
Synthesis of Sparse Array via Convex Optimization

H. Eshaghi^{*}, M. Sepahvand

^{*} Master's student, Imam Hossein University (AS), Tehran, Iran

(Received: 22/01/2022, Accepted: 29/06/2022)

Abstract

The design of a sparse array antenna that can create the desired radiation patterns with minimum number of elements, is a popular research area. The synthesis sparse array problem can be modeled with appropriate constraints on the number of solve space members, namely l_0 -norm of the weight elements. But it is a non-convex problem that requires solving a NP-hard problem. Interesting ideas are mentioned to relax the problem into a convex problem. The proposed solution is based on minimizing the l_1 -norm; The algorithm used here, first determines the optimal radiation pattern with convex optimization, then using iterative weighting on the l_1 -norm, and removing those elements whose weights are almost zero, a sparse array is obtained and the position of the elements are optimally determined. As a result, by solving the non-convexity property of the problem, the optimal solution is provided with a reasonable computational time. The purpose of the optimization method is to minimize the number of elements, observe the constraints related to the requirements of the radiation pattern and reduce the calculation time. By adjusting the relevant parameters such as DRR, γ and ε , this research, in its case study, was able to sparse the 11×11 array (121 elements) to 42 elements (by increasing the PSL) and 37 elements (by increasing the main lobe beam width).

Keywords: Array antenna, Sparsity, Convex Optimization, Radiation Pattern

^{*} Corresponding author E-mail: hoh4097@gmail.com

علمی - پژوهشی

تنگ‌سازی آنتن آرایه‌ای با استفاده از بهینه‌سازی محدب

حسین اسحاقی^{۱*}، مرتضی سپه‌وند^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، ۲- استادیار، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۰۲، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۰۸)

چکیده

طراحی آرایه‌های تنک که می‌توانند الگوهای تشعشی موردنظر را با حداقل تعداد عناصر ایجاد کنند، یک حوزه تحقیقاتی موردعلاقه است. مسئله سنتز آرایه‌های تنک را می‌توان با محدودیت‌های مناسب بر روی اندازه تعداد عضوهای فضای حل، یعنی نرم صفر وزن‌های عناصر آرایه مدل‌سازی کرد، اما چنین محدودیت غیرمحدبی، نیاز به حل مسئله چندجمله‌ای غیرتصادفی سخت دارد. ایده‌های جالبی برای آرام‌سازی محدودیت ذکر شده به صورت محدب پیشنهاد شده است. یک راه‌حل ممکن بر اساس حداقل‌سازی نرم یک است؛ الگوریتم استفاده شده در اینجا، ابتدا الگوی تشعشی بهینه را با استفاده از بهینه‌سازی محدب تعیین می‌کند، سپس با استفاده از وزن‌دهی مجدد نرم یک، آرایه پراکنده را با حذف آن دسته از عناصری که وزن تقریباً صفر دارند، به دست آورده و موقعیت المان‌ها را به صورت بهینه مشخص می‌کند؛ در نتیجه با حل مشکل عدم تحدب مسئله، راه‌حل بهینه با زمان محاسباتی معقول ارائه می‌شود. هدف روش بهینه‌سازی ارائه شده، به حداقل رساندن تعداد عناصر، رعایت قیود مربوط به الزامات الگوی تشعشی و کاهش زمان محاسبه است. این تحقیق در مطالعه موردی خود، توانسته با تنظیم پارامترهای مربوطه از جمله DRR، γ و ϵ ، آرایه 11×11 (۱۲۱ عنصر) را به ۴۲ (با افزایش حداکثر سطح گلبرگ فرعی) و ۳۷ عنصر (با افزایش پهنای گلبرگ اصلی) تنک‌سازی کند.

کلیدواژه‌ها: آنتن آرایه‌ای، تنک‌سازی، بهینه‌سازی محدب، الگوی تشعشی

۱- مقدمه

که روش بهینه‌سازی محدب در بسیاری موارد از لحاظ بهره‌وری و جامع بودن، حد آستانه خوبی بین تکنیک‌های بهینه‌سازی سراسری و تحلیلی می‌باشد. البته همه مسائل طراحی آنتن آرایه‌ای محدب نیستند، از جمله مسائل غیرمحدب می‌توان به مسائلی که در آن‌ها ضرایب وزن‌دهی آنتن دارای اندازه ثابت است (یعنی فقط فاز آن متغیر باشد)، مسائل با قیود باند پایین ($x \leq$) و یا مسائل با محدودیت بر روی وزن‌های غیرصفر اشاره کرد [۲]؛ با این وجود، سایر مسائل مهم طراحی آنتن آرایه‌ای، محدب هستند و بنابراین می‌توانند با الگوریتم‌های بسیار کارآمدی که اخیراً توسعه یافته‌اند، حل شوند. هدایت پرتو به صورت الکترونیکی در آنتن‌های آرایه‌ای، با تغییر فاز تحریک هر عنصر صورت می‌گیرد، که در بسیاری از کاربردها از نظر هزینه مقرون‌به‌صرفه نیست [۵]، به همین دلیل تنک‌سازی یکی از مسائلی است که در سنتز آنتن آرایه‌ای همواره موردتوجه می‌باشد؛ زیرا کاهش تعداد عناصر (تقویت‌کننده‌ها و تغییردهنده‌های فاز)، باعث می‌شود که آرایه‌ها از نظر هزینه، قابلیت اطمینان و بازدهی انرژی جذاب‌تر شوند [۶]. تنک‌سازی یک آرایه به معنای حذف برخی عناصر در یک آرایه با حفظ تقریبی مشخصات الگوی تشعشی موردنظر است، البته باید توجه داشت که تنک‌سازی (کاهش تعداد عناصر) مشکلاتی از قبیل افزایش شدید گلبرگ‌های فرعی، کاهش بهره و کوانتیزه شدن فاز به علت خاموشی ناگهانی بعضی از عناصر را نیز

به‌طور کلی یک عنصر آنتن، به‌تنهایی قادر به ایجاد بهره و الگوی تابشی موردنیاز نیست و یکی از راه‌حل‌های پیشنهادی، ترکیب چندین عنصر آنتن تکی برای تشکیل آنتن آرایه‌ای است [۱]. آنتن‌های آرایه‌ای در مقایسه با آنتن تکی که از لحاظ جهت و پهنای الگوی تشعشی محدود است، وسیله‌ای کارآمد برای آشکارسازی و پردازش سیگنال‌های وارد شده از جهات مختلف هستند [۲]. از آنتن‌های آرایه‌ای می‌توان برای هدایت توان تابش شده در یک جهت خاص، افزایش بهره آنتن و کاهش سطح گلبرگ فرعی استفاده کرد. انواع زیادی آنتن آرایه‌ای وجود دارد، که از جمله آن‌ها می‌توان به آنتن‌های آرایه‌ای خطی و صفحه‌ای اشاره کرد؛ همچنین سنتز آرایه‌های آنتن به دلیل کاربردهای فراوان مانند رادار، نجوم رادیویی، سونار، ارتباطات، جهت‌یابی، لرزه‌نگاری، تشخیص پزشکی و درمان یک بحث گسترده در علم الکترومغناطیس به شمار می‌رود. از حدود ۸۰ سال قبل، روش‌های زیادی برای حل مسائل پیاده‌سازی آنتن آرایه‌ای پیشنهاد شده است [۳]. این روش‌ها، شامل روش‌های تحلیلی (سریع اما محدود به مسائل خاص) و رویکردهای بهینه‌سازی سراسری (جامع اما محدود به دلیل بار محاسباتی) می‌باشند [۴]؛

* رایانامه نویسنده مسئول: Hoh4097@gmail.com

استفاده کرد. تا کنون الگوریتم‌ها و روش‌های قطعی و تصادفی مختلفی برای سنتز آرایه تنک معرفی شده است، که از جمله آن‌ها می‌توان به روش مداد ماتریس [۹]، الگوریتم ژنتیک [۱۰]، بهینه‌سازی ازدحام ذرات [۱۱]، الگوریتم شبیه‌سازی تبرید [۱۲]، الگوریتم بهینه‌سازی گروه مورچه [۱۳]، الگوریتم حسگری فشرده [۱۴] و الگوریتم تکامل دیفرانسیل [۱۵] اشاره کرد.

