

---

## **Power Control and Beamforming in Active Phased Array Radars for Interception Probability Reduction under Interceptor's Direction Uncertainties**

**M. Kazimi Rad, S. M. Hosseini Andargoli**\*

\* Associate Professor, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

(Received:23/11/2020, Accepted:31/08/2020)

### **Abstract**

In this paper, the transmit beamforming and T/R modules' allocated power in active phased array radars are optimized to reduce the interception probability of radar under uncertainties in the interceptor's direction. The LPI problem is solved analytically and some theorems are extracted to design optimum beamforming weights. The optimization problem is formulated from two perspectives and after mathematical analysis, a closed form solution in combination with the heuristic iterative algorithm is presented for determining the transmit beamforming weights. The LPI performance and computation time of the proposed algorithms are compared with the benchmark numerical Barrier algorithm and with the conventional radar in which maximizing the detection probability is considered regardless of the interception probability issues. Simulation results show that the proposed algorithms not only minimize the interception probability of radar but also satisfy the desired detection performance and power budget constraints, simultaneously. The proposed algorithms outperform the benchmark algorithm in complexity and optimality.

**Keywords:** Active phased array radar, Uncertainty in interceptor's direction, Detection probability, Low probability of interception, Beamforming

---

\* Corresponding author E-mail: Smh\_andargoli@nit.ac.ir

## کنترل توان و شکل‌دهی بیم در رادارهای آرایه فازی اکتیو با هدف دستیابی به احتمال شنود کم و با فرض عدم قطعیت در جهت شنودگر

محمد کاظمی راد<sup>۱</sup>، سید مهدی حسینی اندارگلی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲- دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل، ایران

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۱۰، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۳)

### چکیده

در این مقاله شکل‌دهی بیم و توان اختصاصی به ماژول‌های فرستنده-گیرنده رادارهای آرایه فازی اکتیو به‌گونه‌ای بهینه‌سازی شده است تا احتمال شنود رادار با فرض عدم قطعیت در جهت شنودگر کمینه گردد. مسئله کمینه‌سازی احتمال شنود به‌صورت تحلیلی حل شده است و برای ضرایب شکل‌دهی بیم طرح‌های مختلفی پیشنهاد شده است. بدین منظور مسئله بهینه‌سازی از دو دیدگاه متفاوت طرح و بعد از تحلیل ریاضی، فرمول بسته‌ای همراه با الگوریتم تکراری ابتکاری برای تعیین ضرایب شکل‌دهی بیم ارائه گردیده است. عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی از لحاظ احتمال شنود رادار و زمان محاسبات با الگوریتم عددی Barrier و رادار کلاسیک که بدون در نظر گرفتن احتمال شنود در پی بهینه‌کردن احتمال آشکارسازی اهداف است به‌عنوان معیار مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد الگوریتم‌های پیشنهادی نه تنها احتمال شنود رادار را در کل راستای محتمل حضور شنودگر به شکل قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌دهند بلکه قید احتمال آشکارسازی مطلوب و بودجه توان هر ماژول فرستنده-گیرنده را نیز رعایت می‌کنند. الگوریتم پیشنهادی هم از لحاظ میزان احتمال شنود و هم از لحاظ پیچیدگی محاسباتی بهتر از الگوریتم معیار عمل می‌کند.

**کلیدواژه‌ها:** رادارهای آرایه فازی اکتیو، عدم قطعیت در جهت شنودگر، احتمال آشکارسازی هدف، احتمال شنود کم، شکل‌دهی

بیم

### ۱- مقدمه

در مطالعات انجام‌شده روش‌های مختلفی برای LPI شدن رادارها بیان شده که مهم‌ترین آن‌ها عبارت است از مدیریت توان فرستنده رادار، کاهش لوب‌های جانبی آنتن، ارسال باند پهن، استفاده از الگوی مدولاسیون‌های پیشرفته، استفاده از گیرنده‌های با حساسیت بالا، آشکارسازی همدوس، استفاده از شبکه‌های راداری و گیرنده‌هایی با بهره پردازشی بالا [۴].

در این مقاله با این فرض که اطلاعات محدودی از حضور شنودگر در محدوده عملکرد رادار داریم، با استفاده از روش کنترل توان و شکل‌دهی بیم سعی شده است تا فرستنده رادار آرایه فازی اکتیو به‌گونه‌ای مدیریت گردد تا رادار LPI گردد. با کنترل ERP<sup>۳</sup> فرستنده رادار در جهت شنودگر، احتمال شنود رادار در سیستم‌های ESM و با کنترل ERP در راستای زاویه تحت آزمون، احتمال آشکارسازی اهداف مدیریت می‌گردد. در طی فرآیند کنترل فاز و دامنه سیگنال ارسالی از هر ماژول فرستنده-گیرنده بودجه توان هر ماژول موردتوجه قرار می‌گیرد تا از اشباع سیگنال و پیامدهای ناگوار آن جلوگیری گردد.

در آنتن‌های آرایه‌ای با ترکیب المان‌های آنتنی کوچک، می‌توان آنتنی با روزه بزرگ‌تر ایجاد نمود که این باعث افزایش بهره آنتن می‌شود. از طرفی با کنترل دامنه و فاز هر المان می‌توان جهت و شکل الگوی تشعشعی را به‌صورت الکترونیکی مدیریت نمود. از جمله مزایای شکل‌دهی بیم آنتن‌های آرایه‌ای می‌توان به هدایت بیم به‌صورت الکترونیکی، حذف تداخل ناشی از امواج دریافتی ناخواسته در گیرنده و ایجاد نال در راستای موردنظر در فرستنده اشاره نمود [۱].

برای جلوگیری از شنود رادار توسط سیستم‌های ESM<sup>۱</sup> باید رادار به‌گونه‌ای طراحی گردد که LPI<sup>۲</sup> باشد [۲]. اگر رادار شنود شود احتمال اینکه توسط سیستم‌های حمله الکترونیکی موردحمله قرار گرفته و کارایی خود را از دست دهد افزایش می‌یابد. بیشتر گیرنده‌های شنود حساسیت لازم برای شنود سیگنال‌های رادارهای LPI را ندارند [۳].

\* رایانامه نویسنده مسئول: Smh\_andargoli@nit.ac.ir

<sup>۳</sup> Effective Radiated Power

<sup>۱</sup> Electronic Support Measure

<sup>۲</sup> Low Probability of Interception

## ۱-۱- مروری بر مطالعات قبلی

در مرجع [۵] از کدهای چندفازه برای افزایش پهنای باند چگالی طیف توان سیگنال‌های راداری استفاده شده است. رشته کدهای چندفازه که از رشته کدهای طولانی ساخته می‌شوند باعث افزایش بهره پردازش رادار شده و هم‌زمان دامنه چگالی طیف توان را کاهش می‌دهد؛ بنابراین سیگنال رادار پایین‌تر از سطح نویز قرار گرفته و در نهایت سیگنال رادار از دید سیستم شنود مخفی خواهد ماند.

در مرجع [۶] به منظور مخفی ماندن رادار از دید شنودگر، استفاده از آنتن‌های با بیم باریک و اسکن‌های تصادفی پیشنهاد شده است. حداکثر فاصله شنودگر به حداکثر فاصله رادار به‌عنوان پارامتر شنود معرفی و در مرجع [۷] برحسب پارامترهای راداری مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در مرجع [۸] شکل‌دهی بیم آنتن‌های مجازی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این روش با ارسال سیگنال‌های کدشده متعامد از هر المان فرستنده خاصیت LPI بهبود یافته و در گیرنده از ساختار گیرنده‌های فیلترینگ تطبیقی دیجیتالی استفاده شده است.

در مرجع [۹] پیشنهاد شده که جهت کاهش احتمال شنود به‌جای بیم‌های بهره بالا از بیم‌های چندگانه بهره پایین استفاده گردد. با استفاده از ضرایب مختلط می‌توان بیم‌های کم‌بهره را با هم ترکیب نموده و توان تشعشعی مؤثر در جهت تخمینی هدف را افزایش داد و به‌تبع آن احتمال آشکارسازی را بهبود بخشید. برای تعیین جواب بهینه ضرایب، از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. به‌منظور بهبود بخشیدن خاصیت LPI روش<sup>۱</sup> FDA در مرجع [۱۰] پیشنهاد شده است که در این روش فرکانس حامل به‌صورت غیرخطی نسبت به مقدار قبلی افزایش می‌یابد. در این روش با ترکیب هم‌دوس سیگنال‌های دریافتی در رادار، پیک‌های توانی سیگنال به‌صورت تصادفی تغییر نموده و در شنودگر قابل ردگیری و آشکارسازی نیست.

در مرجع [۱۱]، به‌منظور کاهش پارامتر شنود رادارهای ردگیری شبکه شده، توان تخصیص یافته به آنتن و همچنین اهداف تخصیص یافته به هر آنتن بهینه شده است. در مرجع [۱۲] سیگنال دریافتی از رادارهای شبکه‌بندی شده در گیرنده شنودگر مورد تحلیل و آنالیز قرار گرفته و تابع هدف به‌صورت مینیمم‌سازی احتمال شنود معادل‌سازی شده است. علاوه بر آن، احتمال آشکارسازی اهداف در شبکه راداری به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده که عملکرد آشکارسازی را نیز برآورده نماید. مسئله موردنظر به‌صورت ریاضی تحلیل شده و در نهایت بهینه‌ترین

تخصیص توان و تخصیص اهداف به شبکه راداری تعیین شده است. نویسندگان مرجع [12] خطای مکان‌یابی اهداف را در مسئله بهینه‌سازی قبلی به‌عنوان یک چالش معرفی نموده و در مرجع [۱۳] با اضافه نمودن خطای مکان‌یابی اهداف به قیود مسئله بهینه‌سازی، مجدداً مسئله بهینه‌سازی را تحلیل نموده و توان بهینه تخصیص‌یافته به شبکه راداری را تعیین نموده‌اند. بر اساس semidefinite relaxation در مرجع [۱۴] برای حذف تداخل در گیرنده روشی نوین برای شکل‌دهی بیم معرفی شده است. دو قید در این مسئله به‌منظور متعارف‌سازی روش شکل‌دهی بیم MVDR نیز ذکر شده که ضرایب شکل‌دهی بیم فقط فازی بوده و اندازه ضرایب نسبت به کران بالایی محدود شده است. این مسئله یک مسئله غیرمحدب درجه ۲ بوده که با استفاده از semidefinite relaxation به یک مسئله بهینه‌سازی محدب تبدیل و برای تعیین جواب بهینه ضرایب شکل‌دهی بیم به‌صورت ریاضی تحلی شده است.

