

علمی- پژوهشی

## تحلیل پایداری یک کنترلر چند حلقه حاوی رگولاتورهای فیدبک خروجی و

## اشباع برای موتور هواپیماهای تجاری

امین ایمانی\*

گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بوعلی

سینا، همدان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۹

## چکیده

یک روش کارآمد جهت کنترل موتور هواپیماهای تجاری ساختار چندحلقه Min-Max است. در این مقاله، یک کنترلر Min-Max با ساختار سوئیچینگ و حاوی رگولاتورهای فیدبک خروجی و تابع اشباع روی نرخ جریان سوخت برای یک موتور توربوفن طراحی می‌شود. علاوه بر عملکرد مطلوب، تحلیل پایداری یک مسئله مهم در فرآیند طراحی کنترلر برای موتورهای هوایی است. به دلیل رفتار سوئیچینگ روش Min-Max، پایداری تک تک حلقه‌ها پایداری کل سیستم را تضمین نمی‌کند؛ بنابراین یک روش جهت تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته ارائه می‌شود. برای این منظور، عملگرهای Min، Max و تابع اشباع با معادل‌های غیرخطی آن‌ها جایگزین شده و ساختار سیستم کنترلی به شکل متعارف سیستم لور تبدیل می‌شود. سپس شرایط برای پایداری مجانبی استخراج شده و با استفاده از روش ارائه شده، اثبات پایداری مجانبی برای سیستم حلقه بسته انجام می‌گیرد. در یک شبیه‌سازی با مدل غیرخطی از یک موتور توربوفن، عملکرد کنترلر Min-Max طراحی شده در برآوردن تراست و مدیریت قیود با روش Min-Max/SMC مقایسه می‌شود.

**کلیدواژه‌ها:** موتور توربوفن تجاری، ساختار سوئیچینگ Min-Max، رگولاتور فیدبک خروجی، تابع اشباع غیرخطی، پایداری مجانبی.

## Stability Analysis of a Multi-loop Controller Containing Output Feedback Regulators and a Saturation Function for Commercial Aircraft Engines

Imani, A.

Department of Mechanical Engineering,

Faculty of Engineering, Bu-Ali Sina

University, Hamedan, Iran

(Received: 17/Jun/2022; Accepted: 20/August/2022)

**ABSTRACT**

An efficient approach to control the engine of a commercial aircraft is the Min-Max multi-loop structure. In this paper, a Min-Max controller with a switching structure containing output feedback regulators and a saturation function on the fuel flow rate is designed for a turbofan engine. In addition to desirable performance, the stability analysis is an important issue in the process of controller design for aero-engines. Because of the switching behavior of the Min-Max approach, the stability of each single loop by itself does not ensure the stability of the whole system. Therefore, a procedure is provided to analyze the stability of the closed loop system. For this purpose, the Min and Max operators and the saturation function are replaced by their nonlinear equivalents and the structure of the control system is converted to the canonical configuration of the Lure's system. Then, the conditions for asymptotic stability are extracted and using the presented approach, an asymptotic stability proof is achieved for the closed loop system. In a simulation study with the nonlinear model of a turbofan engine, the performance of the designed Min-Max controller in the thrust attainment and limitation management is compared with the Min-Max/SMC technique.

**Keywords:** Commercial turbofan engine, Min-Max switching structure, Output feedback regulator, Nonlinear saturation function, Asymptotic stability.

## ۱- مقدمه

Max، تجزیه و تحلیل پایداری است. با توجه به ماهیت سوئیچینگ الگوریتم Min-Max، پایداری تک حلقه‌ها لزوماً پایداری کل سیستم را تضمین نمی‌کند. مطالعات اندکی به این موضوع پرداخته‌اند. پایداری یک سیستم حلقه بسته شامل یک متغیر کنترل شده و یک خروجی محدود با یک کنترل کننده Min-Max حاوی جبران کننده‌های خطی توسط لوپز و مارتین [۱۰] و گلاتفلدر و شوفلبرگر [۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. در تحقیق دیگری، پایداری غیر مجانبی یک طرح مشابه با جبران کننده‌های خطی توسط جوهانسون [۱۲] با استفاده از ابزارهای سیستم‌های تکه‌ای خطی و توابع لیاپانوف چندگانه تحلیل شده است. ریچتر [۱۳] نیز پایداری مجانبی ساختار Min-Max حاوی رگولاتورهای مود لغزشی<sup>۱</sup> و بدون اشباع ورودی را به شیوه‌ای پیچیده با استفاده از توابع لیاپانوف و تکنیک‌های مجموعه ناورد<sup>۲</sup> اثبات کرد، سپس استراتژی Min-Max/SMC را برای کنترل یک موتور توربوفن با نسبت کنارگذر بالا اعمال نمود [۱۴]. در سال‌های اخیر، ایمانی و منتظری [۱۵] یک روش جامع برای بررسی پایداری ساختار Min-Max حاوی رگولاتورهای فیدبک حالت ارائه کردند و در تحقیقی پایداری کنترلر Min-Max حاوی رگولاتورهای فیدبک حالت و تابع اشباع را بررسی نمودند [۱۶]؛ اما تاکنون هیچ روشی برای تجزیه و تحلیل پایداری ساختار Min-Max حاوی چندین رگولاتور فیدبک خروجی و تابع اشباع برای کنترل موتور هواپیما ارائه نشده است، در حالی که این ساختار در تحقیقات معتبری برای کنترل موتور هوایی بکار گرفته شده است [۱۷ و ۱۸].