از آنجا که الگوی تشعشی آرایه یک تابع نمایی یا مثلثاتی از موقعیت‌های عناصر است، تعیین موقعیت‌های عناصر یک فرآیند غیرمحدب است؛ بنابراین چالش روش‌های پیشنهادی به دام افتادن در نقاط بهینه محلی می‌باشد. در اینجا برای حل مسئله مذکور، با توجه به تنک‌سازی نوع اول به معرفی طرحی برای تنک‌سازی آنتن آرایه‌ای در قالب بهینه‌سازی محدب پرداخته می‌شود؛ که مزیت آن نسبت به روش‌های غیرمحدب، برابری کمینه محلی و سراسری است.

در قسمت اول باید الگوی تشعشی اولیه را با توجه به نیازهای مربوطه تعیین کرد، سپس مشخصات حاصل از آن را به صورت توابع قیدی مسئله در نظر گرفته و مسئله با استفاده از بهینه‌سازی محدب حل می‌شود. پس از به دست آمدن الگوی تشعشی بهینه، به تنک‌سازی آرایه مربوطه پرداخته و با افزایش پهنای گلبرگ اصلی (در توابع قیدی)، مسئله برای کاهش تعداد عناصر شدنی می‌شود. برای کاهش عناصر، حداقل تعداد وزن‌های آرایه به وسیله وزن دهی مجدد نرم یک، که تقریبی از نرم صفر است، به دست می‌آید. در انتها برای کاهش هزینه‌های پیاده‌سازی، نرم بی‌نهایت وزن‌های آرایه به دو صورت تابع هدف یا تابع قیدی به مسئله اضافه می‌شود. به این ترتیب، روش پیشنهادی نیاز به طراحی موقعیت‌های عناصر را حذف می‌کند و آرایه تنک به وسیله تکنیک‌های بهینه‌سازی محدب به دست می‌آید. در ادامه مقاله، موضوع مورد بحث به صورت زیر بررسی می‌شود.

در بخش دوم مسئله پیاده‌سازی فرموله و راه‌حل پیشنهادی ارائه می‌شود. به منظور نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی، نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری در بخش سوم نشان داده و در نهایت، در بخش چهارم به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲- بهینه‌سازی محدب و تنک‌سازی

در این قسمت در ابتدا پس از معرفی مختصر بهینه‌سازی محدب، به بیان مسئله تنک‌سازی در قالب یک مسئله بهینه‌سازی محدب پرداخته خواهد شد.

در ریاضیات اصطلاح بهینه‌سازی به مطالعه مسائلی گفته می‌شود که در آن‌ها با انتخاب مقدار حقیقی از مجموعه مجاز، یک تابع حقیقی به حداقل یا حداکثر رسانده می‌شود. شکل

به همراه دارد؛ که برخی از آن‌ها با بهینه‌سازی موقعیت المان‌های آنتن جبران می‌شود، بنابراین با تغییر ساختار هندسی می‌توان تغییرات قابل توجهی در شکل الگوی تشعشی آرایه ایجاد کرد [۷]. از سوی دیگر ضریب آرایه یک تابع غیرخطی از فاصله عناصر است و تعداد حالات زیادی از ترکیب موقعیت عناصر وجود دارد؛ لذا مسئله بهینه‌سازی الگوی آرایه با توجه به موقعیت عناصر، مسئله‌ای غیرخطی و پیچیده است.

به‌طور کلی تنک‌سازی آرایه آنتن به دو صورت زیر انجام می‌پذیرد [۸]:

۱- تنک‌سازی آرایه با موقعیت‌های پیش‌فرض اولیه، جایی که آرایه تنک توسط انتخاب برخی عناصر آرایه اولیه (با موقعیت عناصر مشخص) تشکیل می‌شود. در این نوع تنک‌سازی، در صورتی که آرایه اولیه n عنصر داشته باشد، تعداد 2^n حالت برای آرایه تنک وجود خواهد داشت. در حالت خاص نیز اگر آرایه اولیه متقارن باشد، می‌توان تعداد حالات اولیه را به‌طور قابل توجهی کاهش داد. آرایه حاصل از این روش، آرایه نازک شده^۱ نام دارد.

۲- تنک‌سازی آرایه بدون موقعیت‌های پیش‌فرض اولیه؛ یعنی عناصر آرایه را می‌توان به صورت دلخواه و با فاصله بین عنصری غیریکنواخت در روزه^۲ آرایه جایگذاری کرد. با استفاده از فاصله‌گذاری غیریکنواخت عناصر، می‌توان از افزایش تعداد عناصر آرایه که جهت ایجاد مشخصات الگوی مورد نظر انجام می‌شود، جلوگیری کرد. در فاصله‌گذاری غیریکنواخت عناصر، پارامترهایی مانند سطح گلبرگ فرعی، توسط تنظیم سایر پارامترها از جمله موقعیت و ضرایب وزن‌دهی حداقل می‌شوند، در نتیجه تعداد عناصر ثابت باقی می‌ماند. در این نوع تنک‌سازی، با توجه به اینکه عناصر آرایه در هر جایی از روزه می‌توانند قرار بگیرند، تعداد بی‌نهایت حالت برای آرایه تنک وجود خواهد داشت.

واضح است که در الگوریتم نوع اول، با توجه به اینکه تعداد حالات محدود است، درجه آزادی فرایند تنک‌سازی کاهش می‌یابد؛ بنابراین الگوریتم نوع دوم در مقایسه با نوع اول (با تعداد عناصر یکسان) ممکن است مقدار بهینه‌تری برای پارامترهای آرایه آنتن (مثل حداکثر سطح گلبرگ فرعی) به دست آورد، اما در مقابل دارای پیچیدگی بیشتری نسبت به الگوریتم نوع اول می‌باشد.

از آرایه‌های تنک می‌توان در گیرنده‌های ماهواره که بهره اولویت دوم را دارد و مدیریت سطح گلبرگ‌های فرعی مهم است،

¹ Thinned Array

² Aperture

تجزیه و تحلیل ضریب آرایه می‌توان دریافت که الگوی تابشی این نوع آنتن‌ها علاوه بر نوع عناصر، به تعداد، موقعیت، دامنه و فاز آن‌ها بستگی دارد. در ادامه، با در نظر گرفتن موقعیت المان‌ها در یک صفحه مانند صفحه yz ، معادله (۲) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{AF} = \sum_{n=1}^N e^{(j\beta[y_n \sin \theta \sin \phi + z_n \cos \theta])} \quad (3)$$

در مراحل بعدی با استفاده از ضریب آرایه، این مسئله از دید ریاضی بررسی و به صورت یک مسئله بهینه‌سازی دارای قیود، نگاشته می‌شود. اگر مسئله فرمول‌بندی شده، محدب باشد، می‌توان آن را با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی محدب به‌طور مؤثر حل کرد. از جمله مزیت‌های بهینه‌سازی محدب می‌توان به برابری کمینه محلی و سراسری و حل مسئله با استفاده از روش‌های عددی بسیار کارآمد مانند روش نقطه داخلی اشاره کرد.

