به‌صورت تقریبی متناسب با گشتاور اعمالی به بازوها می‌باشد. همچنین با ثابت نگه‌داشتن جهت نیروی داخلی مقدار تغییر شکل‌های الاستیک کاهش می‌یابد.



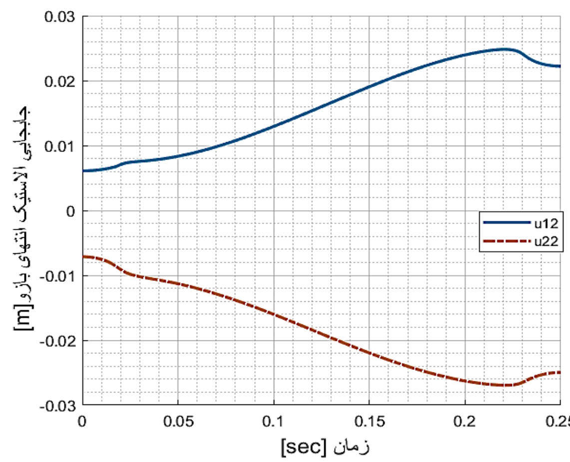
شکل (۷): Y مرکز جرم برحسب زمان با اعمال قید نامساوی.



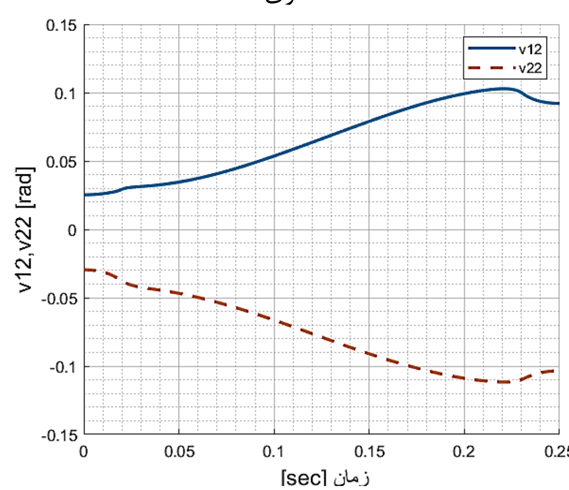
شکل (۸): نیروی داخلی برحسب زمان با اعمال قید نامساوی.



شکل (۹): گشتاور بازوها برحسب زمان با اعمال قید نامساوی.

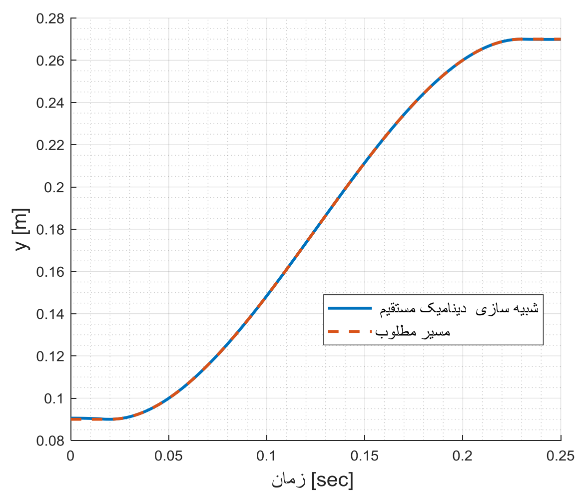


شکل (۱۰): u12 و u22 برحسب زمان با اعمال قید نامساوی.



شکل (۱۱): v12 و v22 برحسب زمان با اعمال قید نامساوی.

برای بررسی صحت حل دینامیک معکوس، با گشتاورهای محاسبه‌شده مطابق با شکل **۹** و **۱۰** دینامیک مستقیم شبیه‌سازی‌شده است برای استفاده از توابع حل‌کننده معادله دیفرانسیل در متلب مانند ODE45 باید معادلات دیفرانسیل مرتبه دو به معادله دیفرانسیل مرتبه یک تبدیل شود. همچنین شکل DAE معادلات حرکت توسط روش ارائه‌شده در [۲۰] به ODE تبدیل‌شده است. با انتخاب دقت حل برابر با $۱۰^{-۸}$، گام زمانی به‌صورت خودکار تعیین می‌شود. خروجی شبیه‌سازی که موقعیت y بار است. در شکل **۱۲** نشان داده‌شده است. با توجه به شکل **۱۲** مسیر خروجی حل دینامیک مستقیم با مسیر مطلوب دینامیک معکوس یکسان هستند؛ که نشان‌دهنده درستی گشتاورهای محاسبه‌شده در حل دینامیک معکوس می‌باشد.



شکل (۱۲): شبیه‌سازی دینامیک مستقیم با گشتاورهای محاسبه‌شده از دینامیک معکوس.