در این مقاله، یک کنترلر انتخاب‌گر Min-Max با چندین رگولاتور فیدبک خروجی برای یک مدل موتور توربوفن طراحی می‌شود. یک سیستم خطی به دست آمده از یک مدل غیرخطی سطح جزء<sup>۳</sup> به عنوان سیستم در نظر گرفته شده و رگولاتورها با استفاده از روش‌های فیدبک خروجی طراحی می‌شوند. یک بلوک اشباع نیز برای جلوگیری از افزایش یا کاهش بیش از حد نرخ جریان سوخت در نظر گرفته شده تا احتمال وقوع پدیده خطرناک سرج کمپرسور و خاموشی محفظه احتراق را کاهش دهد. سپس

سیستم کنترل موتور هواپیما باید تراست مورد درخواست خلبان را در شرایط مختلف پرواز به نحو دقیق و ایمنی تأمین نماید. دستیابی به چنین عملکردی برای موتور هواپیما به دلیل وجود محدودیت‌های ساختاری و فیزیکی مانند حداکثر سرعت روتور، حداکثر دمای توربین و همین‌طور محدودیت‌های عملکردی موتور مانند حداقل و حداکثر فشار استاتیکی محفظه احتراق، حداقل حاشیه سرج کمپرسور و موارد مشابه پیچیده است [۱]. بعضی محدودیت‌ها مربوط به حالت پایا هستند و عملکرد موتور را در وضعیت پایا محدود می‌کنند بعضی دیگر محدودیت‌های دینامیکی هستند که عملکرد موتور را در وضعیت گذرا مقید می‌کنند. کنترلر انتخاب‌گر Min-Max یک طرح کنترلی است که برای موتور هواپیماهای تجاری بکار گرفته می‌شود [۲ و ۳]. در این روش متغیر کنترل شده اصلی (یعنی نماینده تراست) و هر کدام از متغیرهای مقید موتور یک رگولاتور جداگانه دارند و سیگنال کنترلی به گونه‌ای عمل می‌کند که الزامات گذرا و پایا را تأمین نموده و متغیرهای مقید را در محدوده مجاز نگه دارد [۴-۶]. یکی از مزایای ساختار Min-Max آن است که سیستم‌های فیدبک در هر زمان به صورت جداگانه عمل می‌کنند بنابراین رگولاتورها می‌توانند به صورت جداگانه با استفاده از روش‌های کنترلی مختلف طراحی شوند. از آنجایی که سوئیچ بین رگولاتورها تنها زمانی اتفاق می‌افتد که خروجی یکی از رگولاتورهای غیرفعال، خروجی رگولاتور فعال را قطع کند، لذا یک مشخصه مفید دیگر ساختار Min-Max تغییر بدون جهش رگولاتورها است که منجر به ناپیوستگی ناگهانی در متغیر کنترل شده نمی‌شود. علاوه بر موتورهای هواپیما و موتورهای توربین گاز صنعتی [۸ و ۷]، ساختار مدیریت قیود Min-Max را می‌توان برای فرآیندهای صنعتی اعمال کرد که در آن‌ها خروجی اصلی بین نقاط تنظیم کنترل می‌شود و مجموعه‌ای از خروجی‌های سیستم باید بین محدودیت‌های مورد نظر نگه داشته شوند [۹].

علیرغم استفاده زیاد از سیستم‌های کنترل Min-Max با رگولاتورهای خطی در موتورهای هواپیما، بررسی رفتار دینامیکی چنین ساختاری تنها در تحقیقات کمی انجام شده است. یک مسئله مهم در طراحی کنترل کننده Min-

<sup>1</sup> Sliding mode<sup>2</sup> Invariant set<sup>3</sup> Component level

مدل سازی و تحلیل سیستم های ترمودینامیکی (T-MATS) ارائه شده توسط مرکز تحقیقات گلن ناسا (GRC) استفاده می کند. T-MATS یک نرم افزار متن باز است که مدل سازی ترمودینامیکی موتور توربین گاز را ساده می کند [۲۳]. در این نرم افزار از تکنیک تعادل انرژی و نقشه های اجزاء برای توصیف سیستم توربوماشینی غیرخطی استفاده می شود. برای هر جزء موتور یک بلوک جداگانه وجود دارد. بلوک های اجزاء شامل: بلوک محیطی که برای تعیین شرایط ورودی موتور با توجه به ارتفاع و عدد ماخ استفاده می شود، بلوک کمپرسور که برای محاسبه خروجی های کمپرسور و توان مورد نیاز با استفاده از نقشه کمپرسور استفاده می شود، یک بلوک محفظه احتراق که دمای ورودی توربین را با توجه به مقدار جریان سوخت تعیین می کند، بلوک توربین که شرایط گاز خروجی توربین و همچنین توان تحویلی را محاسبه می کند، بلوک نازل که برای تعیین میزان تراست و شرایط خروجی استفاده می شود؛ و بلوک شفت که از تفاوت بین قدرت کمپرسور و توربین و سرعت فعلی محور برای تعیین دینامیک روتور استفاده می کند.