روش پیشنهادی در این مقاله بر پایه بهینه‌سازی محدب و شامل دو قسمت است. در قسمت اول به تعیین مشخصات الگوی تشعشعی موردنظر پرداخته می‌شود. این الگو منحصر به فرد نبوده و با توجه به ورودی‌های مسئله، الگوی موردنظر تغییر کرده و منجر به نتایج متفاوت در تعداد عناصر خواهد شد. در طرح پیشنهادی برای تعیین الگوی تشعشعی بهینه، ابتدا پارامتر پهنای گلبرگ اصلی یا حداکثر سطح گلبرگ فرعی به‌عنوان ورودی تعیین شده، سپس قیود مسئله با توجه به مقدار پارامتر باقی‌مانده تشکیل و مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_m, \phi_m) = 1 \quad (4)$$

$$\omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_s, \phi_s) \leq 10^{\frac{\max_sidelobe}{20}}$$

جایی که $\max_sidelobe$ حداکثر سطح گلبرگ فرعی بر حسب

دسی‌بل، $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$ بردار وزن‌دهی، (θ_m, ϕ_m) زاویه گلبرگ اصلی و (θ_s, ϕ_s) زوایای گلبرگ فرعی هستند. در این قسمت هدف تعیین متغیر وزن‌دهی ω است، به طوری که قیود مربوط به الگوی تشعشعی برآورده شود. از قید $\omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_m, \phi_m) = 1$ برای تضمین اینکه گلبرگ اصلی در جهت موردنظر دارای پاسخ واحد است، استفاده می‌شود؛ این قید همچنین از رسیدن به پاسخ غیرقابل قبول $\omega = \mathbf{0}$ جلوگیری می‌کند. لازم به ذکر است که در اینجا برای به دست آمدن ω بهینه، پارامتر ورودی از طریق روش دوبخشی تعیین و در توابع قیود قرار داده می‌شود. روش دوبخشی یک روش عملی برای به

ریاضی استاندارد مسائل بهینه‌سازی محدب به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f_0(x) \\ & \text{subject to } f_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (1)$$

در اینجا x متغیر بهینه‌سازی مسئله، $f_0: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع هدف (محدب) و $f_i: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ و $h_i: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ توابع قیود (محدب) می‌باشند [۱۶]. در این مسئله x شدنی^۱ است، اگر در دامنه تابع f_0 قرار داشته باشد و همه قیود مسئله را نیز برآورده کند؛ همچنین x بهینه است، اگر علاوه بر شروط x شدنی، به ازای آن، تابع هدف بهینه (حداقل یا حداکثر) شود. مزیت توابع محدب در این است که فقط یک‌بار تقعر دارند؛ لذا یافتن پاسخ محلی در این گونه مسائل با پاسخ سراسری برابر است. از جمله مسائل بهینه‌سازی محدب می‌توان به حداقل مربعات^۲، برنامه‌نویسی خطی^۳، برنامه‌نویسی درجه دوم^۴، بهینه‌سازی مخروطی^۵، برنامه‌نویسی هندسی^۶، برنامه‌نویسی نیمه‌بی‌نهایت^۷ و حداکثرسازی آنروپی اشاره کرد؛ همچنین این مسائل را می‌توان با روش‌های مختلفی مانند روش بیضوی، روش نیوتون، الگوریتم ساده دانتزیگ، الگوریتم صفحه برش، روش گرادیان کاهشی و روش نقطه داخلی^۸ حل کرد. در اینجا (مسئله تنک‌سازی) پهنای گلبرگ اصلی و سطح گلبرگ فرعی به صورت توابع قیود اثر داده شده و الگوی تابشی آرایه از نظر سایر پارامترهای آنتن بهینه می‌شود.

در ادامه، روشی پیشنهاد می‌شود که در آن با استفاده از بردار وزن‌دهی بتوان طراحی آرایه‌های تنک را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب مدل‌سازی کرد.

برای معرفی مسئله پیاده‌سازی، یک آنتن آرایه‌ای صفحه‌ای $M \times M = N$ که متشکل از عناصر همسانگرد^۹ با فاصله یکنواخت (نصف طول موج) است، در نظر گرفته می‌شود. شکل کلی ضریب آرایه به صورت زیر می‌باشد [۱۷]:

$$\mathbf{AF} = \sum_{n=1}^N e^{(j\beta[x_n \sin \theta \cos \phi + y_n \sin \theta \sin \phi + z_n \cos \theta])} \quad (2)$$

جایی که (x_n, y_n, z_n) موقعیت عنصر n -ام، β ثابت انتشار، θ و ϕ به ترتیب زاویه گلبرگ اصلی در ارتفاع و سمت هستند. با

¹ Feasible

² Least Squares

³ Linear Programming

⁴ Quadratic Programming

⁵ Conic Optimization

⁶ Geometric Programming

⁷ Semi Definite Programming

⁸ Interior-Point Method

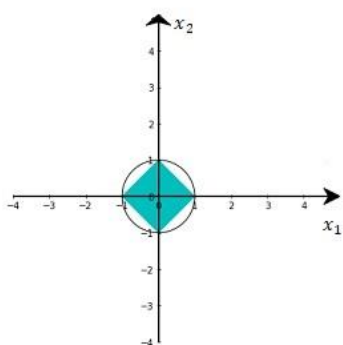
⁹ Isotropic

شد؛ در نهایت کوچک‌ترین مقدار ممکن عرض گلبرگ اصلی که با توجه به آن مسئله شدنی است، مشخص شده و الگوی تشعشی بهینه (از لحاظ سطح گلبرگ فرعی و عرض گلبرگ اصلی) به دست می‌آید. پس از به دست آمدن الگوی تشعشی بهینه به قسمت دوم الگوریتم پیشنهادی؛ یعنی تنک‌سازی آرایه با توجه به الگوی تشعشی به دست آمده پرداخته می‌شود. برای تنک‌سازی آرایه با توجه به وزن عناصر، از نرم صفر بردار وزن‌دهی استفاده شده است، زیرا نرم صفر تعداد مؤلفه‌های غیرصفر بردار وزن‌دهی $(\|\omega\|_0 = \sum_{n=1}^N 1_{|w_n \neq 0|})$ را نشان می‌دهد [۱۸]، که باید در مسئله حداقل شود؛ بنابراین مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

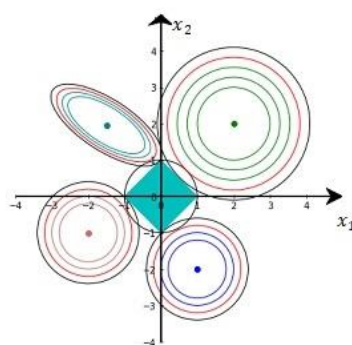
$$\min_{\omega} \|\omega\|_0$$

$$\omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_m, \phi_m) = 1 \quad (5)$$

$$\omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_s, \phi_s) \leq 10 \frac{\max_sidelobe}{20}$$