۷- نتیجه‌گیری

این مقاله، استفاده از روش بهینه‌سازی برای حل دینامیک معکوس ربات انعطاف‌پذیر همکار را بررسی می‌کند. از حل دینامیک معکوس در کنترل پیش‌خور بازوهای انعطاف‌پذیر استفاده می‌شود. به دلیل ماهیت غیر مینیمم فاز سیستم، روش انتگرال‌گیری روبه‌جلو برای حل دینامیک معکوس ناپایدار است؛ و روش بهینه‌سازی حل پایداری برای این سیستم ارائه می‌دهد. تابع هدف بهینه‌سازی، انرژی الاستیک اجزا و قیدها شامل معادلات دینامیکی، قیدهای مسیر

حرکت و نیرو، قیدهای روش α تعمیم‌یافته برای پایداری حل، قیدهای سینماتیکی و قیدهای مربوط به متغیرهای اضافی است. همچنین قید نامساوی نیز برای جلوگیری از تغییر جهت نیرو در کنترل نیرو به سیستم اعمال‌شده است. ربات با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی، از روش معادلات لاگرانژ، همراه با گسسته‌سازی اجزای محدود مدل‌سازی شده است. با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام‌شده بر روی ربات‌های تک عضوی این روش، مسئله دینامیک معکوس و سینماتیک معکوس ربات‌های انعطاف‌پذیر همکار را می‌تواند باهم حل کند، مزیت دیگر کنترل نیروی داخلی و خارجی است که با اعمال قیدهای تساوی و نامساوی روی ضرایب لاگرانژ انجام‌شده است.

۸- مراجع

[1] Brüls O, Bastos Jr G, Seifried R. A stable inversion method for feedforward control of constrained flexible multibody systems. Journal of computational and nonlinear dynamics. 2014;9(1).

[2] Magee DP, Book WJ. Eliminating multiple modes of vibration in a flexible manipulator. In Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation 1993: 474-479.

[3] Rhim S, Book WJ. Adaptive time-delay command shaping filter for flexible manipulator control. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2004 Dec 27;9(4):619-26.

[4] Mohamed Z, Tokhi MO. Command shaping techniques for vibration control of a flexible robot manipulator. Mechatronics. 2004 Feb 1;14(1):69-90.

[5] Jackson L, Cable P. Digital Filters and Signal Processing by LB Jackson. Acoustical Society of America; 1987.

[6] Lismonde A. Geometric modeling and inverse dynamics of flexible manipulators. 2020.

[7] Theodore RJ, Ghosal A. Comparison of the assumed modes and finite element models for flexible multilink manipulators. The International journal of robotics research. 1995 Apr;14(2):91-111.

[8] Seifried R, Held A, Dietmann F. Analysis of feed-forward control design approaches for flexible multibody systems. Journal of System Design and Dynamics. 2011;5(3):429-40.

[9] Seifried R. Two approaches for feedforward control and optimal design of underactuated multibody systems. Multibody System Dynamics. 2011;27(1):75-93.

[10] Isidori A. Nonlinear control systems. Springer-Verlag; 1997.

[11] Lismonde A, Sonneville V, Brüls O. A geometric optimization method for the trajectory planning of flexible manipulators. Multibody System Dynamics. 2019;47(4):347-62.

[12] Devasia S, Chen D, Paden B. Nonlinear inversion-based output tracking. IEEE Transactions on Automatic Control. 1996;41(7):930-42.

[13] Seifried R. Dynamics of underactuated multibody systems: Springer; 2014.

[14] Bastos G, Seifried R, Brüls O. Inverse dynamics of serial and parallel underactuated multibody systems using a DAE optimal control approach. Multibody System Dynamics. 2013;30(3):359-76.

[15] Seifried R, Bastos Jr G, Brüls O. Computation of bounded feed-forward control for underactuated multibody systems using nonlinear optimization. PAMM. 2011;11(1):69-70.

[16] Taylor DG, Li S. Stable inversion of continuous-time nonlinear systems by finite-difference methods. IEEE Transactions on Automatic Control. 2002;47(3):537-42.

[17] Morrison DD, Riley JD, Zancanaro JF. Multiple shooting method for two-point boundary value problems. Communications of the ACM. 1962;5(12):613-4.

[18] Bastos G, Brüls O. Analysis of open-loop control design and parallel computation for underactuated manipulators. Acta Mechanica. 2020;231(6):2439-56.

[19] Betts JT. Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming: SIAM; 2010.

[20] Absil PA, Mahony R, Sepulchre R. Optimization algorithms on matrix manifolds. InOptimization Algorithms on Matrix Manifolds 2009 Apr 11. Princeton University Press.

[21] Bellman R. Dynamic programming. Science. 1966;153(3731):34-7.

[22] Bakke V. A maximum principle for an optimal control problem with integral constraints. Journal of Optimization Theory and Applications. 1974;13(1):32-55.

[23] Diehl M, Bock HG, Diedam H, Wieber P-B. Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control. Fast motions in biomechanics and robotics: Springer; 2006. p. 65-93.