مدل غیرخطی حول یک نقطه کاری (ارتفاع ۰، ماخ ۰ و میزان سوخت برابر با  $W_f = 1.112 \text{ kg/s}$ ) با استفاده از روش های شناسایی سیستم برای طراحی کنترل کننده خطی شده است. برای این منظور، یک سیگنال غنی به فرم APRBS<sup>۲</sup> با حداکثر دامنه  $0.2 \text{ kg/s}$  برای ورودی جریان سوخت تعریف شده و به مدل غیرخطی ترمودینامیکی در نقطه کاری اعمال شده است. سپس خروجی های لازم استخراج شده و با استفاده از داده های ورودی-خروجی و جعبه ابزار شناسایی سیستم<sup>۳</sup> نرم افزار MATLAB، ماتریس های مدل خطی تعیین شده اند. تطابق مدل خطی به دست آمده و مدل غیرخطی بیش از ۹۵ است.

مدل خطی سیستم با ورودی یکپارچه<sup>۴</sup> به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{u} &= u_r \\ y_i &= C_i x + D_i u \end{aligned} \quad (1)$$

که  $x = [\Delta N_f \quad \Delta N_c]^T$  بردار متغیرهای حالت شامل نمو سرعت فن و نمو سرعت هسته برحسب rpm است.

<sup>۲</sup> Amplitude-modulated Pseudo Random Binary Sequence (APRBS)

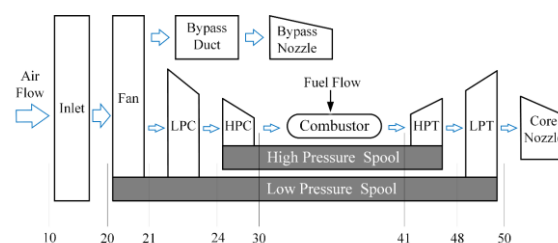
<sup>۳</sup> System Identification Toolbox

<sup>۴</sup> Integrated input

برای اولین بار پایداری سیستم حلقه بسته با کنترلر Min-Max حاوی رگولاتورهای فیدبک خروجی و تابع اشباع تحلیل می شود. برای این منظور، ساختار سیستم کنترلی به یک پیکربندی متعارف تبدیل شده و شرط پایداری جانبی مشخص می گردد. پس از آن، پایداری جانبی سیستم کنترلی تضمین شده و عملکرد کنترل کننده Min-Max چندرگولاتوری با روش Min-Max/SMC مقایسه می شود.

## ۲- مدل موتور توربوفن

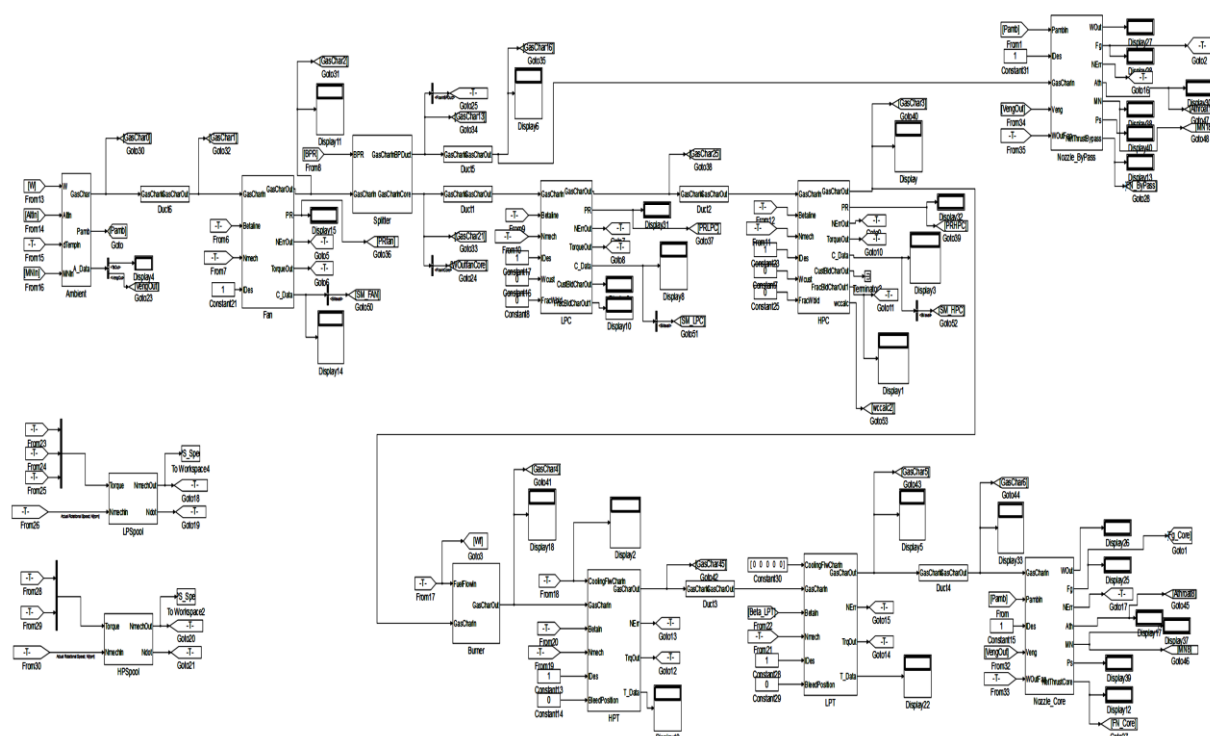
موتورهای جت اساساً بر اساس چرخه ترمودینامیکی ژول-برایتون کار می کنند. شکل ۱ اجزای مختلف یک موتور توربوفن دومحوره را نشان می دهد. پنج جزء دوار عبارت اند از: فن، کمپرسور فشار پایین (LPC) و توربین فشار پایین (LPT) بر روی محور فشار پایین و کمپرسور فشار بالا (HPC) و توربین فشار بالا (HPT) بر روی محور فشار بالا. موتور توربوفن مورد مطالعه در این مقاله در کلاس تراست  $30000 \text{ lbf}$  ( $134 \text{ kN}$ ) با نسبت کنارگذر  $5/5$ ، نسبت فشار کلی (OPR)<sup>۱</sup> برابر ۳۴ و دبی جرمی هوای ورودی  $427 \text{ kg/s}$  است. سرعت طراحی برای فن و محور هسته به ترتیب  $5000 \text{ rpm}$  و  $14460 \text{ rpm}$  است [۲۰ و ۱۹].