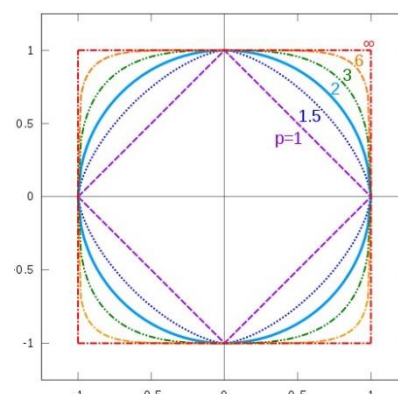
(ب)



شکل (۱). (الف) نمایش توابع نرم مختلف $\|\omega\|_p$ (ب) مقایسه شهودی نرم یک و نرم دو برای محدب‌سازی مسئله (۵) [۳۷]

را دارا باشد. همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، از میان توابع نرم (به‌خصوص نرم یک و دو)، نرم یک به دلیل ویژگی‌های هندسی خاص خود، احتمال ایجاد تقاطعی را که یک جزء از حل آن صفر و به‌عبارت‌دیگر منجر به تنک‌سازی شود، افزایش می‌دهد؛ به همین دلیل، با توجه به نظریه در [۲۱]، راه‌حلی که در اینجا برای چنین مشکلی پیشنهاد شده است، استفاده از روش تکراری وزن‌دهی مجدد تابع نرم یک $\|\omega\|_1 = \sum_{n=1}^N |\omega_n|$ می‌باشد. در این روش به‌جای نرم صفر، از حداقل‌سازی نرم یک برای کنترل تنک‌سازی آرایه استفاده می‌شود. ایده اصلی الگوریتم این است که با ضرایبی، نرم یک را تا حد امکان به نرم صفر نزدیک کند. می‌توان نشان داد که چنین تقریبی از تقریب نرم یک به‌تنهایی دقیق‌تر است و راه‌حل‌های تنک‌تری را نسبت به نرم یک ارائه می‌دهد [۲۲]؛ بنابراین با توجه به روش جایگزین

دست آمدن ریشه‌های یک معادله است. این روش به‌طور مکرر فاصله اولیه را به دو زیر فاصله تقسیم و سپس زیر فاصله‌ای را انتخاب می‌کند که ریشه معادله باید در آن باشد. این روش زمانی کاربرد دارد که معادله $f(x) = 0$ برای متغیر اسکالر x حل شود، به‌طوری‌که $f(x)$ یک تابع پیوسته باشد. فرض کنید $f(x_1) = a < 0$ و $f(x_2) = b > 0$ باشند، اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته باشد؛ بنابراین باید در برخی از مقادیر x ، که بین x_1 و x_2 قرار دارند، صفر شود. روش دوبخشی به محاسبه $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ و $y = f(x_3)$ پرداخته و در صورتی‌که y غیر صفر باشد، از روی علامت‌های a و b و y می‌توان تصمیم گرفت، که ریشه در بازه بین x_1 و x_3 یا x_2 و x_3 قرار دارد. این مراحل تا رسیدن به تقریب قابل‌قبول از ریشه، در بازه‌های جدید به‌دست‌آمده تکرار می‌شود. در این قسمت نیز بعد از تعیین پارامتر ورودی برای مثال سطح گلبرگ فرعی، مسئله از لحاظ پارامتر باقی‌مانده؛ یعنی عرض گلبرگ اصلی به‌وسیله روش دوبخشی موردبررسی قرار می‌گیرد. اگر مسئله حل شود، مقادیر کوچک‌تر از مقدار فعلی ورودی و در غیر این صورت، مقادیر بزرگ‌تر از آن به روش دوبخشی به دست آمده و بررسی خواهد



(الف)

در اصل دستیابی به آرایه تنک با حل مسئله (۵) باید امکان‌پذیر باشد، اما مشکلی که در تابع هدف (۵-۱) وجود دارد، عدم تحدب تابع نرم صفر و چندجمله‌ای غیرقطعی سخت بودن مسئله است. مسائل چندجمله‌ای غیرقطعی یک نوع فوق‌العاده از مسائل است، جایی که راه‌حل فرضی آن چندجمله‌ای است (که در حالت کلی برقرار نیست) [۱۹]. چندجمله‌ای غیرقطعی سخت یک نوع جدا از مسائل است که به‌عنوان سخت‌ترین مسائل در چندجمله‌ای غیرقطعی تعریف شده‌اند و در عمل تاکنون برای چنین مسائلی راه‌حل سریع و قابل انجام در زمان معقول پیدا نشده است و به احتمال زیاد در آینده نیز یافت نخواهد شد. می‌توان نشان داد که $\min_{\omega} \|\omega\|_0$ یک مسئله چندجمله‌ای غیرقطعی سخت و غیرمحدب است [۲۰]. در نتیجه باید از تابع نرمی استفاده کرد، که علاوه بر تشابه با نرم صفر، ویژگی تحدب

کاهش DRR یک مزیت مهم است، زیرا امکان کنترل بهتر توزیع متقابل و کاهش هزینه شبکه تغذیه را فراهم می‌کند. در اینجا نیز برای تنظیم DRR، با اعمال محدودیت بر روی حداکثر میزان بردار وزن‌دهی عناصر آرایه یعنی $\|\omega\|_\infty = \max_i |\omega_i|$ می‌توان مسئله (۶) را به صورت مسئله (۹) یا (۱۰) تبدیل کرد. در (۹-۱) با اعمال مقادیر مثبت به ثابت γ در تابع هدف، می‌توان نقاط بهینه منحنی حد آستانه بین $\|Z \cdot \omega\|_1$ و $\|\omega\|_\infty$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned} \min_{\omega} & \|Z_{i-1} \cdot \omega_i\|_1 + \gamma \cdot \|\omega\|_\infty \\ \omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_m, \phi_m) &= 1 \\ \omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_s, \phi_s) &\leq 10^{\frac{\max_sidelobe}{20}} \end{aligned} \quad (9)$$

در مسئله (۱۰) نیز با استفاده از ثابت M ، بر روی کران بالای $\|\omega\|_\infty$ اعمال محدودیت شده و برخلاف مسئله (۹)، محدودیت ناشی از DRR، به توابع قیود منتقل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} & \|Z_{i-1} \cdot \omega_i\|_1 \\ \omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_m, \phi_m) &= 1 \\ \omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_s, \phi_s) &\leq 10^{\frac{\max_sidelobe}{20}} \\ \min_{\omega} & \|Z_{i-1} \cdot \omega_i\|_1 + \gamma \cdot \|\omega\|_\infty \end{aligned} \quad (10)$$

در مسائل (۹) و (۱۰) نیز همانند مسئله (۶)، مراحل الگوریتم تکرار شده و بردار وزن‌دهی بهینه به دست می‌آید، در نتیجه این روش نیاز به طراحی بر اساس موقعیت المان‌ها را از بین برده و آرایه‌های تنک را می‌توان به راحتی از طریق تکنیک‌های بهینه‌سازی محدب پیاده‌سازی کرد.