بر اساس مزیت چرخش الکترونیکی بیم در رادارهای آرایه فازی و رادارهای MIMO با آنتن تجمعی، در مرجع [۱۵] تکنیک جدید و نوینی برای شکل‌دهی دیجیتالی بیم تعریف شده که برای رادارهای آرایه فازی و MIMO مناسب می‌باشد. ارسال هم‌زمان چند بیم در فرستنده زمانی امکان‌پذیر است که سیگنال‌های متناظر آن‌ها از نظر فاز متعامد باشند.

در مرجع [۱۶]، روش شکل‌دهی بیم هم‌زمان اپتونیک (OPBF<sup>۲</sup>) برای کم کردن پیچیدگی گیرنده‌های رادارهای آرایه فازی بیان شده است. سیستم OPF قابلیت ارسال و کنترل هم‌زمان چند بیم با دقت بالا را دارند. این سیستم در مقایسه با شکل‌دهی بیم دیجیتالی، سرعت بالای پردازش و هزینه توان کمتری دارد.

## ۱-۲- نوآوری مقاله

با توجه به جستجوی وسیعی که نویسندگان این مقاله انجام داده‌اند تاکنون موضوع شکل‌دهی بیم فرستنده رادار آرایه فازی به‌منظور LPI نمودن رادار با فرض داشتن اطلاعاتی از موقعیت شنودگر مورد مطالعه قرار نگرفته است. با توجه به اینکه معمولاً دستگاه‌های شنود راداری در پایگاه‌های دشمن که محدوده جغرافیایی معلومی دارند به کار گرفته می‌شوند و یا توسط سامانه‌های شناسایی، اطلاعاتی در مورد تجهیزات دشمن می‌توان کسب کرد، در این مقاله فرض شده که با توجه به اطلاعات تقریبی که از محل نصب سامانه‌های شنود دشمن در دسترس داریم، جهت شنودگر با یک توزیع تصادفی قابل پیش‌بینی است.

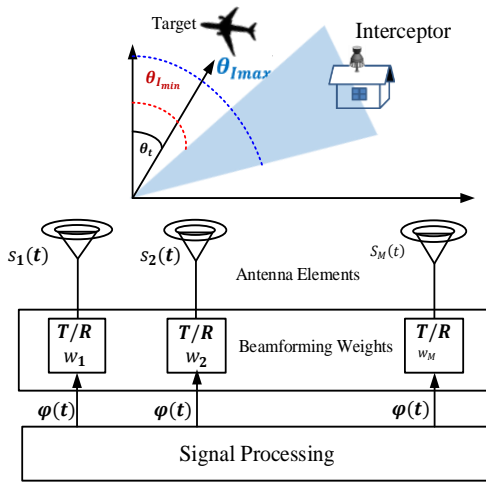
<sup>2</sup> OPTronic BeamForming

<sup>1</sup> Frequency Divsers Array

شبه‌سازی با الگوریتم عددی Barrier مورد مقایسه قرار گرفته است و در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری مقاله به‌اختصار بیان شده است.

## ۲- مدل‌سازی سیستم

یک رادار آرایه فازی اکتیو با  $M$  المان آرایه خطی یکنواخت مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. در هر  $Dwell$  Time، رادار حضور یا عدم حضور هدف را در یک جهت خاص بررسی می‌کند. برای سادگی فرض می‌شود که رادار تک‌جهتی است و فقط در راستای سمت بررسی وجود یا عدم وجود اهداف را انجام می‌دهد. زاویه  $\theta_i$  همان زاویه تحت تست در پردازش کنونی است. یک شنودگر در محدوده عملکردی رادار وجود داشته که با توجه به عدم قطعیتی که در مورد محل حضور آن وجود دارد فرض می‌شود در جایی در محدوده زاویه‌ای  $[\theta_{i_{min}}, \theta_{i_{max}}]$  قرار داشته و با دریافت سیگنال راداری، رادار را شنود می‌نماید. از دید رادار، بر اساس اطلاعات موجود، جهت شنودگر به صورت یک متغیر تصادفی با توزیع معلوم در بازه  $[\theta_{i_{min}}, \theta_{i_{max}}]$  فرض می‌شود.



شکل (۱). ساختار سیستم رادار آرایه فازی خطی اکتیو

سیگنال ارسالی از  $k$  امین المان فرستنده به صورت زیر است:

$$S_k(t) = |w_k^*| \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t - \angle w_k) \quad (1)$$

در رابطه (۱)  $g(t)$  شکل پالس و  $w_k = \sqrt{P_k} e^{j\angle w_k}$  ضریب مختلط المان  $k$  ام است که توان و جهت بیم را مشخص می‌نماید. سیگنال باند پایه دریافتی در  $k$  امین المان گیرنده نیز به صورت زیر است:

$$r_k(t) = \sum_{i=1}^M \phi_b(t - \tau) e^{j\phi_{i,k}} w_i^* \alpha + n_k(t) \quad (2)$$

پارامترهای این توزیع تصادفی مانند میانگین و واریانس بر اساس دقت اطلاعات به دست آمده از محل استقرار سامانه‌های شنود دشمن، قابل مدل‌سازی است. مسئله بهینه‌سازی به منظور حداقل نمودن ERP رادار در جهت گیرنده شنودگر با قیود کیفیت آشکارسازی اهداف و محدود بودن توان مازول‌های فرستنده-گیرنده تعریف می‌گردد. برای تعریف مسئله، جهت شنودگر توسط یک متغیر تصادفی تعریف می‌گردد.

با توجه به مفروضات فوق، نوآوری این مقاله عبارت است از:

۱- سیگنال دریافتی در گیرنده شنودگر تجزیه و تحلیل شده و نشان داده می‌شود که احتمال شنود یک تابع افزایشی از ERP رادار آرایه فازی در جهت موقعیت شنودگر است که همین به عنوان تابع هدف مسئله بهینه‌سازی مدنظر قرار گرفته است. مقدار این تابع هدف با توجه به اینکه جهت شنودگر یک متغیر تصادفی فرض شده است از دو دیدگاه مورد توجه قرار گرفته است. در دیدگاه اول مقدار امید ریاضی تابع هدف و در دیدگاه دوم مقدار بیشینه تابع هدف در بازه تغییرات جهت شنودگر مورد توجه قرار گرفته است و منتج به مسائل بهینه‌سازی متفاوتی گردیده است.

۲- در مسائل بهینه‌سازی، احتمال آشکارسازی به صورت تابعی از ضرایب شکل‌دهی بیم تعریف شده و به عنوان قید مسئله بهینه‌سازی مورد تحلیل قرار گرفته است. برای ساده‌سازی، قیود غیرخطی به روابط خطی معادل آن‌ها ساده‌سازی شده‌اند.

۳- در این مقاله رادارهای آرایه فازی اکتیو در نظر گرفته شده‌اند که محدودیت توان ارسالی از هر مازول فرستنده به عنوان قید مهم عملی در مسائل بهینه‌سازی وارد شده است.

۴- مسائل به صورت تحلیلی حل شده‌اند و در نهایت یک رابطه بسته برای ضرایب شکل‌دهی بیم ارائه می‌گردد که ضرایب مجهول موجود در رابطه بسته از طریق الگوریتم‌های تکراری ابتکاری به دست می‌آیند. برای ارزیابی عادلانه، نتایج الگوریتم‌های پیشنهادی با نتایج الگوریتم عددی Barrier به عنوان یک معیار در حل مسائل بهینه‌سازی مقید، مقایسه شده است.

این مقاله در بخش‌های زیر ارائه شده است: در بخش دوم مدل‌سازی سیستم ارائه شده و در ادامه روابط ریاضی جهت فرموله‌سازی مسئله بهینه‌سازی به طور کامل بیان و قید کیفیت آشکارسازی نیز بر اساس پارامترهای آشکارسازی (SNR و ERP) به شکل نوینی تبدیل شده است. در بخش سوم به حل ریاضی مسئله‌های بهینه‌سازی پرداخته شده است که در نهایت فرم بسته‌ای برای ضرایب شکل‌دهی بیم ارائه شده است. در بخش چهارم عملکرد روش‌های شکل‌دهی بیم ارائه شده از طریق

که  $R_\varphi(t) = \varphi_b(t) * \varphi_b(-t)$  تابع خودهمبستگی سیگنال  $R_\varphi(0) = 1$  است که اگر سیگنال نرمالیزه فرض شود  $\vec{n}_\varphi$  بردار نویز رنگی فیلتر شده، با ماتریس کواریانس  $I_{M \times M}$  و  $\sigma_n^2 = N_0$  است. اگر اکوی برگشتی از هدف با یکی از دروازه‌های برد منطبق باشد SNR خروجی در آن دروازه برد خواهد شد:

$$SNR = \frac{|\vec{V}^H \vec{b}_r \vec{w}^H \vec{b}_t \alpha e^{-j\phi_0}|^2}{E\{|\vec{V}^H \vec{n}|^2\}} = \frac{|\vec{V}^H \vec{b}_r|^2 |\vec{w}^H \vec{b}_t|^2 |\alpha|^2}{\|\vec{V}\|^2 \sigma_n^2} = \frac{\vec{V}^H \vec{b}_r \vec{b}_r^H \vec{V} \vec{w}^H \vec{b}_t \vec{b}_t^H \vec{w} |\alpha|^2}{\|\vec{V}\|^2 \sigma_n^2} \quad (7)$$

بعد از جمع‌بندی پالس‌های هم‌دوس دریافتی در یک Dwell Time، SNR کل قبل از آشکارسازی برابر خواهد شد با:

$$SNR = \frac{\vec{V}^H \vec{b}_r \vec{b}_r^H \vec{V} \vec{w}^H \vec{b}_t \vec{b}_t^H \vec{w} |\alpha|^2 G_P}{\|\vec{V}\|^2 \sigma_n^2 L_P} \quad (8)$$

که  $L_P$  تلفات پردازش و  $G_P$  بهره پردازش است.