شکل (۱). شماتیک یک موتور توربوفن دومحوره

مدل سازی موتورهای توربین گاز نقش بسزایی در ارزیابی عملکرد و طراحی سیستم کنترل دارد. یک مدل سطح جزء ترمودینامیکی [۲۱ و ۲۲] که بر اساس اصول کار توربین گاز کار می کند، در محیط MATLAB/Simulink پیاده سازی شده و به عنوان مدل موتور غیرخطی استفاده می شود. داده های مدل با داده های موجود از موتور CFM56-5B و همین طور مدل توسعه یافته در نرم افزار Gasturb 10 صحت سنجی شده است. شکل ۲ تصویر مدل موتور را نشان می دهد. این مدل از جعبه ابزار برای

<sup>۱</sup> Overall Pressure Ratio (OPR)



شکل (۲). تصویر مدل موتور در محیط MATLAB-Simulink

در نظر گرفته می‌شوند [۳]. برای این هدف، در هر شرایط پرواز (ارتفاع، ماک و دما)، سیستم کنترل موتور، فرمان دریچه گاز خلبان را از یک مقدار تراست موردنظر به یک سرعت فن یا نقطه تنظیم EPR تبدیل می‌کند [۲۴ و ۳]. برای جلوگیری از خرابی مکانیکی قطعات دوار، سرعت هسته باید محدود شود. دمای ورودی توربین فشار بالا یک متغیر از بالا مقید برای جلوگیری از خرابی بخش‌های با دمای بالا است. این متغیر را نمی‌توان به‌طور قابل‌اعتمادی اندازه‌گیری کرد و دمای خروجی HPT یعنی T-48 به‌طور کلی به‌عنوان یک جایگزین برای اهداف کنترل در نظر گرفته می‌شود [۱۷]. میزان این محدودیت‌ها با توجه به مشخصات فیزیکی اجزای موتور تعیین می‌شود. به‌منظور جلوگیری از فشار بیش‌ازحد محفظه احتراق، فشار استاتیک احتراق (Ps3) به‌عنوان یک متغیر از بالا مقید در نظر گرفته می‌شود. همچنین، برای جلوگیری از خاموشی محفظه احتراق در حالت پایا و برای حفظ عملکرد پایدار موتور در حالت دور آرام، این پارامتر باید یک متغیر از پایین مقید باشد [۲]. ممکن است در حین کاهش ناگهانی سرعت موتور در حالت گذرا، پدیده خطرناک سرچ برای کمپرسور فشار پایین و همین‌طور خاموشی محفظه احتراق اتفاق بیافتد. به‌منظور جلوگیری از این شرایط، حد پایینی برای نرخ جریان سوخت توسط تابع اشباع تعریف شده است که نرخ

نمو جریان سوخت به‌عنوان ورودی کنترلی برحسب  $kg/s$  است.  $y_i$  نمو خروجی‌ها شامل سرعت محور فشار پایین، سرعت محور فشار بالا، فشار استاتیکی خروجی کمپرسور و دمای خروجی توربین فشار بالا هستند. ماتریس‌های مدل به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} -1.55 & 0.0405 \\ -0.1221 & -1.798 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2395 \\ 5656 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0], \quad D_1 = 0$$

$$C_2 = [0 \ 1], \quad D_2 = 0$$

$$C_3 = [7.05 \ 1.07] \times 10^{-3}, \quad D_3 = 6.227$$

$$C_4 = [-7.82 \ -0.78] \times 10^{-2}, \quad D_4 = 450.5$$

$$C_5 = [7.05 \ 1.07] \times 10^{-3}, \quad D_5 = 6.227$$

### ۳- الزامات کنترل و ساختار Min-Max چند رگولاتوری

الزامات کنترلی متعددی در سیستم موتور هواپیما وجود دارد. مهم‌ترین الزامات در اینجا شرح داده می‌شود. مقدار تراست پارامتر اصلی کنترل‌شده برای موتورهای هواپیما است، درحالی‌که این متغیر را نمی‌توان به‌طور قابل‌اعتمادی اندازه‌گیری کرد؛ بنابراین، پارامتر سرعت فن یا نسبت فشار موتور که فشار خروجی توربین فشار پایین تقسیم بر فشار ورودی موتور است (EPR<sup>1</sup>: P50/P20) و ارتباط زیادی با مقدار تراست دارد، عموماً برای کنترل غیرمستقیم تراست

<sup>1</sup> Engine Pressure Ratio (EPR)

یک از رگولاتورهای حد پایین بزرگ تر است؛ بنابراین دستور تراست موردنظر نیز محقق می‌شود.