۳- شبیه‌سازی

در این بخش، روش پیشنهادی به ترتیب در مرحله اول و دوم به صورت مسائل (۴) و (۹ یا ۱۰) در نظر گرفته می‌شوند و تأثیر مقادیر مختلف پارامترهای ثابت ϵ ، γ و M بر روی نتایج شبیه‌سازی از قبیل میزان تنک‌سازی، مقدار DRR و تعداد تکرار موردبررسی قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی‌های مربوطه در برنامه متلب و با استفاده از cvx و حل‌کننده MOSEK انجام می‌شود. cvx یک سیستم مدل‌سازی برای ساخت و حل برنامه‌های محدب منضبط^۲ است، و می‌توان از آن برای فرمول‌بندی و حل آسان مسائلی همانند حداقل‌سازی نرُم‌های قیوددار، حداکثرسازی آنتروپی و

مذکور، مسئله در تکرار i -ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} & \|Z_{i-1} \cdot \omega_i\|_1 \\ \omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_m, \phi_m) &= 1 \\ \omega \cdot \mathbf{AF}(\theta_s, \phi_s) &\leq 10^{\frac{\max_sidelobe}{20}} \end{aligned} \quad (6)$$

مقدار اولیه Z ، ماتریس واحد به ابعاد $M \times M$ است، که در تکرارهای بعدی به صورت ماتریس قطری درآمده، و مؤلفه قطری i -ام آن در تکرار i -ام به صورت زیر به دست می‌آید:

$$z_{j,i} = \frac{1}{|\omega_{j,i-1}| + \epsilon} \quad (7)$$

در (۷) پارامتر ϵ برای پایداری عددی و اینکه ω_{i-1} در تکرار $(i-1)$ -ام، مقدار صفر را به ω_i در تکرار i -ام تحمیل نکند، استفاده می‌شود؛ که به طور تجربی در [۲۱] نشان داده شده است، که ϵ باید کمی کوچک‌تر از دامنه کوچک‌ترین مؤلفه غیرصفر ω پیاده‌سازی شده باشد. در این روش پارامتر ϵ در تکرار اول تعیین، سپس مراحل الگوریتم تا تعداد دفعات لازم به صورت زیر تکرار می‌شود:

در مرحله اول، مسئله حداقل‌سازی محدب (۶) حل می‌شود و مقادیر جدید ω به دست می‌آید. در مرحله دوم ماتریس Z بر اساس مؤلفه ω به دست آمده، به روزرسانی می‌شود. در مرحله سوم، مؤلفه‌هایی از ω که دامنه آن‌ها از مقدار ϵ کمتر می‌باشد، با مقدار صفر جایگزین شده، و بردار وزن‌دهی جدید $\bar{\omega}$ به دست می‌آید. این سه مرحله تا زمانی که در پنج تکرار متوالی مقادیر $\bar{\omega}$ به دست آمده برابر باشند و تعداد عناصر فعال تغییر نکند، ادامه می‌یابند. در بردار وزن‌دهی به دست آمده، مقدار صفر نشان‌دهنده اضافه بودن عنصر مربوطه بوده و باید حذف گردد؛ به این ترتیب آرایه تنک با استفاده از حذف عنصرهایی با وزن تقریباً صفر، به دست می‌آید. این عمل منجر به الگوی تشعشی بهینه‌تر می‌شود، که به آنتن‌های کمتری احتیاج دارد و همان مشخصات حاصل از یک آرایه غیرتنک را برآورده می‌کند. یک پارامتر دیگر که اغلب در مسائل سنتز آرایه موردتوجه می‌باشد، نسبت محدوده دینامیکی^۱ ضرایب وزن‌دهی آرایه است [۲۴-۳۳]، که با فرض $\omega_m \neq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DRR = \frac{\max_{1 \leq m \leq n} |\omega_m|}{\min_{1 \leq m \leq n} |\omega_m|} \quad (8)$$

^۲ Disciplined Convex Programs

^۱ Dynamic Range Ratio (DRR)

اول، در قیود مسئله (۹) و (۱۰) قرار داده می‌شود. با توجه به اینکه مسئله با ۱۲۱ عنصر در قسمت اول، از لحاظ عرض گلبرگ اصلی و حداکثر سطح گلبرگ فرعی بهینه شده است، برای شدنی کردن مسئله در قسمت دوم (کاهش تعداد عناصر)، حداکثر سطح گلبرگ فرعی در قیود این قسمت، در حدود ۰/۲۵ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

در ابتدا به مسئله (۹) پرداخته و تأثیر مقادیر پارامترهای ε و γ بررسی می‌شود. در جدول (۲) تأثیر پارامتر ε نشان داده شده است، در این جدول با فرض $\gamma = 2$ و تغییرات ε ، نتایج مشابهی از لحاظ تعداد المان و تعداد تکرار به دست می‌آید. همان‌طور که در جدول (۲) نمایش داده شده است، با توجه به اینکه کاهش تعداد عناصر، باعث تخریب الگوی تشعشعی آرایه می‌شود، در اینجا حداکثر سطح گلبرگ فرعی افزایشی جزئی داشته است.

در ادامه با فرض $\varepsilon = 10^{-3}$ ، تغییرات γ و اثر آن بر روی پارامترهای مسئله بهینه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است، که نتایج آن در جدول (۳) نشان داده شده است. همان‌طور که در جدول (۳) مشاهده می‌شود، افزایش γ رابطه منطقی با افزایش و کاهش تنک‌سازی ندارد و بهترین نتیجه از میان شبیه‌سازی‌های ارائه شده، با مقدار $\gamma = 1/5$ و تعداد ۴۳ عنصر به دست می‌آید. همچنین DRR نیز نوسانات متفاوتی دارد، که کمترین مقدار آن نیز با $\gamma = 4$ به میزان ۱۰ به دست می‌آید.

بسیاری از برنامه‌های محدب دیگر استفاده کرد [۲۳]. مسئله معیاری که برای ارزیابی روش پیشنهادی در اینجا در نظر گرفته شده، تنک‌سازی آرایه صفحه‌ای 11×11 در صفحه yz ، با فرکانس کاری ده گیگاهرتز می‌باشد، که جهت گلبرگ اصلی آن، صفر درجه در سمت و صفر درجه در ارتفاع است. در ابتدا به بررسی مسئله (۴) پرداخته می‌شود. در قسمت اول الگوریتم با تعیین عرض گلبرگ اصلی یا حداکثر سطح گلبرگ فرعی به‌عنوان ورودی، مسئله (۴) به‌وسیله بهینه‌سازی محدب حل شده و مقدار بهینه پارامتر ورودی به دست می‌آید. در اینجا با تعیین حداکثر سطح گلبرگ فرعی به میزان ۲۷- دسی‌بل، حداکثر پهنای پرتو نصف توان گلبرگ اصلی در راستای سمت یا ارتفاع (از طریق روش دوبخشی) به دست می‌آید. جدول (۱) مقادیر به‌دست‌آمده از قسمت اول الگوریتم را برای فواصل بین عنصری متفاوت نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول (۱) نشان داده شده، کمترین پهنای پرتو نصف توان گلبرگ اصلی مربوط به فاصله بین عنصری 0.18λ می‌باشد، اما محدوده اسکن الکترونیکی آن نیز به‌تناسب از بقیه فواصل کوچک‌تر است.

قابل توجه است که در صورتی که مسئله (۴) شدنی نشود، می‌توان با تغییر پارامترهای مربوط به قیود مسئله، آن را به یک مسئله شدنی تبدیل کرد.