عملکرد آشکارسازی رادارها را می‌توان بر اساس احتمال آشکارسازی و نرخ هشدار کاذب ارزیابی کرد. اپراتور، رادار را برای شرایط  $P_{fa} \leq P_{fa}^{th}$  و  $P_D \geq P_D^{th}$  تنظیم می‌کند که  $P_D$  احتمال آشکارسازی،  $P_D^{th}$  حداقل احتمال آشکارسازی مطلوب،  $P_{fa}$  نرخ هشدار کاذب و  $P_{fa}^{th}$  حداکثر نرخ هشدار کاذب مطلوب است. برای دست‌یابی به شرایط آشکارسازی مطلوب باید  $SNR \geq SNR_{Req}$  تضمین شود که مقدار  $SNR_{Req}$  را می‌توان از رابطه  $P_D^{th} = Q(\sqrt{2 SNR_{Req}}, \sqrt{-2 \ln(P_{fa}^{th})})$  تعیین نمود که  $Q(a, b) = \int_b^\infty r \exp(-\frac{r^2+a^2}{2}) I(a, r) dr$  تابع مارکوم و  $P_{fa}^{th} = 10^{-6}$  به عنوان مثال اگر مقدار  $P_{fa}^{th} = 0.9$  فرض شود مطابق مرجع [18] برای برآوردن نموده شرایط آشکارسازی مطلوب، مقدار  $SNR \geq 13 \text{ dB}$  باید برای سیگنال بازگشتی هدف مورد نظر تضمین شود. مطابق رابطه (۷) برای اینکه  $SNR \geq SNR_{Req}$  تضمین باشد نیاز است تا  $\vec{w}^H \vec{b}_t \vec{b}_t^H \vec{w} \geq ERP_{Req}$  را می‌توان طبق رابطه (۹) تعیین نمود:

$$ERP_{Req} = \frac{SNR_{Req} \|\vec{V}\|^2 \sigma_n^2 L_P}{\vec{V}^H \vec{b}_r \vec{b}_r^H \vec{V} G_P |\alpha|^2} = \frac{SNR_{Req} \|\vec{V}\|^2 \sigma_n^2 (4\pi)^3 R_{max}^4 L_{RF} L_P}{\vec{V}^H \vec{b}_r \vec{b}_r^H \vec{V} G_P \lambda^2 \delta_{min}} \quad (9)$$

که  $R_{max}$  حداکثر برد آشکارسازی اهداف موردنظر با سطح مقطع راداری بزرگ‌تر از  $\delta_{min}$  است. مقدار  $\vec{w}^H \vec{b}_t \vec{b}_t^H \vec{w}$  همان مقدار ERP رادار در راستای زاویه تحت تست (موقعیت هدف) است.

در رابطه فوق  $\tau = \frac{2R_t}{u_p}$  زمان تأخیر سیگنال است که  $u_p$  سرعت انتشار امواج رادار،  $\varphi_b(t)$  معادل باند پایه شکل موج راداری که در واقع همان  $\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t)$  است و  $\alpha = \left(\frac{\lambda^2 \delta}{(4\pi)^3 R_t^3 L_{RF}}\right)^{\frac{1}{2}}$  ضریب انتشار ارسال و دریافت و  $n_k(t)$  نویز دریافتی باند پایه مختلط است که یک نویز تصادفی سفید گوسی با میانگین صفر است. در رابطه  $\alpha$  عبارت  $R_t$  فاصله هدف از رادار و  $\delta$  سطح مقطع راداری هدف و  $L_{RF}$  کل تلفات در معادله راداری و  $\phi_{i,k}$  شیفت فاز سیگنال دریافتی در المان  $k$ ام ارسالی از المان  $i$ ام و برابر است با  $\phi_{i,k} = (i+k)2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_t) - \phi_0$  که  $\theta_t$  زاویه هدف نسبت به خط عمود آرایه خطی و  $d$  فاصله بین المانها،  $\lambda$  طول موج و  $\phi_0$  فاز اولیه سیگنال است. با تعریف  $\phi_{i,k} = (i+k)\phi_t - \phi_0$  شیفت فاز برابر  $2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_t)$  خواهد شد که با جاگذاری در رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$r_k(t) = \sum_{i=1}^M \varphi_b(t-\tau) e^{j\phi_t} e^{jk\phi_t} e^{-j\phi_0} w_i^* \alpha + n(t) \quad (3)$$

با تعریف بردارهای  $\vec{b}_t$  و  $\vec{b}_r$  به ترتیب بردار هادی فرستنده و گیرنده به صورت  $\vec{b}_t = \vec{b}_r = [e^{-j\phi_t}, e^{-j2\phi_t}, \dots, e^{-jM\phi_t}]^T$  و تعریف بردار  $\Gamma$  به عنوان برداری که هر درایه آن معرف سیگنال دریافتی یکی از آنتن‌های گیرنده است، بردار سیگنال دریافتی در گیرنده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\vec{r}(t) = \vec{b}_r \vec{w}^H \vec{b}_t \alpha e^{-j\phi_0} \varphi_b(t-\tau) + \vec{n}(t) \quad (4)$$

در رابطه بالا  $\vec{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$  بردار ضرایب شکل‌دهی بیم و  $\vec{n} = [n_1, n_2, \dots, n_M]^T$  بردار نویز دریافتی است. در گیرنده سیگنال دریافتی با ضرایب شکل‌دهی بیم گیرنده  $\vec{V}$  به صورت زیر ترکیب می‌شود:

$$y(t) = \vec{V}^H \vec{b}_r \vec{w}^H \vec{b}_t \alpha e^{-j\phi_0} \varphi_b(t-\tau) + \vec{V}^H \vec{n}(t) \quad (5)$$

بعد از ترکیب فضایی سیگنال‌ها، با به کارگیری فیلتر منطبق نسبت سیگنال به نویز در خروجی فیلتر منطبق حداکثر خواهد شد. برای طراحی فیلتر منطبق می‌توان برد بدون ابهام را به دروازه‌هایی تقسیم نموده و سیگنال دریافتی در هر دروازه برد را با تنظیم زمان نمونه‌برداری جدا نمود. با انتخاب پاسخ ضربه فیلتر منطبق به صورت  $h_b(t) = \varphi_b^*(-t)$  خروجی فیلتر منطبق در زمان نمونه‌برداری  $\tau$  خواهد شد:

$$y(t) * h_b(t)|_{t=\tau} = \vec{V}^H \vec{b}_r \vec{w}^H \vec{b}_t \alpha e^{-j\phi_0} \varphi_b(t-\tau) * h_b(t) + \vec{V}^H \vec{n}(t) * h_b(t)|_{t=\tau} = \vec{V}^H \vec{b}_r \vec{w}^H \vec{b}_t \alpha e^{-j\phi_0} R_\varphi(t-\tau) + \vec{V}^H \vec{n}_\varphi(t)|_{t=\tau} = \vec{V}^H \vec{b}_r \vec{w}^H \vec{b}_t \alpha e^{-j\phi_0} + \vec{V}^H \vec{n}_\varphi \quad (6)$$

تضمین کیفیت آشکارسازی اهداف و در نظر گرفتن محدودیت‌های عملی قید کیفیت آشکارسازی و قید محدودیت بودجه توان به‌عنوان دو قید مسئله موردنظر است.

در واقعیت با توجه به منطقه‌ای که رادار در آن نصب شده است می‌توان متناسب با مرزهای کشور و اطلاعاتی که از محل پایگاه‌های دشمن و تجهیزات نصب شده در آن‌ها می‌توان کسب کرد، ناحیه‌ای را به‌عنوان محل شنودگر (با توجه به حضور شنودگرها در یکی از کشورهای همسایه) با احتمال حضور بالایی متصور شد اما این اطلاعات موقعیتی معمولاً دقیق نیست؛ لذا معمولاً محل حضور شنودگر را با توجه به اطلاعات موجود می‌توان با یک تابع چگالی احتمال با آماره‌های معلوم مدل‌سازی کرد. در این مقاله فرض شده که زاویه سمت شنودگر نسبت به رادار دارای توزیع یکنواخت در بازه  $[\theta_{lmin}, \theta_{lmax}]$  باشد.

با توجه به رابطه (۱۲) و رابطه صعودی احتمال شنود  $SNR_I$  و اینکه تنها بردار  $\vec{w}$  در فرستنده قابل کنترل است، مسئله حداقل‌سازی احتمال شنود را با حداقل‌سازی امید ریاضی ERP رادار در راستای شنودگر معادل می‌نماییم:

$$\min_{\vec{w}} E\{\vec{w}^H \vec{b}_I \vec{b}_I^H \vec{w}\} \quad (13)$$

از طرفی ERP رادار در راستای تحت تست (زاویه آزمایش شده برای حضور هدف) باید از مقدار ERP موردنیاز آشکارسازی بیشتر باشد.

$$\vec{w}^H \vec{b}_t \vec{b}_t^H \vec{w} \geq \frac{SNR_{PD} \sigma_n^2 L_p}{MG_P |\alpha|^2} \quad (14)$$

که مقدار  $ERP_{Req} = \frac{SNR_{PD} \sigma_n^2}{|\alpha|^2}$  را توان مؤثر تشعشعی فرستنده در راستای زاویه تحت تست جهت نیل به کیفیت آشکارسازی مطلوب تعریف می‌کنیم. قید (۱۴) که به جهت تضمین کیفیت آشکارسازی مطلوب اهداف به مسئله باید اضافه شود یک ناحیه غیر محدب می‌سازد و مسئله را غیر محدب می‌نماید؛ لذا می‌توان آن‌ها را با قید معادل زیر جایگزین نمود:

$$|\vec{w}^H \vec{b}_t| \geq \sqrt{ERP_{Req}} \quad (15)$$

از آنجا که تابع هدف نسبت به  $|\vec{w}^H|$  یک تابع صعودی است واضح است که جواب بهینه به ازای  $|\vec{w}^H \vec{b}_t| = \sqrt{ERP_{Req}}$  تحقق خواهد یافت. از طرف دیگر چون فاز  $\vec{w}^H \vec{b}_t$  در مقدار بهینگی جواب تأثیری ندارد (مقدار ندارد) (یت اسکالر  $\vec{w}^H \vec{b}_t$  تأثیری روی ERP و همچنین تأثیری روی اندازه تصویر بردار شکل‌دهی بیم روی بردارهای هادی هدف و شنودگر ندارد) قید کیفیت آشکارسازی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\vec{w}^H \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \quad (16)$$