عمل انتگرالی برای دستیابی به حلقه‌های کنترلی نوع ۱ برای تنظیم بدون انحراف و کاهش اثرات اغتشاش استفاده می‌شود [۲۵]. رگولاتورهای سرعت فن و خروجی‌های مقید از بالا (یعنی  $N_c$ ,  $Ps3_{max}$ ,  $T-48$ ) به انتخاب‌گر  $Min$  متصل می‌شوند، درحالی‌که رگولاتور متغیر مقید از پایین  $Ps3_{min}$  به انتخاب‌گر  $Max$  متصل است. فرض بر این است که رگولاتور کنترل تراست  $K_1$  یک جبران‌کننده دینامیکی است و رگولاتورهای مربوط به متغیرهای مقید (یعنی  $K_2, \dots, K_5$ ) ضرایب ثابت هستند. در بخش بعدی، روشی برای تجزیه و تحلیل پایداری سیستم کنترل  $Min-Max$  ارائه می‌شود و سپس عملکرد کنترل‌کننده ارزیابی می‌گردد.

#### ۴- تحلیل پایداری سیستم کنترلی

به منظور بررسی پایداری طرح سوئیچینگ  $Min-Max$ ، ساختار سیستم کنترلی (شکل ۳) به فرم متعارف سیستم لور<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود. سپس شرط پایداری مطلق سیستم حلقه بسته مشخص می‌شود. ابتدا، بر اساس شکل ۴، یک پیکربندی مجدد انجام شده و رگولاتورهای ثابت به فیدبک منتقل می‌شوند. در پیکربندی جدید،  $r'_i = r_i K_i$ ،  $for i=1, \dots, 4$  و همچنین  $G_i(s) = \frac{G_i(s)}{s}$ ،  $for i=1, 2, \dots, l$  انتخاب‌گرهای  $Max$  و  $Min$  حاوی بیش از دو ورودی به انتخاب‌گرهای دو-ورودی تجزیه می‌شوند. شکل ۵ این تجزیه را نشان می‌دهد. انتخاب‌گرهای  $Min$  و  $Max$  با غیرخطی‌های معادل خود جایگزین می‌شوند. شکل ۶ انتخاب‌گرهای  $Min$  و  $Max$  و معادل‌های آن‌ها را نشان می‌دهد. مطابق شکل (۶-ا)، برای تعیین معادل  $Min$ ، داریم:

$$u_s = \min_{+u-u} \{(r' - x), u\} = u + \min\{r' - x - u, 0\} \quad (3)$$

با استفاده از مشخصه عملگر  $Min$  که  $\min(a, b) = -\max(-a, -b)$ ، معادله (۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u_s = u - \max\{(x + u - r'), 0\} \quad (4)$$

که خروجی معادل  $Min$  است (شکل ۶-ب). معادل  $Max$  به روشی مشابه مشخص می‌شود. مطابق شکل ۶-ج، داریم:

$$u_s = \max_{+u-u} \{(r' - x), u\} = u + \max\{r' - x - u, 0\} \quad (5)$$

کاهش سوخت را محدود می‌کند. تابع اشباع همچنین یک حد بالایی بر روی نرخ جریان سوخت ایجاد می‌کند که سرعت جریان سوخت را در شرایط شتاب مثبت محدود می‌کند تا از وقوع سرچ برای کمپرسور فشار بالا و همچنین از تنش بیش‌از حد روتور جلوگیری کند [۱۷ و ۱۸].

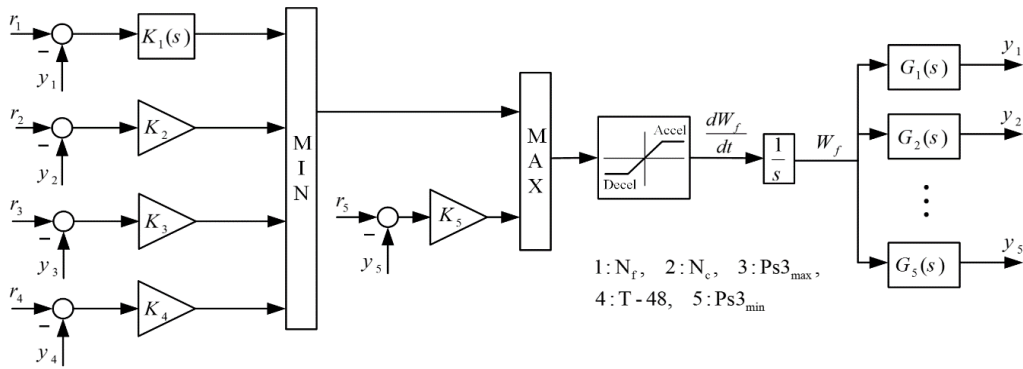
در این پژوهش، کنترل‌کننده موتور باید فرمان سرعت فن موردنظر را به‌عنوان نماینده تراست برآورده کند و متغیرهای مقید زیر را در محدوده خود در حالت پایا و گذرا حفظ کند:

$$\begin{cases} \Delta N_c (y_2 \leq r_2) \\ \Delta Ps3_{max} (y_3 \leq r_3) \\ \Delta T - 48 (y_4 \leq r_4) \\ \Delta Ps3_{min} (y_5 \geq r_5) \\ \frac{dW_f}{dt} (u_{r,min} \leq u_r \leq u_{r,max}) \end{cases} \quad (2)$$