[24] Chung J, Hulbert G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized-α method. 1993.

[25] Newmark NM. A method of computation for structural dynamics. Journal of the engineering mechanics division. 1959;85(3):67-94.

۹- پیوست

مدل غیرخطی بازوی تک لینکی انعطاف‌پذیر با گسسته‌سازی اجزای محدود با یک المان به ترتیب ماتریس جرم، سختی و کوریولیس و گریز از مرکز:

$$M = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} M_{11} & M_4 l + 147l & M_5 - 21l^2 \\ M_4 l + 147l & M_4 + 156 & -22l \\ M_5 - 21l^2 & -22l & M_5 + 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$M(1,1) = 140l^2 + 156{u_{12}}^2 + 4l^2{v_{12}}^2 -$$

$$M_5 = \frac{420I_p}{\rho Al}\ ; M_4 = \frac{420M_p}{\rho Al}$$

$$\begin{aligned} M_{11} = 140l^2 + 156{u_{12}}^2 + 4l^2{v_{12}}^2 - 44l_1u_{12}v_{12} \\ + \frac{420}{\rho Al}(l^2m_p + I_p + G{r_1}^2 I_{h_1} \\ + m_p{u_{12}}^2) \end{aligned}$$

$$K = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6l \\ 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_{12} \\ \dot{v}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_{11} = 156u_{12}\dot{u}_{12} + 4l^2v_{12}\dot{v}_{12} - 22lu_{12}\dot{v}_{12} \\ - 22l\dot{u}_{12}v_{12} + \frac{420m_p}{\rho Al}u_{12}\dot{u}_{12} \end{aligned}$$

$$c_{12} = c_{21} = \dot{\theta}_1(156u_{12} - 22lv_{12} + \frac{420m_p}{\rho Al}u_{12})$$

$$c_{13}{=}c_{31}{=} -\dot{\theta}_1(22lu_{12} - 4l^2v_{12})$$

که در عبارات فوق l طول عضو، A سطح مقطع، ρ چگالی، EI سختی خمشی، m_p جرم بار، I_p ممان اینرسی بار، I_h اینرسی هاب، *Gr* ضریب تبدیل گیربکس، θ زاویه عضو، u_{12} خمش انتهای عضو و v_{12} زاویه خمشی انتهای عضو است.

Journal of Aerospace Mechanics/ 2023/ Vol.19/ No.1/ 123-135

Journal of Aerospace Mechanics

DOR: 20.1001.1.26455323.1402.19.1.9.4

Stable Inversion for Feedforward Control of Flexible Cooperative Manipulators

Hadi Darabi[1], Mohammad Reza Elhami[2*]

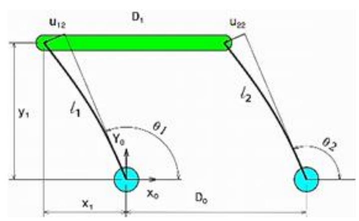
[1] Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

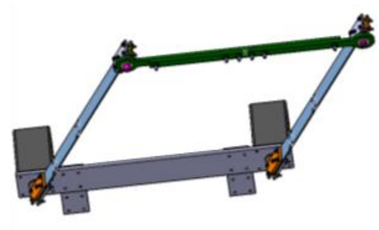
[2] Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- Lagrange multipliers in constraint systems represent internal forces. And by adjusting them, the internal forces are controlled.
- The inequality constraint is introduced as a constraint of the minimization problem for converging to the correct answer.

GRAPHICAL ABSTRACT





ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 24 October 2022

Received in revised form: 4 November 2022

Accepted: 8 December 2022

Available online: 12 December 2022

*Correspondence:

melhami@ihu.ac.ir

How to cite this article:

H. Darabi, M.R. Elhami. Stable inversion for feedforward control of flexible cooperative manipulators. Journal of Aerospace Mechanics. 2023; 19(1):123-135.

Keywords:

Flexible manipulator

Finite element

Lagrange method

Stable inversion

Generalized α method

ABSTRACT

In this paper, the inverse dynamics solution for feedforward control of cooperative flexible manipulators is investigated. The internal dynamics of flexible manipulators are unstable, and to obtain a bounded solution to the inverse dynamics problem, the constrained nonlinear optimization method is used. In the optimization method, the aim is to minimize the elastic energy of the manipulators despite several constraints. These constraints include: 1) dynamic equations; 2) Spatial and force trajectory; 3) kinematic constraints limiting the movement of manipulators; 4) constraints related to superfluous variables and 5) constraints of the generalized α method for the stability of the solution. The method used for dynamic modeling is based on the Lagrange equation and finite element discretization. Lagrange multipliers have been used to control the internal forces applied to the payload, and to prevent the change of direction in force control, an inequality constraint has been added to the optimization constraints. This method is implemented on flexible cooperative manipulators and has the ability to control the path of the payload and the force applied to it.