## ۱-۲- آنالیز سیگنال از دیدگاه سیستم شنودگر

مشابه سیگنال بازگشتی هدف در رادار، سیگنال دریافتی در شنودگر را نیز تحلیل می‌نماییم تا به بیان مناسبی برای تعریف احتمال شنود دست یابیم. سیگنال گیرنده شنودگر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y_I(t) = \vec{w}^H \vec{b}_I \alpha_I e^{-j\theta_0} \varphi_b(t - \tau_I) + n_I(t) \quad (10)$$

که بردار هادی رادار  $\vec{b}_I = [e^{-j\phi_I}, e^{-j2\phi_I}, \dots, e^{-jM\phi_I}]^T$  راستای شنودگر و  $\phi_I = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_I)$  و  $\theta_I$  موقعیت زاویه‌ای شنودگر،  $\alpha_I = \left(\frac{G_I \lambda^2}{(4\pi)^2 R_{Int}^2 L_{IR}}\right)^{\frac{1}{2}}$  ضریب انتشاری و  $R_{Int}$  فاصله بین رادار و شنودگر،  $G_I$  بهره آنتن گیرنده شنودگر در جهت رادار و  $L_{IR}$  کل تلفات گیرنده شنودگر و  $\tau_I$  تأخیر سیگنال ارسالی رادار تا شنودگر است. اگر یکی از فیلترهای گیرنده شنودگر با سیگنال دریافتی از رادار حداکثر انطباق را داشته باشد، سیگنال خروجی فیلتر موردنظر برابر خواهد شد با:

$$Y(t) = y_I(t) * h_I(t) = \vec{w}^H \vec{b}_I \alpha_I e^{-j\theta_0} \varphi_b(t - \tau_I) * h_I(t) + n_I(t) * h_I(t) \quad (11)$$

با تعریف  $R_{\varphi, I}(t) = \varphi_b(t) * h_I(t)$  حداکثر SNR در شنودگر به‌صورت زیر خواهد شد:

$$SNR_I = \frac{\vec{w}^H \vec{b}_I \vec{b}_I^H \vec{w} |\alpha_I|^2 |R_{\varphi, I}(\tau_I)|^2}{\sigma_{nI}^2} \quad (12)$$

که  $\sigma_{nI}^2$  واریانس نویز در خروجی فیلتر منطبق شنودگر است.

از آنجا که احتمال شنود تابعی افزایشی برحسب  $SNR_I$  است و مینیمم کردن  $SNR_I$  باعث مینیمم کردن احتمال شنود خواهد شد طبق رابطه (۱۲) کافی است بتوان از طریق کنترل توان و فاز المان‌های فرستنده، بخش  $\vec{w}^H \vec{b}_I \vec{b}_I^H \vec{w}$  که وابسته به تخصیص توان و تخصیص بیم در فرستنده است را حداقل نمود؛ بنابراین با کنترل مقدار  $\vec{w}^H \vec{b}_I \vec{b}_I^H \vec{w}$  که همان ERP رادار در راستای شنودگر است می‌توان  $SNR_I$  را کنترل نمود. مشخص است که ضرایب شکل‌دهی بیم گیرنده هیچ تأثیری در احتمال شنود نداشته و برای حداکثر نمودن SNR رادار کافی است که  $\vec{V} = \vec{b}_r$  تنظیم شود. با این فرض خواهیم داشت  $ERP_{Req} = \frac{SNR_{Req} \sigma_n^2 L_p}{MG_P |\alpha|^2}$

## ۲-۲- فرموله‌سازی مسئله بهینه‌سازی برای LPI شدن رادار آرایه فازی

با توجه به موارد اشاره شده در بخش ۱-۲، برای اینکه رادار از دید سیستم شنودگر مخفی باشد باید ERP رادار در راستای شنودگر کمینه گردد و پارامتر کنترلی برای مدیریت ERP رادار، بردار ضرایب شکل‌دهی بیم فرستنده است. علاوه بر این برای

متأسفانه انتگرال (۱۹) روی المان‌های ماتریس  $\vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l)$  جواب به فرم بسته ندارد و به شکل عددی باید انتگرال را حل کرد. اما در اینجا برای اینکه تابع هدف مسئله ریاضی فرموله شود یک روش تقریبی برای محاسبه این انتگرال ارائه می‌نماییم. مطابق بسط ریمان، بازه زاویه‌ای محتمل حضور شنودگر یا همان بازه انتگرال را به  $L$  قسمت مساوی تقسیم می‌نماییم. با توجه به عرض بیم آنتن آرایه فازی که طبق مرجع [۱۹] برابر با  $\theta_{beam} = \frac{180}{\pi} \frac{\lambda}{Md}$  است مقدار  $L$  را به گونه‌ای تعیین می‌نماییم که  $\theta_{beam} \ll \frac{\Delta\theta = (\theta_{lmax} - \theta_{lmin})}{L}$  باشد که کافی است  $L \gg \frac{(\theta_{lmax} - \theta_{lmin})}{\theta_{beam}}$  انتخاب شود. با این فرض می‌توان رابطه انتگرالی (۱۹) را به رابطه گسسته زیر تبدیل نمود:

$$E\{\vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l)\} \cong \sum_{i=1}^L \vec{b}(\theta_{lmin} + i \frac{\Delta\theta}{L}) \vec{b}^H(\theta_{lmin} + i \frac{\Delta\theta}{L}) \cdot \frac{1}{L} \frac{\Delta\theta}{L} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L R_l(\theta_{l_i})$$

با فرض  $\theta_{l_i} = (\theta_{lmin} + i \frac{\Delta\theta}{L})$  و با تعریف  $\vec{R}_l = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L R_l(\theta_{l_i})$  مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\min_{\vec{w}} \vec{w}^H \vec{R}_l \vec{w} \quad (21)$$

$$\vec{w}^H \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}}$$

$$|\vec{w}_n|^2 \leq p_{max} \quad \forall n = 1, \dots, M$$

برای تعیین جواب بهینه، تابع لاگرانژ مسئله (۲۱) را تشکیل می‌دهیم:

$$Lag(\vec{w}, \lambda, \mu) = \vec{w}^H \vec{R}_l \vec{w} + \lambda (\vec{w}^H \vec{b}_t - \sqrt{ERP_{Req}}) + \sum_{n=1}^M \mu_n (|\vec{w}_n|^2 - P_{max}) \quad (22)$$

حال برای تعیین ضرایب بهینه شکل‌دهی پرتو شرایط بهینگی KKT را اعمال می‌نماییم [۲۰]:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{w}}(\vec{w}, \lambda, \mu) = 2\vec{R}_l \vec{w} + \lambda \vec{b}_t + 2 \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \mu_2 & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_M \end{bmatrix}_{M \times M} \vec{w} \quad (23)$$

$$= 0$$

$$\vec{w}^H \vec{b}_t - \sqrt{ERP_{Req}} = 0 \quad (1-23)$$

$$|\mu_n| \geq 0 \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (2-23)$$

در سیستم آرایه فازی با المان‌های اکتیو، برای هر آنتن از یک تقویت‌کننده مجزا استفاده می‌شود که رعایت محدودیت توان هر المان را می‌توان به‌عنوان قید دوم مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر مدل‌سازی کرد:

$$|\vec{w}_n|^2 \leq p_{max} \quad (17)$$

که  $\vec{w}_n$  معرف درایه  $n$ ام بردار  $\vec{w}$  است. با توجه به اینکه تابع  $|\vec{w}_n|^2 \leq p_{max}$  نسبت به  $\vec{w}$  محدب است قید  $|\vec{w}_n|^2 \leq p_{max}$  یک ناحیه محدب می‌سازد و تحدب مسئله را به هم نخواهد ریخت. در ادامه سعی داریم بعد از حل مسئله بهینه‌سازی مطرح شده با تحلیل ریاضی، جوابی به صورت فرم بسته برای تعیین ضرایب شکل‌دهی بیم به دست آوریم و در صورتی که رسیدن به جواب فرم بسته امکان‌پذیر نباشد با ارائه الگوریتم‌های عددی مناسب، ضرایب بهینه شکل‌دهی بیم را محاسبه نماییم.

### ۳- تحلیل ریاضی و تعیین ضرایب شکل‌دهی بیم

برای حل مسئله بهینه‌سازی چند روش در این مقاله ارائه شده است که در زیربخش‌های بعدی به‌طور مفصل در مورد آن‌ها بحث می‌گردد.

### ۳-۱- حداقل‌سازی امید ریاضی ERP رادار در راستای شنودگر

با توجه به توزیع تصادفی حضور شنودگر در محدوده شناسایی شده، مسئله بهینه‌سازی حداقل‌سازی SNR در گیرنده شنودگر با حداقل‌سازی متوسط ERP رادار در راستای شنودگر معادل‌سازی می‌شود.

$$\min_{\vec{w}} E\{\vec{w}^H \vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l)\vec{w}\} = \min_{\vec{w}} \vec{w}^H E\{\vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l)\}\vec{w} \quad (18)$$

که  $\vec{b}(\theta_l)$  بردار هادی آرایه فرستنده در راستای  $\theta_l$  یا همان شنودگر است. به‌منظور تحلیل ریاضی ابتدا مقدار تابع  $E\{\vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l)\}$  را با فرض اینکه زاویه شنودگر یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه  $[\theta_{lmin}, \theta_{lmax}]$  است، محاسبه می‌نماییم:

$$E\{\vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l)\} = \int \vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l) \cdot f_{\theta}(\theta_l) d\theta_l \quad (19)$$

$$= \int_{\theta_{lmin}}^{\theta_{lmax}} \vec{b}(\theta_l)\vec{b}^H(\theta_l) \cdot \frac{1}{\theta_{lmax} - \theta_{lmin}} d\theta_l$$

شد و نتیجه حل معادله را تغییر چندانی نخواهد داد. باید به این نکته هم توجه کرد که این کار فقط زمانی لازم است که  $L < M$  باشد. رابطه (۲۹) رابطه اصلاح‌شده را نمایش می‌دهد که در شبیه‌سازی از همین رابطه با مقدار  $\varepsilon^2 = 10^{-15}$  استفاده شده است.