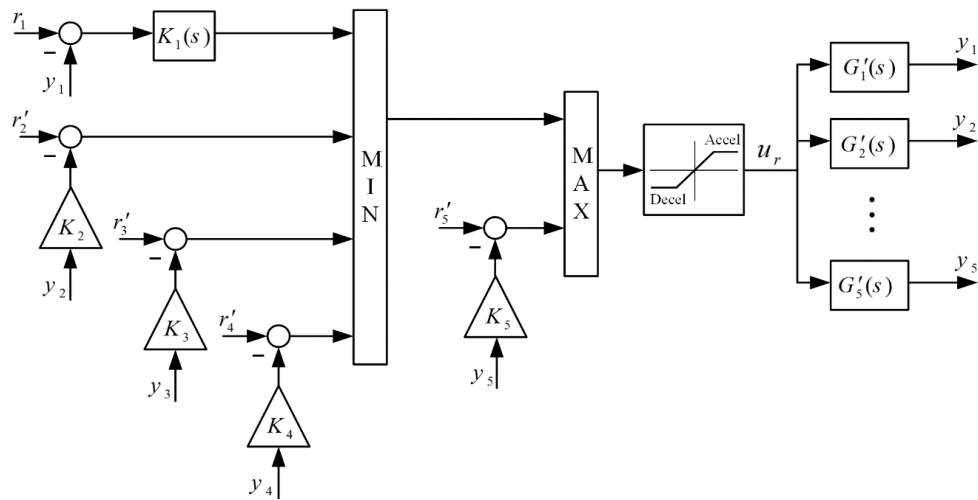
یک سیستم چند رگولاتوری  $Min-Max$  حاوی رگولاتورهای فیدبک خروجی و تابع اشباع برای موتور توربو فن طراحی شده است. شکل ۳ معماری سیستم کنترل را با ورودی یکپارچه نشان می‌دهد. هر یک از محدودیت‌های فیزیکی و عملیاتی موتور یک رگولاتور جداگانه دارد. هر رگولاتور یک نرخ جریان سوخت تولید می‌کند که قید مربوطه را حفظ کند. جریان سوخت به دست آمده از رگولاتور اصلی و هر یک از رگولاتورهای مربوط به قیود حد بالا به انتخاب‌گر  $Min$  وارد می‌شود. حداقل جریان سوخت انتخاب شده مربوط به رگولاتوری است که متغیر آن نزدیک‌ترین به حد مجاز است؛ بنابراین، از هیچ‌یک از حدود بالا تجاوز نمی‌شود. در مرحله بعد، خروجی رگولاتورهای مربوط به قیود حد پایین با هم مقایسه می‌شوند. خروجی انتخاب‌گر  $Min$  و هر یک از رگولاتورهای حد پایین به عملگر  $Max$  وارد می‌شود. در این شرایط، حداکثر سیگنال انتخاب می‌شود و این تضمین می‌کند که از هیچ‌یک از حدود پایین تجاوز نمی‌شود؛ بنابراین، خروجی ساختار  $Min-Max$  سیگنال نرخ جریان سوختی است که تضمین می‌کند که هیچ‌یک از محدودیت‌های فیزیکی و عملیاتی نقض نمی‌شود [۲].

با این حال، زمانی که موتور به گونه‌ای کار می‌کند که متغیرهای مقید از قیود دور باشند، خروجی رگولاتور اصلی که برای مدیریت تراست استفاده می‌شود کمتر از سیگنال‌های تولید شده توسط هر یک از رگولاتورهای حد بالایی است و همچنین از سیگنال‌های تولید شده توسط هر

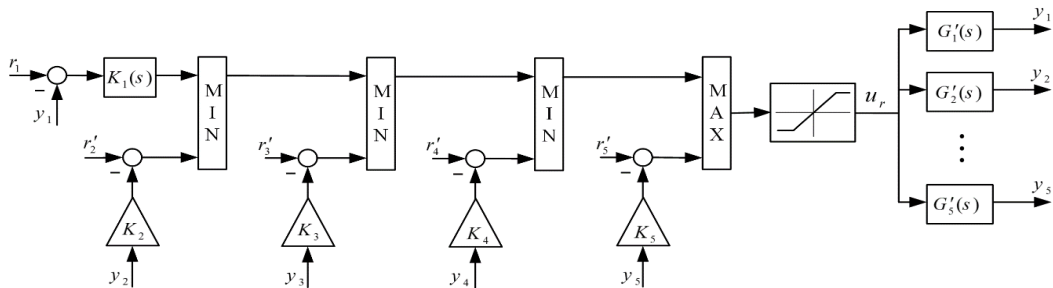
<sup>1</sup> Lure's system



شکل (۳). کنترلر Min-Max



شکل (۴). پیکربندی مجدد ساختار Min-Max



شکل (۵). جداسازی ساختار Min-Max

عنصر اشباع نیز با معادل حاوی ناحیه مرده<sup>۱</sup> مطابق شکل  $\nabla$  جایگزین می‌شود. برای دستیابی به این معادل، بلوک اشباع به صورت یک منطق برتری<sup>۲</sup> به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_r = \min \{ \max(u_{r_{min}}, u_s), u_{r_{max}} \} \quad (7)$$

با استفاده از ویژگی عملگر Max که  $\max(a, b) = -\min(-a, -b)$  به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$u_s = u - \min\{(x+u-r'), 0\} \quad (8)$$

که خروجی معادل Max (شکل ۶-d) است.