در قسمت دوم الگوریتم نیز، با در نظر گرفتن فاصله بین عنصری 0.45λ ، مقدار پارامترهای بهینه به‌دست‌آمده از قسمت

جدول (۱). شبیه‌سازی مسئله (۴) برای گلبرگ اصلی در جهت $(\theta_m, \phi_m) = (0, 0)$ و حداکثر سطح گلبرگ فرعی (۲۷-) دسی‌بل

$PSL_{\theta, dB}$	$PSL_{\phi, dB}$	$HPBW_{\theta}$	$HPBW_{\phi}$	فاصله بین عناصر
-۲۷/۶۷	-۲۷/۱۲	14°	$13/0.8^{\circ}$	0.45λ
-۳۱/۲۴	-۲۷/۰۳	14°	$11/56^{\circ}$	0.50λ
-۳۵/۲۲	-۲۷/۰۲	12°	$10/68^{\circ}$	0.55λ
-۳۸/۳	-۲۷/۰۴	12°	$9/86^{\circ}$	0.60λ
-۳۸/۱۴	-۲۷/۱۷	12°	$9/06^{\circ}$	0.65λ
-۳۲/۰۲	-۲۷/۰۳	10°	$8/28^{\circ}$	0.7λ
-۳۲/۰۲	-۲۷/۰۳	10°	$7/74^{\circ}$	0.75λ
-۴۱/۳۴	-۲۶/۹	10°	$7/38^{\circ}$	0.80λ

جدول (۲). شبیه‌سازی مسئله (۹) برای مقایسه مقادیر متفاوت ε با فاصله بین عنصری 0.45λ و $\gamma = 2$

$PSL_{\theta, dB}$	$PSL_{\phi, dB}$	$HPBW_{\theta}$	$HPBW_{\phi}$	تکرار	DRR	$\bar{\omega}$	ε
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۳	20°	$13/18^{\circ}$	۶	۹/۷	۴۴	10^{-3}
-۲۶/۷۵	-۲۶/۸۴	20°	$13/1^{\circ}$	۱۰	۸/۵	۴۳	10^{-4}
-۲۶/۷۶	-۲۶/۸۴	20°	$13/1^{\circ}$	۱۰	۸/۶	۴۳	10^{-5}
-۲۶/۷۶	-۲۶/۸۴	20°	$13/1^{\circ}$	۱۰	۸/۶	۴۳	10^{-6}
-۲۶/۷۶	-۲۶/۸۴	20°	$13/1^{\circ}$	۱۰	۸/۶	۴۳	10^{-7}

جدول (۳). شبیه‌سازی مسئله (۹) برای مقایسه مقادیر متفاوت γ با فاصله بین عنصری 0.45λ و $\varepsilon = 10^{-5}$

$PSL_{\theta, dB}$	$PSL_{\phi, dB}$	$HPBW_{\theta}$	$HPBW_{\phi}$	تکرار	DRR	$\bar{\omega}$	γ
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۴	۲۰°	۱۳/۰۴°	۸	۴۷	۴۴	۰
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۱	۱۹°	۱۳/۱۴°	۱۶	۲۶	۴۶	۰/۰۱
-۲۶/۹۹	-۲۶/۷۵	۲۰°	۱۳/۲°	۱۳	۱۳	۴۳	۰/۱
-۲۶/۸۱	-۲۶/۷۶	۱۹°	۱۳/۱۷°	۱۸	۲۱	۴۵	۰/۵
-۲۶/۸	-۲۶/۷۳	۱۹°	۱۳/۱۷°	۱۵	۲۱	۴۵	۱
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۱	۲۰°	۱۳/۱۱°	۹	۱۲	۴۳	۱/۵
-۲۶/۷۶	-۲۶/۷۴	۱۹°	۱۳/۱۷°	۷	۱۹/۷	۴۴	۳
-۲۶/۸۷	-۲۶/۷۳	۱۹°	۱۳/۱۷°	۹	۱۰	۴۴	۴
-۲۷	-۲۶/۷۵	۲۰°	۱۳/۱۹°	۷	۱۲/۳	۴۳	۵
-۲۶/۷۷	-۲۶/۷۳	۲۰°	۱۳/۱۷°	۵	۱۰/۷	۴۴	۸

مشاهده می‌شود بهترین نتیجه از میان شبیه‌سازی‌های ارائه شده، با مقدار $M = 4$ و با تعداد ۴۲ عنصر به دست می‌آید. همچنین DRR نیز نوسانات متفاوتی دارد، که کمترین مقدار آن نیز با $M = 0.488$ به میزان ۷/۱ به دست می‌آید.

در مسئله (۱۰) نیز، در ابتدا تأثیر پارامتر ε در جدول (۴) بررسی و به‌مانند مسئله (۹) برای مقادیر متفاوت ε نتایج مشابهی به دست آمد.

در جدول (۵) نیز اثر M نشان داده شده است، همان‌طور که

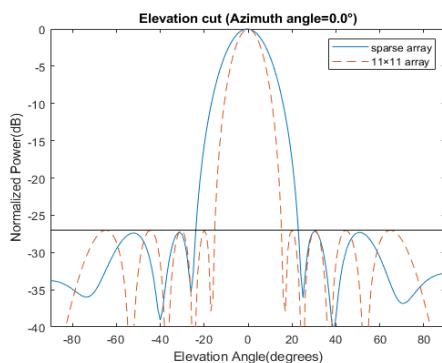
جدول (۴). شبیه‌سازی مسئله (۱۰) برای مقایسه مقادیر متفاوت ε با فاصله بین عنصری 0.45λ و $M = 4$

$PSL_{\theta, dB}$	$PSL_{\phi, dB}$	$HPBW_{\theta}$	$HPBW_{\phi}$	تکرار	DRR	$\bar{\omega}$	ε
-۲۶/۸۳	-۲۶/۷۷	۲۰°	۱۳/۱۳°	۱۷	۱۵/۵۵	۴۴	10^{-3}
-۲۶/۸۱	-۲۶/۷۵	۲۰°	۱۳/۰۴°	۹	۹/۷	۴۳	10^{-4}
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۵	۲۱°	۱۳/۱۹°	۸	۱۵/۹	۴۲	10^{-5}
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۶	۲۰°	۱۳/۰۴°	۷	۱۱/۵	۴۳	10^{-6}
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۶	۲۰°	۱۳/۰۴°	۷	۱۱/۲	۴۳	10^{-7}

به‌جای افزایش حداکثر سطح گلبیگ فرعی در قیود، عرض گلبیگ اصلی را افزایش داد، در این صورت تعداد عناصر به ۳۷ عدد کاهش می‌یابد، که در شکل (۲) آرایش عناصر و اندازه ضرایب وزن‌دهی اعمالی به آن‌ها نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برخی از عناصر کناری به جهت کاهش پهنای گلبیگ اصلی به‌طور کامل حذف نمی‌شوند.

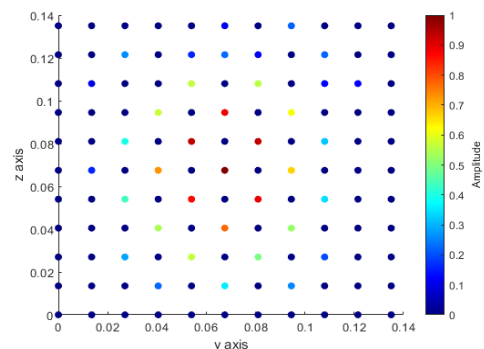
همان‌طور که مشاهده شد بهترین نتیجه از میان شبیه‌سازی‌های ارائه شده، به‌وسیله مسئله (۹) و با افزایش سطح گلبیگ فرعی به

اندازه 0.25 دسی‌بل، $\varepsilon = 10^{-5}$ و با تعداد ۴۲ عنصر و $DRR = 15/94$ به دست می‌آید؛ همچنین می‌توان