$$\vec{w} = \sqrt{ERP_{Req}} \frac{(\bar{R}_I + \varepsilon^2 I)^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H (\bar{R}_I + \varepsilon^2 I)^{-1} \vec{b}_t} \quad (29)$$

حالت دوم:  $\mu \neq 0$  است و حداقل یکی از قیدهای محدودیت توان فعال است:

در این حالت با جایگذاری رابطه (۲۷) ضرایب شکل‌دهی بیم) در شرایط KKT (۲۳-۳)، دستگاه معادلاتی به صورت رابطه (۳۰) تشکیل خواهد شد که اپراتور  $[\cdot]_n$  درایه  $n$ ام بردار را در اختیار قرار می‌دهد. با توجه به اینکه باید توان اختصاصی به ضریب شکل‌دهی بیم هر المان از توان ماکزیمم مازول فرستنده-گیرنده آن المان کمتر باشد، برای  $\mu_n$ هایی که قید توان ماکزیمم را به شکل مساوی برقرار می‌نمایند با توجه به دستگاه معادلات (۳۰) به دست می‌آید. اما از قبل مشخص نیست که برای کدام  $n$ ها باید قید توان مازول فرستنده-گیرنده به شکل مساوی برقرار شود و علاوه بر این دستگاه معادلات (۳۰)، یک دستگاه معادلات خطی نیست که پاسخ آن را که همان  $\mu_n$ ها هستند بتوان به راحتی به روش تحلیلی محاسبه نمود. برای به دست آوردن  $\mu_n$ ها روش ابتکاری زیر پیشنهاد می‌گردد:

برای تعیین مقادیر  $\mu_n$  ابتدا با قرار دادن  $\mu = \varepsilon^2 I$  طبق رابطه (۲۷) ضرایب شکل‌دهی بیم  $\vec{w}$  محاسبه و سپس با رابطه  $|\vec{w}|_n^2$  توان هر آنتن محاسبه می‌گردد، سپس بین همه المان‌های آرایه، المانی که ماکزیمم توان به آن تخصیص داده شده است. به‌طور مثال المان  $k$ ام انتخاب شده و اگر توان تخصیص به المان مزبور از  $p_{max}$  بیشتر باشد، یعنی ضریب لاگرانژ مربوط به قید توان المان  $k$ ام در ضریب  $1/0.9$  ضرب می‌گردد؛ یعنی مقدار  $\mu_k$  افزایش می‌یابد. مقدار جدید  $\mu_k$  در ماتریس قطری  $\mu$  جایگذاری شده و مجدداً مقادیر ضرایب شکل‌دهی بیم طبق رابطه (۲۷) به‌روز می‌گردند و مجدداً توان المان‌ها  $|\vec{w}|_n^2$  محاسبه می‌گردد. این حلقه آن‌قدر تکرار می‌گردد تا توان همه المان‌های آنتن قید توان ماکزیمم را رعایت نمایند. جدول (۱) مراحل اصلاح توان جهت برقراری شرایط بهینگی (۲-۲۳) الی (۴-۲۳) را نمایش می‌دهد.

$$|\vec{w}|_n^2 = p_{max} \Rightarrow \frac{ERP_{Req}}{(\vec{b}_t^H (\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t)^2} |[(\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t]_n|^2 = p_{max} \quad \forall n \text{ in which } \mu_n > 0 \quad (30)$$

$$[\mu]_n (|\vec{w}|_n^2 - P_{max}) = 0 \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (3-23)$$

$$|\vec{w}|_n^2 \leq P_{max} \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (4-23)$$

از رابطه (۲۳) بردار  $\vec{w}$  برحسب متغیر  $\lambda$  و ماتریس  $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$  طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{w} = -\frac{\lambda}{2} (\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t \quad (24)$$

با جاگذاری معادله (۲۴) در معادله (۲۳-۱) می‌توان ضریب  $\lambda$  را به دست آورد:

$$\vec{w}^H \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} \vec{b}_t^H (\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \quad (25)$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{\sqrt{ERP_{Req}}}{\vec{b}_t^H (\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t} \quad (26)$$

با جاگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۲۴) ضرایب شکل‌دهی بیم به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\vec{w} = \sqrt{ERP_{Req}} \frac{(\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H (\bar{R}_I + \mu)^{-1} \vec{b}_t} \quad (27)$$

حال با توجه به شرایط KKT، برای جواب بهینه می‌توان دو حالت در نظر گرفت. در حالت اول فرض می‌کنیم  $\mu = 0$  جواب بهینه باشد و در حالت دوم فرض می‌کنیم حداقل یکی از درایه‌های ماتریس  $\mu$  غیرصفر است و یکی از قیود محدودیت توان فعال می‌باشد.

حالت اول:  $\mu = 0$  و قید محدودیت توان هیچ مازول فرستنده-گیرنده‌ای فعال نیست:

در این حالت رابطه (۲۷) به صورت زیر ساده می‌گردد.

$$\vec{w} = \sqrt{ERP_{Req}} \frac{\bar{R}_I^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H \bar{R}_I^{-1} \vec{b}_t} \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)، به ازای  $L < M$  ماتریس  $\bar{R}_I$  یک ماتریس تکین خواهد شد و نمی‌توان معکوس آن را محاسبه نمود. برای حل این مشکل می‌توان ماتریس فوق را با یک ضریب خیلی کوچک از ماتریس هممانی جمع نمود تا غیرتکین گردد. واضح است که به ازای  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  مقدار  $\bar{R}_I + \varepsilon^2 I \rightarrow \bar{R}_I$  همگرا خواهد



مسئله بهینه‌سازی (۳۲) یک مسئله بهینه‌سازی محدب بوده و می‌توان با استفاده از روش‌های عددی استاندارد جواب مسئله را محاسبه نمود؛ اما از آنجاکه ما همواره به دنبال جواب ساده و سریع برای مسئله هستیم سعی می‌نماییم تا حد ممکن بر اساس تئوری بهینه‌سازی محدب راه‌حل را جلو برده و الگوریتمی ابتکاری اما ساده به‌جای روش‌های عددی پیچیده و عمومی پیشنهاد نماییم. در این قسمت برای تحلیل ریاضی از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم. لاگرانژ مسئله بهینه‌سازی به‌صورت زیر است:

$$L(\vec{w}, T, \{\eta_i\}, \lambda, \mu) = T + \sum_i \eta_i (\vec{w}^H R_i(\theta_{I_i}) \vec{w} - T) + \lambda (\vec{w}^H \vec{b}_t - \sqrt{ERP_{Req}}) + \sum_n [\mu]_n (|\vec{w}|_n^2 - P_T) \quad (33)$$

برای تعیین مقدار ضرایب شکل‌دهی بییم، اولاً گرادینان لاگرانژ نسبت به متغیرهای مسئله را باید مساوی صفر قرار داد. ثانیاً در روابط تکمیلی (۳۴)، شرایط بهینگی تکمیلی KKT نیز بیان شده است:

$$\nabla_{\vec{w}} L = 2 \sum_{i=1}^L \eta_i R_i(\theta_{I_i}) \vec{w} + \lambda \vec{b}_t + 2\mu \vec{w} = 0 \quad (34)$$

$$\nabla_T L = 1 - \sum_i \eta_i = 0 \Rightarrow \sum_i \eta_i = 1$$

$$\vec{w}^H R_i(\theta_{I_i}) \vec{w} \leq T \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (1-34)$$

$$\eta_i (\vec{w}^H R_i(\theta_{I_i}) \vec{w} - T) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (2-34)$$

$$\eta_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (3-34)$$

$$\vec{w}^H \vec{b}_t - \sqrt{ERP_{Req}} = 0 \quad (4-34)$$

$$[\mu]_n \geq 0 \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (5-34)$$

$$[\mu]_n (|\vec{w}|_n^2 - P_T) = 0 \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (6-34)$$

$$|\vec{w}|_n^2 \leq P_T \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (7-34)$$

جدول (۱). الگوریتم تعیین مقادیر ماتریس  $\mu$  و برآورده‌سازی قید محدودیت توان

Set  $\mu = \varepsilon^2 I$  and compute  $\vec{w}$  based on (27).

While there is n in which  $|\vec{w}|_n^2 > P_T \quad \forall n \in \{1, \dots, M\}$

$$k = \arg \max_n |\vec{w}|_n^2$$

$$\mu_k = 1.09 * \mu_k$$

Update  $\vec{w}$  based on (27)

End while

### ۳-۲- مینیمم‌سازی بیشینه SNR در گیرنده شنودگر

با توجه به اینکه احتمال حضور شنودگر در محدوده  $\theta_{I_i} \in [\theta_{Imin}, \theta_{Imax}]$  می‌توان مشابه بخش ۱-۳ برای تحلیل مسئله بهینه‌سازی محدوده حضور شنودگر را به L قسمت مساوی تقسیم کرده و برای هر قسمت ERP رادار را مجزا محاسبه نماییم. منطقی است که چون محل شنودگر قابل پیش‌بینی نیست کافی است که از میان L تا ERP محاسبه شده آنکه حداکثر است را مینیمم نماییم. با این روش نه‌تنها در L موقعیت زاویه‌ای مقدار ERP یکنواخت شده است بلکه حداقل نیز شده است؛ بنابراین می‌توان مسئله تعیین بردار شکل‌دهی بییم و تخصیص توان فرستنده را به‌صورت مسئله بهینه‌سازی min-max زیر نوشت:

$$\min_{\vec{w}} \max_{i \in \{1, \dots, L\}} \vec{w}^H R_i(\theta_{I_i}) \vec{w} \quad (31)$$

$$s.t: \vec{w}^H \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \quad (1-31)$$

$$|\vec{w}|_n^2 \leq P_T \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (2-31)$$

برای ساده‌سازی، مسئله بهینه‌سازی (۳۱) را به مسئله معادل زیر تبدیل می‌نماییم:

$$\min_{\vec{w}, T} T \quad (32)$$

$$\vec{w}^H R_i(\theta_{I_i}) \vec{w} \leq T \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (1-32)$$

$$s.t: \vec{w}^H \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \quad (2-32)$$

$$|\vec{w}|_n^2 \leq P_T \quad \forall n = 1, \dots, M \quad (3-32)$$

حالت اول:  $\mu = 0$  و هیچ کدام از قیود محدودیت توان فعال نیست:

در این حالت معادله (۳۸) به صورت زیر اصلاح خواهد شد:

$$\vec{w} = \sqrt{ERP_{Req}} \frac{(\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}))^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H (\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}))^{-1} \vec{b}_t} \quad (39)$$

در رابطه (۳۹)، به ازای  $L < M$  ماتریس  $\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i})$  یک ماتریس تکین خواهد شد و نمی‌توان معکوس آن را محاسبه نمود. برای حل این مشکل می‌توان ماتریس فوق را با یک ضریب خیلی کوچک از ماتریس همانی جمع نمود تا غیرتکین گردد. رابطه (۴۰) رابطه اصلاح‌شده را نمایش می‌دهد که در شبیه‌سازی از همین رابطه با مقدار  $\varepsilon^2 = 10^{-15}$  استفاده شده است.

$$\vec{w} = \sqrt{ERP_{Req}} \frac{(\sum_i \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H (\sum_i \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \vec{b}_t} \quad (40)$$

می‌توان همانند بخش ۳-۲ اثبات نمود که در صورتی که  $\varepsilon^2 \rightarrow 0$  میل نماید ماتریس  $\sum_i \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \varepsilon^2 \mathbf{I}$  به مقدار  $\sum_i \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i})$  میل خواهد کرد؛ بنابراین در بهینه‌سازی تأثیری ندارد.