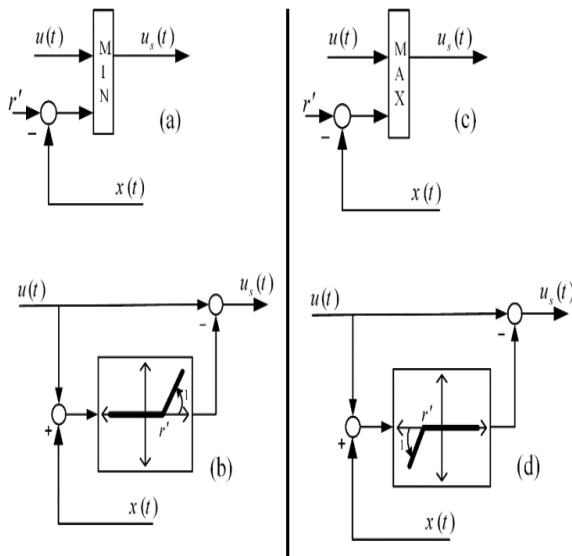
<sup>۱</sup> Dead Zone

<sup>۲</sup> Override Logic

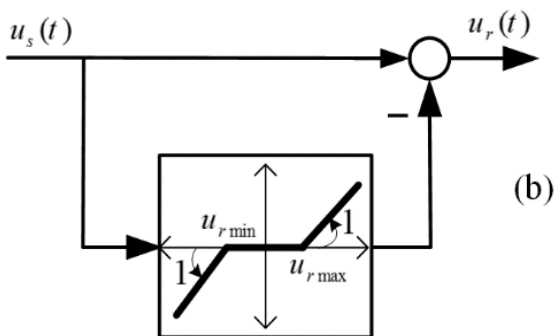
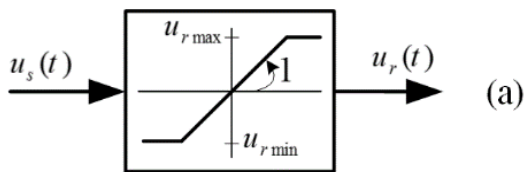
(۱۰)، دینامیک بین  $t_i$  و  $z_i$  تعیین می‌شود. بر این اساس، سیستم کنترل شکل (۸) به فرم جدید شکل ۹ تبدیل می‌شود که ماتریس دینامیکی  $H(s)$  عبارت است از:

$$H(s) = \begin{bmatrix} G'_2 K_2 - G'_1 K_1 & \dots & G'_3 K_2 - G'_1 K_1 \\ G'_3 K_3 + 1 & G'_3 K_3 - G'_1 K_1 & \dots & G'_3 K_3 - G'_1 K_1 \\ G'_4 K_4 + 1 & G'_4 K_4 + 1 & G'_4 K_4 - G'_1 K_1 & \dots & G'_4 K_4 - G'_1 K_1 \\ G'_5 K_5 + 1 & G'_5 K_5 + 1 & G'_5 K_5 + 1 & G'_5 K_5 - G'_1 K_1 & G'_5 K_5 - G'_1 K_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -G'_1 K_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$G'_1 K_1 + 1$



شکل (۶). (a) انتخاب‌گر Min، معادل انتخاب‌گر Min (b)، انتخاب‌گر Max (c)، معادل انتخاب‌گر Max (d)



شکل (۷). بلوک اشباع (a) و معادل آن (b)

بنابراین با استفاده از خاصیت انتخاب‌گر Max که  $\max(a, b) = -\min(-a, -b)$  داریم:

$$u_r = \min\{\max(u_{r \min}, u_s), u_{r \max}\} \quad (8)$$

$$= \min\{u_s + \max(u_{r \min} - u_s, 0), u_{r \max}\}$$

$$= \min\{u_s - \min(u_s - u_{r \min}, 0), u_{r \max}\}$$

$$= u_s + \min\{-\min(u_s - u_{r \min}, 0), u_{r \max} - u_s\}$$

اکنون با استفاده از ویژگی عملگر Min که  $\min(a, b) = -\max(-a, -b)$  به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$u_r = u_s - \max\{\min(u_s - u_{r \min}, 0), u_s - u_{r \max}\} \quad (9)$$

که برابر خروجی معادل اشباع (شکل ۷-ب) است.