شکل (۳). الگوی تشعشی دو بعدی آرایه 11×11 تنک شده با

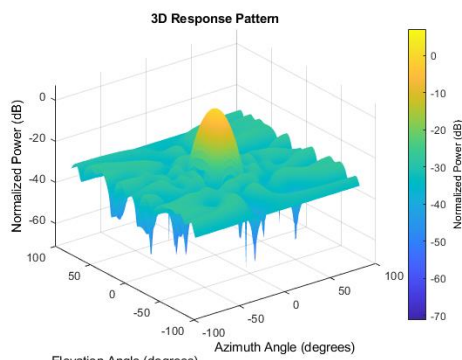
$$M = 4 \text{ و } \varepsilon = 10^{-5}$$



شکل (۲). آرایش عناصر آرایه 11×11 تنک شده با فاصله بین عنصری

$$M = 4 \text{ و } \varepsilon = 10^{-5} / 0.45\lambda$$

در انتهای این قسمت، برای ارزیابی روش پیشنهادی، در جدول (۶) به مقایسه نتایج روش‌های تنک‌سازی ارائه شده در مقالات مرجع و روش پیشنهادی در این مقاله پرداخته می‌شود. همان‌طور که در جدول (۶) مشاهده می‌شود، این روش نسبت به روش‌های مراجع اشاره‌شده، میزان تنک‌سازی را افزایش داده و پارامترهای الگوی تشعشعی را حفظ می‌کند. در ردیف آخر جدول (۶)، به‌جای افزایش حداکثر سطح گلبرگ فرعی، پهنای گلبرگ اصلی به میزان 2° افزایش (کاهش بهره) داده شده است؛ همچنین پارامتر DRR در مقایسه با [۲۰] از $33/27$ به ترتیب به $15/94$ و $9/85$ بهبود پیدا کرده است. مسائل بهینه‌سازی محدب مورد بحث در بالا با استفاده از روش‌های عددی کارآمد محاسبات عددی بر روی یک رایانه با پردازنده مرکزی هفت هسته‌ای $2/5$ گیگاهرتز و حافظه دسترسی تصادفی ۸ گیگابایت انجام شده است، که تعداد تکرارهای مورد نیاز همیشه کمتر از بیست و کل زمان اجرای برنامه (مرحله تنک‌سازی) بین ۱۵ تا ۳۵ دقیقه می‌باشد.



شکل (۴). الگوی تشعشعی سه بعدی آرایه 11×11 تنک شده با

$$M = 4 \text{ و } \varepsilon = 10^{-5}$$

در شکل‌های (۳) و (۴) نیز به ترتیب الگوی تشعشعی دوبعدی و سه‌بعدی آرایه تنک شده، نمایش داده شده است. در شکل (۳) ملاحظه می‌شود که سطح گلبرگ فرعی از $27/17$ - دسی‌بل بالاتر نمی‌رود و عرض پرتو نصف توان به دلیل کاهش تعداد عناصر به 19° می‌رسد (کاهش بهره).

جدول (۵). شبیه‌سازی مسئله (۱۰) برای مقایسه مقادیر متفاوت M با فاصله بین عنصری 0.45λ و $\varepsilon = 10^{-5}$.

$PSL_{\theta, dB}$	$PSL_{\phi, dB}$	$HPBW_{\theta}$	$HPBW_{\phi}$	تکرار	DRR	$\bar{\omega}$	M
-۲۶/۰۶	-۲۶/۷۵	14°	$13/14^\circ$	۹	۵/۲	۶۰	۰/۰۱
-۲۶/۰۶	-۲۶/۷۵	14°	$13/14^\circ$	۱۵	۵/۲	۶۰	۰/۰۲
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۴	18°	$13/21^\circ$	۸	۱۷/۱۵	۴۹	۰/۰۴
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۲	19°	$13/2^\circ$	۱۰	۱۵/۱	۴۹	۰/۱
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۳	20°	$13/16^\circ$	۶	۱۹/۸	۴۴	۰/۴
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۵	19°	$13/2^\circ$	۵	۴۴/۸	۴۴	۰/۵
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۴	20°	$13/21^\circ$	۶	۱۲/۳	۴۳	۱
-۲۶/۳۵	-۲۶/۷۵	20°	$13/0.9^\circ$	۱۰	۱۰/۳	۴۴	۱/۵
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷	20°	$13/16^\circ$	۸	۱۹/۵	۴۴	۲
-۲۶/۷۵	-۲۶/۷۵	21°	$13/19^\circ$	۸	۱۵/۹۴	۴۲	۴

جدول (۶). مقایسه عملکرد روش‌های تنک‌سازی

DRR	$PSL_{\theta, dB}$	بهره	تعداد عناصر	آرایه
-	-۲۴/۱۱	۱۲/۲۴	۱۲۱	مرجع [۳۴]
-	-۲۴/۵۳	-	۵۷	مرجع [۳۵]
-	-۲۵/۵۸	۱۲/۲۹	۴۶	مرجع [۳۶]
$33/27$	-۲۵/۸۵	-	۸۵	مرجع [۲۰]
$8/9$	-۲۷	$13/76$	۱۲۱	آرایه 11×11 سنتز شده با روش چپی‌شف
$15/94$	-۲۶/۷۵	$11/51$	۴۲	روش پیشنهادی (افزایش سطح گلبرگ فرعی)
$9/85$	-۲۷/۱۷	$11/13$	۳۷	روش پیشنهادی (افزایش پهنای گلبرگ اصلی)