ب: حالت دوم:  $\mu \neq 0$  و حداقل یکی از قیودهای محدودیت توان فعال است

با جایگذاری رابطه (۳۸) در قیود (۴-۳۴) و (۷-۳۴)، دستگاه معادلات (۴۱) به دست می‌آید. مشابه توضیحات داده شده در مورد حل دستگاه معادلات (۳۰)، نه تنها دستگاه معادلات (۴۱) به شکل تحلیلی قابل حل نمی‌باشد بلکه هم‌زمان حل دستگاه معادلات غیرخطی (۳۸-۱) برای به دست آوردن مقادیر  $\eta_i$  نیز ضروری است. از کنار هم قرار دادن دستگاه معادلات (۴۱) و (۳۸) و حل آن‌ها ضرایب لاگرانژ مجهول محاسبه شده و سپس طبق رابطه (۳۸) ضرایب شکل‌دهی بیم به دست خواهد آمد. بدین منظور یک روش ابتکاری برای حل دستگاه‌های معادلات مزبور پیشنهاد می‌گردد.

$$|[\vec{w}]_n|^2 = p_{max} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{ERP_{Req}} (\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu)^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H (\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu)^{-1} \vec{b}_t} \right|_n^2 = p_{max} \quad \forall n \text{ in which } \mu_n > 0 \quad (41)$$

بیم محاسبه می‌شود. بر اساس بردار شکل‌دهی بیم به دست آمده، ERP رادار در راستای  $L$  زاویه انتخاب شده در محدوده محتمل

از رابطه (۳۴) جواب اولیه ضرایب شکل‌دهی بیم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{w} = -\frac{\lambda}{2} \left( \sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu \right)^{-1} \vec{b}_t \quad (35)$$

با جایگذاری معادله (۳۵) در قید مسئله بهینه‌سازی رابطه (۳۴-۴) می‌توان ضریب  $\lambda$  را به صورت زیر تعیین نمود:

$$\vec{w}^H \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \Rightarrow -\frac{\lambda}{2} \vec{b}_t^H \left( \sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu \right)^{-1} \vec{b}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \quad (36)$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{\sqrt{ERP_{Req}}}{\vec{b}_t^H (\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu)^{-1} \vec{b}_t} \quad (37)$$

با جایگذاری مقدار  $-\frac{\lambda}{2}$  در رابطه (۳۵)، ضرایب شکل‌دهی بیم به صورت (۳۸) بازنویسی می‌گردد:

$$\vec{w} = \sqrt{ERP_{Req}} \frac{(\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu)^{-1} \vec{b}_t}{\vec{b}_t^H (\sum_{i=1}^L \eta_i \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) + \mu)^{-1} \vec{b}_t} \quad (38)$$

با توجه به اینکه در شرایط بهینه  $\sum_i \eta_i = 1$  است، می‌توان نشان داد که مقادیر بهینه  $\eta_i$ ها به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که:

$$\vec{w}^H \mathbf{R}_I(\theta_{I_i}) \vec{w} = T \quad \forall i = 1, \dots, L \quad (1-38)$$

شود یعنی مقدار ERP رادار در همه  $L$  زاویه یکسان شود. اما محاسبه  $\eta_i$ ها جهت تضمین شرایط بهینه گفته شده، نیاز به حل یک دستگاه معادلات غیرخطی  $L$  معادله  $L$  مجهول دارد.

برای برقراری شرط محدودیت توان نیز می‌توان دو حالت در نظر گرفت. در حالت اول فرض می‌کنیم  $\mu = 0$  جواب بهینه باشد و در حالت دوم فرض می‌کنیم حداقل یکی از درایه‌های ماتریس  $\mu$  غیرصفر است و یکی از قیود محدودیت توان فعال می‌باشد.

در روش پیشنهادی ابتدا مقادیر همه  $\eta_i$ ها برابر با  $\frac{1}{L}$  و  $\mu = \varepsilon^2 \mathbf{I}$  تنظیم می‌شود و سپس بر اساس رابطه (۳۸) ضرایب شکل‌دهی

با تغییر متغیر  $\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ}$  که  $\mathbf{F} = \text{nullspace}(\bar{\mathbf{b}}_t^H)$  و  $\mathbf{Z}$  متغیر وابسته است، مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر معادل سازی می‌گردد:

$$\min_{T, Z} T \quad (43)$$

$$(\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ})^H \mathbf{R}_l(\theta_{l_i})(\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ}) \leq T \quad \forall i \quad (1-43)$$

$$= 1, \dots, L$$

$$\|[\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ}]_n\|^2 \leq P_{max} \quad \forall n \quad (2-43)$$

در روش Barrier مسئله مقید (۴۳) به مسئله نامقید زیر تبدیل می‌شود.

$$\min_{T, Z} f(Z, T) = -\frac{1}{\theta} \sum_i \ln(-(\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ})^H \mathbf{R}_l(\theta_{l_i})(\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ}) + T) - \frac{1}{\theta} \sum_n \ln(P_{max} - \|[\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ}]_n\|^2) \quad (44)$$

برای تعیین جواب بهینه مسئله فوق از الگوریتم عددی گرادیان استفاده می‌نماییم. برای ساده‌سازی فرآیند مشتق‌گیری، قید توان هر ماژول فرستنده-گیرنده با تعریف معادل زیر جایگزین شده و تابع هدف (۴۴) بر اساس تعریف جدید بازنویسی می‌شود:

$$(\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ})^H A_n(\bar{\mathbf{w}}_0 + \mathbf{FZ}) \leq P_{max} \quad \forall n=1, 2, \dots, M \quad (45)$$

$A_n$  ماتریسی است که درایه  $(n, n)$  آن برابر یک و بقیه درایه‌ها برابر صفر است. بردار گرادیان تابع هدف نسبت به متغیرهای  $\mathbf{Z}$  و  $\mathbf{T}$  به صورت (۴۶) و (۴۷) خواهد شد.

با استفاده از الگوریتم Back Tracking، مقادیر تکرار بعدی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$X_{New} = X - \theta_{back} \nabla f \quad (48)$$

که مقدار مناسب  $\theta_{back}$  بر اساس رابطه تکراری  $\theta_{back} = \theta_{back} * \beta$  و با مقدار  $\beta = 0.5$  به گونه‌ای تنظیم می‌شود تا شرط توقف Back Tracking برآورده گردد. شرط توقف جستجوی Back Tracking به صورت زیر چک می‌شود:

$$f(X_{New}) \leq f(X) - \alpha \theta_{back} \|\nabla f\|^2 \quad (49)$$

و الگوریتم گرادیان در صورت برآورده شدن شرط زیر متوقف خواهد شد:

$$\|\nabla f\| \leq \epsilon \quad (50)$$

حضور شنودگر محاسبه می‌شود. حال ضرایب لاگرانژ مربوط به کنترل توان هر ماژول فرستنده-گیرنده، مشابه روال توضیح داده شده در جدول (۱) اصلاح می‌شود و به ازای هر اصلاح در مقادیر  $n$ ها، مقادیر  $\eta_i$ ها به روز می‌گردد تا برقراری معادلات (۳۸-۱) تضمین شود. برای تغییر  $\eta_i$ ها ابتدا یکی از  $L$  زاویه که ERP رادار در آن جهت بیشینه است انتخاب شده مثلاً زاویه  $l$ ام و مقدار  $\eta_l$  افزایش داده می‌شود. روند تغییر  $\eta_i$ ها ادامه می‌یابد تا زمانی که اختلاف بیشترین و کمترین ERP رادار در  $L$  زاویه کمتر از حد مشخصی شود. روند کلی الگوریتم تا زمانی که قید بودجه توان همه ماژول‌های فرستنده-گیرنده رعایت شود ادامه می‌یابد.

در جدول (۲) فرایند الگوریتم تعیین ضرایب شکل‌دهی بیم بر اساس جواب مسئله (۳۱) ارائه شده است.

#### جدول (۲). فرآیند الگوریتم min-max

Set  $\mu = \epsilon^2 \mathbf{I}$ ,  $\eta_i = 1 \forall i$  and compute  $\bar{\mathbf{w}}$  based on (۳۸) and  $T(i) = \bar{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_l(\theta_{l_i}) \bar{\mathbf{w}} \forall i = 1, \dots, L$  and  $\|[\bar{\mathbf{w}}]_n\|^2 \forall n = 1, \dots, M$

while there is  $n$  in which  $\|[\bar{\mathbf{w}}]_n\|^2 > p_{max}$

$$m = \arg \max_n (\|[\bar{\mathbf{w}}]_n\|^2)$$

Increase  $\mu_m$  ( $\mu_m = 1.09 * \mu_m$ )

while  $\frac{\max_i T(i)}{\min_i T(i)} > 10$

$$l = \arg \max_i (T(i))$$

Increase  $\eta_l$  ( $\eta_l = 0.001 + \eta_l$ )

Update  $\bar{\mathbf{w}}$  based on (38)

Update  $T(i) = \bar{\mathbf{w}}^H \mathbf{R}_l(\theta_{l_i}) \bar{\mathbf{w}} \forall i = 1, \dots, L$

End while

End while

### ۳-۳ حل مسئله بهینه‌سازی (۳۰) با استفاده از روش عددی استاندارد Barrier

مسئله بهینه‌سازی (۳۱) یک مسئله غیرخطی است که از روش‌های بهینه‌سازی عددی از قبیل Barrier می‌توان برای تعیین جواب بهینه آن استفاده نمود [۲۰].

از طرفی با توجه به اینکه قید دوم مسئله بهینه‌سازی یک قید تساوی است ابتدا با استفاده از روش کاهش ابعاد [۲۰]، قید مسئله حذف شده و در عوض مسئله بهینه‌سازی به مسئله‌ای با ابعاد کمتر تبدیل می‌شود. ابتدا باید یک نقطه شدنی به صورت زیر انتخاب نمود:

$$\bar{\mathbf{w}}^H \bar{\mathbf{b}}_t = \sqrt{ERP_{Req}} \Rightarrow \bar{\mathbf{w}}_0 = \frac{\sqrt{ERP_{Req}}}{M} \bar{\mathbf{b}}_t \quad (42)$$

جدول (۴). پارامترهای رادار

Radar parameter	Value
حداکثر توان اعمال‌شده به هر المان	200 Watts
فرکانس رادار	10 GHz
ERP موردنیاز برای برد 30 km و سطح مقطع راداری RCS=1m <sup>2</sup> و SNR=13.2dB,	61792 Watts
PRF	4000 Hz
LFM Bandwidth	8 MHz
Receiver Noise Figure	3
Number of Integrated pulses	100
RF Loss	4
Duty Cycle of pulses	0.3
تعداد المان‌های آرایه M	40

به ازای بازه‌های مختلف برای محدوده محتمل حضور شنودگر، محاسبات بردار شکل‌دهی بیم برای هر الگوریتم انجام شده و سپس کارایی الگوریتم‌های مختلف برحسب پارامترهای لیست شده در جدول (۵) مورد مقایسه قرار گرفته است.

در جدول (۶) نتایج شبیه‌سازی پارامترهای کارایی معرفی شده در جدول (۵) برای الگوریتم‌های مختلف برحسب محدوده محتمل حضور شنودگر آورده شده است. نتایج جدول (۶) نشان می‌دهد که علاوه بر برآورده سازی قیود احتمال آشکارسازی و محدودیت توان در محدوده حضور شنودگر برای حالتی که محدوده محتمل زاویه شنودگر بیش از ۱۰ درجه از زاویه تحت تست فاصله دارد، نال عمیقی با عمق حداقل ۱۰۰ دسی‌بل ایجاد شده که نشان‌دهنده افزایش خاصیت LPI رادار است. علاوه بر موارد ذکر شده بالا، زمان دسترسی به نقطه بهینه نیز در روش‌های پیشنهادی بسیار کمتر از روش عددی Barrier است که این نشان‌دهنده این است که عملکرد روش‌های ارائه شده بهتر از روش عددی است. با توجه به نتایج به‌دست‌آمده مشخص است که می‌توان از روش‌های پیشنهادی برای تبدیل رادارهای آرایه فازی به رادارهای LPI استفاده نمود.

در جدول (۳) فرآیند الگوریتم Barrier نمایش داده شده است.

جدول (۳). فرآیند الگوریتم Barrier

Initial setting:

$$\vec{Z} = \mathbf{0}_{M-1 \times 1}, \vec{w} = \frac{\sqrt{ERP_{req}}}{b} \mathbf{1}(\vec{b}_t^H)$$

While

While  $\|\nabla f\|$

$$\vec{X}_{new} = \vec{X} -$$

While  $f(\vec{X}_{new}) \geq f(\vec{X}) - \alpha \theta_{back} \|\nabla f\|$

$$\vec{X}_{new} = \vec{X}$$

End while

$$\vec{X} = \vec{X}$$

End while

End while

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + F\vec{Z}$$

#### ۴- نتایج شبیه‌سازی

به‌منظور ارزیابی و صحت‌سنجی الگوریتم‌های پیشنهادی، کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی با کارایی الگوریتم عددی Barrier و الگوریتم Non-LPI مقایسه شده است. در الگوریتم Non-LPI، هدف بیشینه‌سازی SNR گیرنده رادار در راستای زاویه تحت تست است و هیچ توجهی به LPI شدن رادار ندارد که در این حالت بردار شکل‌دهی بیم با فرمول بسته  $\vec{w} = \sqrt{P_{max}} \vec{b}_t$  محاسبه می‌شود. برای شبیه‌سازی فرض شده که رادار در حال تست وجود یا عدم وجود هدف در زاویه ۱۰ درجه (نسبت به خط عمود بر صفحه آرایه) است و موقعیت شنودگر یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌های مختلف است. در جدول (۴) پارامترهای رادار شبیه‌سازی شده بر اساس فرضیات (نزدیک به واقعیت) نمایش داده شده است:

$$-\left[ \frac{\sum \frac{R_i(\theta_i) \vec{w}}{(\vec{w}_0 + FZ)^H R_i(\theta_i) \vec{w}}}{\sum \frac{\vec{w}}{(\vec{w}_0 + FZ)^H A_n \vec{w}}} \right] \quad (46)$$

$$-\left[ \frac{\sum \frac{R_i(\theta_i) \vec{w}}{(\vec{w}_0 + FZ)^H A_i \vec{w}}}{\left[ \begin{array}{c} \phantom{\sum} \\ \phantom{\vec{w}} \end{array} \right]} \right] \quad (47)$$

جدول (۵). پارامترهای موردنظر برای مقایسه کارایی الگوریتم‌های شکل‌دهی بیم

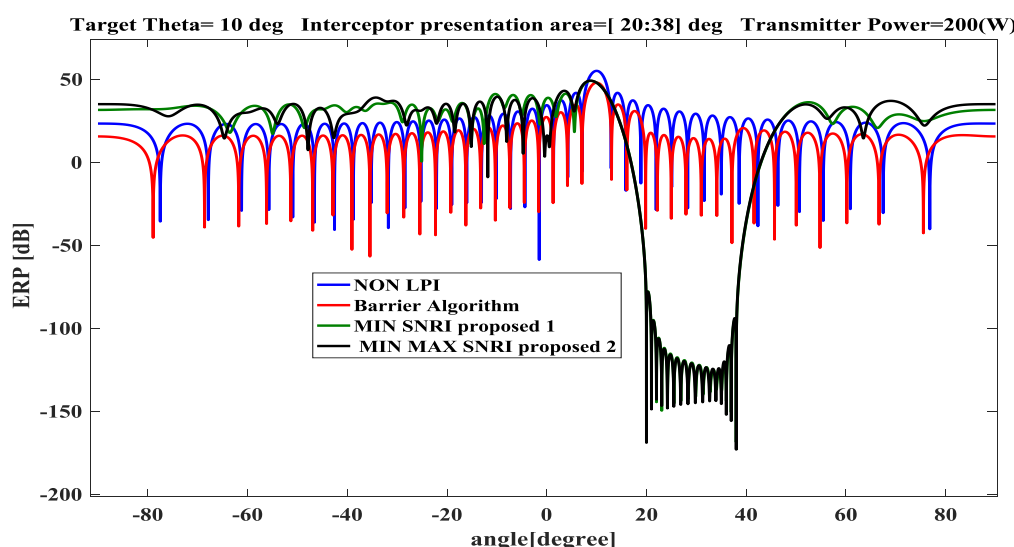
پارامتر	توضیح
Interceptor direction (deg)	محدوده زاویه‌ای محتمل حضور شنودگر
Maximum T/R module power (W)	بیشینه توان اختصاص داده شده: بیشینه توان اعمال شده به ماژول‌های فرستنده-گیرنده $  \vec{w}\ _n^2$
Convergence time (second)	مدت‌زمان محاسبات: زمان صرف شده برای محاسبه بردار ضرایب شکل‌دهی بیم در الگوریتم
Target SNR	مقدار SNR رادار در راستای هدف (SNR) در زاویه تحت تست به ازای هدفی در برد ماکزیمم و RCS برابر (۱) طبق رابطه $SNR = \frac{ \vec{w}^T \vec{b}_t   \alpha }{\ \vec{w}\ ^2}$
Detection Probabaility	احتمال آشکارسازی هدف مدنظر توسط رادار طبق رابطه $Q\left(\sqrt{2 SNR}, \sqrt{-2 \ln(P_{fa})}\right)$
Expected ERP in the interceptor's direction (dBw)	امید ریاضی ERP رادار در بازه حضور شنودگر بر اساس بردار ضرایب شکل‌دهی بیم به‌دست‌آمده $(E\{\vec{w}^T \vec{b}_t \vec{b}_t^H \vec{w}\})$

جدول (۶). عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی برحسب محدوده محتمل حضور شنودگر