- [3] S. A. Schelkunoff, "A mathematical theory of linear arrays," *The Bell System Technical Journal*, vol. 22, no. 1, pp. 80-107, 1943.
- [4] B. Fuchs, "On the use of Convex Optimization for Array Synthesis Problems," in *2019 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, 2019.
- [5] M. Nasri & D. Zarifi, "Design and Simulation of Waveguide Rotary Joint Based on Gap Waveguide Technology for 60 GHz Applications," *Scientific Journal of Radar*, vol. 8, no. 2, pp. 73-78, 2020.
- [6] B. Fuchs & S. Rondineau, "Array pattern synthesis with excitation control via norm minimization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 10, pp. 4228-4234, 2016.
- [7] Fateme Asgari & F. Foroohar, "Array Geometry Optimization for Beamforming in Smart Antenna Systems," *Scientific Journal of Applied Electromagnetics*, vol. 1, no. 1, pp. 9-18, 2015.
- [8] L. Cen, W. Ser, W. Cen & Z. L. Yu, "Linear sparse array synthesis via convex optimization," in *Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2010.
- [9] Y. Liu, Z. Nie & Q. H. Liu, "Reducing the number of elements in a linear antenna array by the matrix pencil method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 9, pp. 2955-2962, 2008.
- [10] K. Chen, H. Chen, L. Wang & H. Wu, "Modified real GA for the synthesis of sparse planar circular arrays," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 15, pp. 274-277, 2015.
- [11] K. V. Deligkaris, Z. D. Zaharis, D. G. Kampitaki, S. K. Goudos, I. T. Rekanos & M. N. Spasos, "Thinned planar array design using Boolean PSO with velocity mutation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, no. 3, pp. 1490-1493, 2009.
- [12] V. Murino, A. Trucco & C. S. Regazzoni, "Synthesis of unequally spaced arrays by simulated annealing," *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 44, no. 1, pp. 119-122, 1996.
- [13] O. Quevedo-Teruel & E. Rajo-Iglesias, "Ant colony optimization in thinned array synthesis with minimum sidelobe level," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 5, pp. 349-352, 2006.
- [14] D. Pinchera, M. D. Migliore, F. Schettino, M. Lucido & G. Panariello, "An effective compressed-sensing inspired deterministic algorithm for sparse array synthesis," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 1, pp. 149-159, 2017.
- [15] D. G. Kurup, M. Himdi & A. Rydberg, "Synthesis of uniform amplitude unequally spaced antenna arrays using the differential evolution algorithm," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 9, pp. 2210-2217, 2003.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک طرح سنتز برای طراحی آرایه‌های تنک پیشنهاد شده است و هدف از آن به حداقل رساندن تعداد عناصر آنتن آرایه‌ای می‌باشد که دارای گلبرگ اصلی (با زاویه مرکزی و عرض مشخص) و حداکثر سطح گلبرگ فرعی از پیش تعیین شده است. در ابتدا، این مسئله به صورت یک مسئله بهینه‌سازی محدب قیددار فرموله شده و وزن المان‌ها بر اساس سه معیار عرض گلبرگ اصلی، سطح گلبرگ فرعی و به حداکثرسازی پراکندگی وزن عناصر آرایه، به وسیله الگوریتم وزن دهی مجدد تابع نرُم یک بهینه می‌شود. هر تکرار الگوریتم نیاز به حل یک مسئله بهینه‌سازی محدب؛ یعنی حل مسئله حداقل‌سازی نرُم یک قیوددار دارد. الگوریتم معمولاً (در صورت شدنی بودن قیود مسئله) پس از تعداد کمی تکرار همگرا می‌شود و آرایه تنک شده بدون نیاز به بهینه‌سازی موقعیت المان‌ها به طور مستقیم و با حذف عناصری که وزن تقریباً صفر دارند، به دست می‌آید؛ بنابراین یک آرایه تنک، با نیاز به تعداد آنتن‌های کمتر را می‌توان به دست آورد که تقریباً همان مشخصات الگوی تشعشعی به دست آمده توسط یک آرایه غیرتنک را برآورده می‌کند. روش پیشنهادی می‌تواند آرایه‌ای با فاصله غیریکنواخت را، بدون ظاهر شدن گلبرگ‌های جعلی در الگوی حاصل طراحی کند که برای نشان دادن کارایی آن، آرایه صفحه‌ای 11×11 بررسی و تعداد عناصر حاصل به ۴۲ (با افزایش سطح گلبرگ فرعی) و ۳۷ عنصر (با افزایش پهنای گلبرگ اصلی) کاهش یافت. همچنین پارامتر DRR در مقایسه با [۲۰]، از $33/37$ به $15/94$ بهبود پیدا کرده است. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دستاوردهای قابل قبولی با هزینه محاسباتی بسیار کمتر نسبت به روش‌های مبتنی بر بهینه‌سازی سراسری در سنتز آرایه با فاصله غیریکنواخت به دست می‌آورد. علاوه بر این، از آرایه به دست آمده می‌توان در رادارهای زمین پایه و همچنین در گیرنده‌های ماهواره برای مقابله با کلاتر و نویز اتمسفری استفاده کرد، که در هر دو بهره اولویت دوم را دارد و مدیریت سطح گلبرگ‌های فرعی دارای اهمیت است. به عنوان گام‌های بعدی می‌توان اثر روش پیشنهادی را برای تنک‌سازی آرایه صفحه‌ای دارای عناصر غیرهمسانگرد و آرایه‌های غیرمسطح مورد بررسی قرار داد.

۵- مراجع

- [1] G. Mohal, J. Kaur & A. Kaur, "Radiation pattern analysis and synthesis of antenna arrays using convex optimization," *International Journal of Electronics Engineering*, vol. 2, no. 2, pp. 279-282, 2010.
- [2] H. Leuret & S. Boyd, "Antenna array pattern synthesis via convex optimization," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 45, no. 3, pp. 526-532, 1997.

- [28] Fan, J. Liang, Y. Zhang, H. So & X. Zhao, "Shaped power pattern synthesis with minimization of dynamic range ratio," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 67, no. 5, pp. 3067-3078, 2019.
- [29] B. Fuchs & S. Rondineau, "Array pattern synthesis with excitation control via norm minimization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 10, pp. 4228-4234, 2016
- [30] Z. Xu, Y. Liu, M. Li & Y. Li, "Linearly polarized shaped power pattern synthesis with dynamic range ratio control for arbitrary antenna arrays," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 53621-53628, 2019.
- [31] R. Gholami, B. Zakeri, H. Abedi & S. Mohseni, "Reduction of dynamic range ratio through competition over resources to synthesize planar array antennas," *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol. 70, no. 11, pp. 1522-1531, 2016.
- [32] X. Fan, J. Liang, Y. Jing, H. So, Q. Geng & X. Zhao, "Sum/Difference Pattern Synthesis with Dynamic Range Ratio Control for Arbitrary Arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2021.
- [33] X. Fan, J. Liang & H. C. So, "Beampattern synthesis with minimal dynamic range ratio," *Signal Processing*, vol. 152, pp. 411-416, 2018.
- [34] H. L. Van Trees, "Optimum array processing: Part iv of detection," *Estimation, and Modulation Theory*, 2002.
- [35] M. D'Urso, G. Prisco & R. M. Tumolo, "Maximally sparse, steerable, and nonsuperdirective array antennas via convex optimizations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 64, no. 9, pp. 3840-3849, 2016.
- [36] C. Yan, P. Yang, Z. Xing & S. Y. Huang, "Synthesis of planar sparse arrays with minimum spacing constraint," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 17, no. 6, pp. 1095-1098, 2018
- [37] V. Chekka, "<https://towardsdatascience.com/towards-data-science>, 30 August 2018. [Online]. Available:<https://towardsdatascience.com/regularization-in-machine-learning-connecting-the-dots-c6e030bfadd>. [Accessed 1 January 2021].
- [16] S. Boyd, S. P. Boyd & L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.
- [17] "University of Toronto: Electromagnetics Group," University of Toronto, 2016. [Online]. Available: <https://www.waves.utoronto.ca/prof/svhum/ece422/notes/15-arrays2.pdf>.
- [18] V. Jain, "Zero-norm optimization: Models and applications," 2010.
- [19] C. Bencivenni, "Sparse array synthesis of complex antenna elements," *Chalmers Tekniska Hogskola (Sweden)*, 2015.
- [20] S. E. Nai, W. Ser, Z. L. Yu & H. Chen, "Beampattern synthesis for linear and planar arrays with antenna selection by convex optimization," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 12, pp. 3923-3930, 2010.
- [21] E. J. Candes, M. B. Wakin & S. P. Boyd, "Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization," *Journal of Fourier analysis and applications*, vol. 14, no. 5, pp. 877-905, 2008.
- [22] G. Prisco & M. D'Urso, "Maximally sparse arrays via sequential convex optimizations," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 11, pp. 192-195, 2012.
- [23] M. C. Grant & S. P. Boyd, "The CVX users' guide release 2.2," *CVX Research Inc*, 2020.
- [24] M. Comisso & R. Vescovo, "Fast co-polar and cross-polar 3D pattern synthesis with dynamic range ratio reduction for conformal antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 2, pp. 614-626, 2012.
- [25] M. Comisso & R. Vescovo, "3D power synthesis with reduction of near-field and dynamic range ratio for conformal antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 4, pp. 1164-1174, 2011.
- [26] R. Vescovo, "Reconfigurability and beam scanning with phase-only control for antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 6, pp. 1555-1565, 2008.
- [27] R. Vescovo, "Consistency of constraints on nulls and on dynamic range ratio in pattern synthesis for antenna arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 10, pp. 2662-2670, 2007.