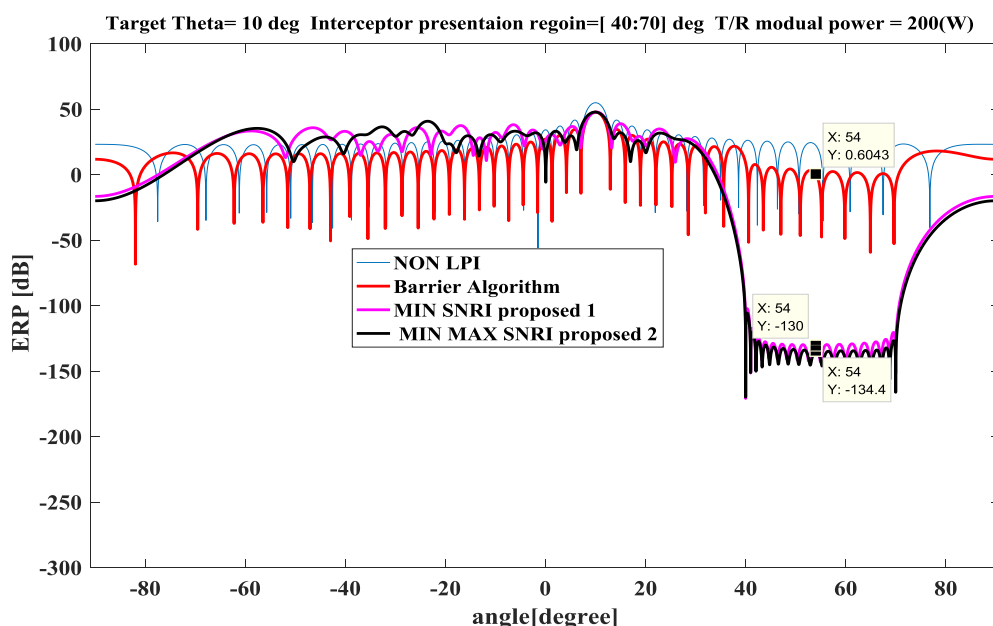
محدوده زاویه حضور شنودگر		۱۵-۲۰	۲۰-۳۸	۴۰-۵۰	۵۰-۶۰	۴۰-۷۰
بیشینه توان اعمال شده به ماژول‌های فرستنده-گیرنده	NON_LPI	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
	Barrier	۴۴/۸۱	۴۵	۴۶	۴۷	۴۹
	Proposed 1	۱۹۳	۱۵۸	۶۲	۶۸	۷۱
	Proposed 2	۱۹۹/۲	۱۱۶	۵۴	۵۸	۶۰
مدت‌زمان محاسبات برحسب ثانیه	NON_LPI	۰/۰۲۸	۰/۰۲۵	۰/۰۲۶	۰/۰۲۷	۰/۰۳۸
	Barrier	۶۰/۲	۴۹	۱۵/۴	۱۳	۳/۰۶
	Proposed 1	۲/۷۲	۳/۱۲	۲/۵۳	۲/۶۴	۲/۱
	Proposed 2	۱/۹۹	۰/۸۷	۰/۷۶	۰/۰۰۵	۱/۱۷
مقدار SNR رادار در راستای هدف	NON_LPI	۱۰۸/۱	۱۰۸/۱	۱۰۸/۱	۱۰۸/۱	۱۰۸/۱
	Barrier	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹
	Proposed 1	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹
	Proposed 2	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹	۲۰/۸۹
احتمال آشکارسازی هدف		۱	۱	۱	۱	۱
	Barrier	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲
	Proposed 1	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲
	Proposed 2	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲	۰/۹۰۲
امید ریاضی ERP رادار در راستای شنودگر	NON_LPI	۳۳	۲۷	۲۳	۲۲	۲۱
	Barrier	۲۲	۱۲	۱/۷	۱	۲/۲
	Proposed 1	-۲۴	-۱۲۰	-۱۰۶	-۱۱۰	-۱۲۴
	Proposed 2	-۲۵	-۱۱۸	-۱۱۴	-۱۰۵	-۱۲۸

Barrier با توان موجود فرستنده نتوانسته هم قید کیفیت سرویس را برآورده نماید و هم در موقعیت شنودگر نال ایجاد نماید. شکل (۳) نیز همین موارد برای محدوده حضور شنودگر بین ۴۰ الی ۷۰ درجه نمایش داده شده است. با توجه به شکل مشخص است که در تمام محدوده زاویه‌ای نال ایجاد شده قابل قبول است. متوسط عمق نال ایجاد شده در این محدوده ۱۲۵- دسی بل است که خاصیت LPI راداری را افزایش می‌دهد. درعین حال احتمال آشکارسازی و محدودیت توان نیز رعایت می‌گردد.

شکل (۲) میزان ERP رادار در زوایای مختلف به ازای روش‌های مختلف شکل‌دهی بیم را در حالتی که هدف در ۱۰ درجه نسبت به خط عمود بر آرایه قرار داشته و موقعیت شنودگر در محدوده زاویه‌ای بین ۲۰ الی ۳۸ درجه با توزیع یکنواخت فرض شده است را نشان می‌دهد. متوسط عمق نال در محدوده حضور شنودگر طبق جدول (۶) در روش Barrier برابر ۹۲ و در روش‌های پیشنهادی ۱۱۸- و ۱۲۰/۸- است. عمق نال ایجاد شده برای دیگر فرضیات حضور شنودگر نیز در جدول (۶) آورده شده است. عمق نال نشانگر این است که روش‌های پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به روش Barrier دارند. این بدین معناست که روش



شکل (۲). ERP رادار برحسب زاویه با فرض احتمال یکسان برای موقعیت شنودگر در بازه زاویه‌ای [۲۰-۳۸] درجه و زاویه تحت تست ۱۰ درجه



شکل (۳). ERP رادار برحسب زاویه با فرض احتمال یکسان برای موقعیت شنودگر در بازه زاویه‌ای [۴۰-۷۰] درجه و زاویه تحت تست ۱۰ درجه

## ۵- نتیجه گیری

در این مطالعه به منظور افزایش خاصیت LPI رادار آرایه فازی اکتیو، بهینه‌سازی ضرایب شکل‌دهی بیم با لحاظ کردن محدودیت‌ها و ملاحظات کارایی رادار پیشنهاد شده است. سیگنال رادار توسط سیستم شنودگر دریافت و آنالیز می‌گردد؛ بنابراین بهبود خاصیت LPI معادل به حداقل رساندن سطح ERP در گیرنده شنودگر است تا رادار از دید شنودگر مخفی باشد. مسئله‌های بهینه‌سازی با دیدگاه‌های مختلف فرموله و به صورت ریاضی تحلیل شده‌اند و فرم بسته‌ای برای ضرایب شکل‌دهی بیم همراه با الگوریتم‌های ابتکاری برای محاسبه آن‌ها پیشنهاد شده است. به منظور اعتبارسنجی الگوریتم‌های پیشنهادی، کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی با الگوریتم عددی Barrier و الگوریتم ساده Non-LPI مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که الگوریتم‌های پیشنهادی نه تنها خاصیت LPI بهتری به رادار می‌دهند (ERP به دست آمده در راستای شنودگر به ازای الگوریتم‌های پیشنهادی به مراتب کمتر است) بلکه محدودیت‌های رادار را برآورده می‌نمایند و در مقایسه با الگوریتم عددی Barrier به مراتب سریع‌تر هستند.

## ۶- مراجع

- [7] Liu, GuoSui, Hong Gu, WeiMin Su, & HongBo Sun, "The analysis and design of modern low probability of intercept radar," In 2001 CIE International Conference on Radar Proceedings, vol. Cat no. 01TH8559, pp. 120-124, IEEE, 2001.
- [8] Deng, Hai, & Braham Himed, "A virtual antenna beamforming (VAB) approach for radar systems by using orthogonal coding waveforms.," IEEE transactions on antennas and propagation 57.2, pp. 425-435, 2009.
- [9] Basit, Abdul, Ijaz Mansoor Qureshi, Wasim Khan, Ihsan Ulhaq, & Shafqat Ullah Khan, "Hybridization of cognitive radar and phased array radar having low probability of intercept transmit beamforming," International Journal of Antennas and Propagation, 2014.
- [10] Nusenu, Shadrack Yaw, "Low Probability of Interception Beamforming Using Frequency Diverse Array Antenna," ASTES Journal, ISSN:2415-6698, Vols. Vol. 2, No. 3, pp. 24-29, 2017.
- [11] She, Ji, Zhou, Jianjiang, Wang, Fei & Li, Hailin, "LPI optimization framework for radar network based on minimum mean-square error estimation," Entropy, Vols. 19, no. 8, p. 397, 2017.
- [12] Andargoli, S. M. H., & Malekzadeh, J, "LPI optimization framework for search radar network based on information fusion," Aerospace Science and Technology, 67, pp. 206-214, 2017.
- [13] Andargoli, Seyed Mehdi Hosseini & Javad Malekzadeh, "LPI radar network optimization based on geometrical measurement fusion," Optimization and Engineering 20, no. 1, pp. 119-150, 2019.
- [14] Lu, C., Sheng, W., Han, Y., & Ma, X, " Robust adaptive phase- only beamforming algorithm for interference suppression," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 29(9), pp. 1152-1164, 2014.
- [15] Babur, G., Aubry, P., & Le Chevalier, F, " Simple transmit diversity technique for phased array radar," IET Radar, Sonar & Navigation, Vols. 10(6), pp. 1046-1056, 2015.
- [16] Liu, L., Gao, Y., Wang, F., & Liu, X, "Real-Time Optronic Beamformer on Receive in Phased Array Radar," IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, Vols. 16(3), pp. 387-391, 2018.
- [17] Skolnik, M. I, "Radar handbook," New York, NY United States 10036: McGraw-Hill, Incorporated, 1970.
- [18] Mahafa, Bassem R, "Radar signal analysis and processing using MATLAB," vol. 1, Chapman and Hall/CRC, pp. 290-317, 2009.
- [19] V, Rabinovich & Alexandrov, n, "Antenna Arrays and Automotive Applications," Springer, New York, Chapter 2, 2013.
- [20] Boyd, S & Vandenberghe, L, "Convex optimization," Cambridge university press, Mar 2004.
- [1] Pandey, Nilay, "Beamforming in MIMO Radar," PhD diss Department of Electronics and Communication Engineering. National Institute of Technology Rourkela, pp. 17-25, 2014.
- [2] Lawrence, Daniel E, "Low probability of intercept antenna array beamforming," IEEE Transactions on Antennas and Propagation 58.9, pp. 2858-2865, 2010.
- [3] Denk, A, "Detection and jamming low probability of intercept (LPI) radars," Doctoral dissertation, Monterey California. Naval Postgraduate School. section II, pp. 5-11, 2006.
- [4] Adamy, D, EW 101: A first course in electronic warfare, Artech House, 2001(Vol. 101).
- [5] Carlson, Eric J, "Low probability of intercept (LPI) techniques and implementations for radar systems," In Proceedings of the 1988 IEEE National Radar Conference, pp. 56-60, 1988.
- [6] Pietrasinski, J. F., T. W. Brenner, and Czesław J. Lesnik, "Selected tendencies of modern radars and radar systems development," In 12th International Conference on Microwaves and Radar, MIKON-98, Conference Proceedings, vol. IEEE Cat. No. 98EX195, pp. 133-137, 1998.