بر این اساس، همان‌طور که در شکل ۸ نشان داده شده است، نمای جدیدی از ساختار کنترل Min-Max به دست آمده است. به منظور استفاده از راهکارهای مسئله لور دینامیک بین خروجی‌های  $t_i$  و ورودی‌های  $z_i$  مربوط به توابع استاتیکی تعیین می‌شود [۲۶]. از این رو، با استفاده از شکل ۸، داریم:

$$\begin{cases} z_1 = -y_1 K_1 + y_2 K_2 \\ z_2 = -y_1 K_1 + y_3 K_3 - t_1 \\ z_3 = -y_1 K_1 + y_4 K_4 - t_1 - t_2 \\ z_4 = -y_1 K_1 + y_5 K_5 - t_1 - t_2 - t_3 \\ z_5 = -y_1 K_1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 \end{cases} \quad (10)$$

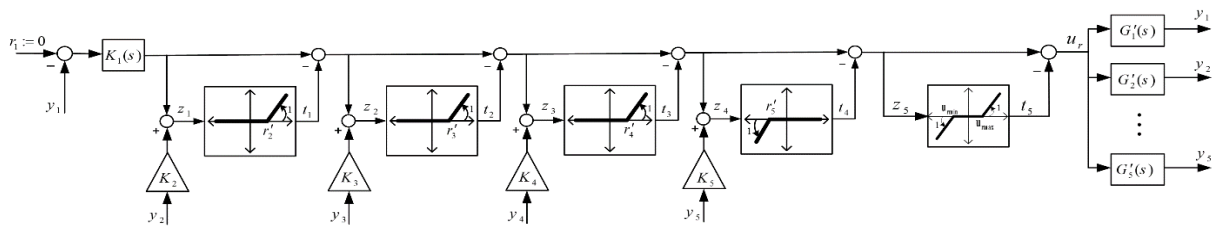
تابع تبدیل سیستم ارتباط بین خروجی‌های  $y_i$  و  $u_r$  را نشان می‌دهد:

$$y_i = G'_i(s) u_r, \quad \text{for } i=1,2,\dots,5 \quad (11)$$

نرخ ورودی کنترلی نیز با استفاده از شکل ۸ به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$u_r = -y_1 K_1 - t_1 - t_2 \dots - t_5 \quad (12)$$

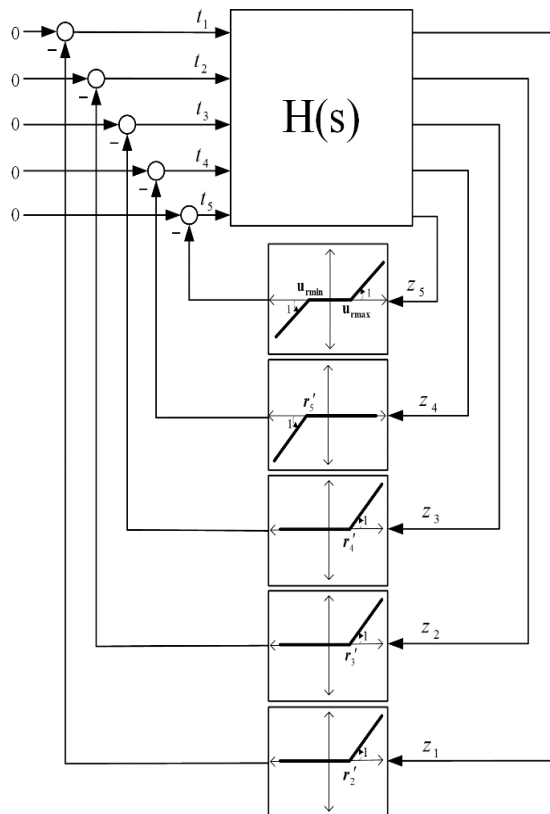
با استفاده از معادلات (۱۱) و (۱۲)،  $y_i$  ها بر اساس متغیرهای  $t_i$  تعیین می‌شوند، با جایگذاری  $y_i$  در معادلات



شکل (۸). نمای جدید از سیستم کنترلی Min-Max

بسته در پیکربندی سیستم لور (مطابق شکل ۹) پایدار مطلق<sup>۳</sup> یا پایدار مجانبی کلی<sup>۴</sup> است اگر  $[I + \Gamma_2 H][I + \Gamma_1 H]^{-1}$  اکیداً مثبت حقیقی<sup>۵</sup> باشد.

اگر شرط قطاع (۱۵) برای همه  $Z \in R^p$  برآورده نشود، پایداری مجانبی برای یک زیرمجموعه محدب  $Z \in \Pi \subset R^p$  که شامل مبدأ است تضمین می‌شود. برای ارضای شرط اکیداً مثبت حقیقی، لم زیر در نظر گرفته شده است:



شکل (۹). سیستم حلقه بسته در یک فرم متعارف جهت تحلیل پایداری

پیکربندی جدید که به‌عنوان سیستم لور شناخته می‌شود شامل یک بلوک چند متغیره دینامیکی و بلوک‌های غیرخطی استاتیکی در فیدبک [۲۶] است و تجزیه و تحلیل پایداری آن راحت‌تر است. معیار دایره چند متغیره برای تجزیه و تحلیل پایداری پیکربندی جدید اعمال می‌شود.

قضیه [۲۶]: معیار دایره چند متغیره

فرض کنید که:

•  $H(s)$  یک ماتریس مربعی با عناصر تابع تبدیل سره

است که تحقق کمینه زیر را دارد:

$$\begin{cases} \dot{X} = A'X + B'T \\ Z = C'X + D'T \end{cases} \quad (۱۴)$$

که  $(A', B', C', D')$  ماتریس‌های تحقق،  $X \in \mathbb{R}^q$  بردار حالت است و  $T, Z \in \mathbb{R}^p$  به ترتیب بردار ورودی و خروجی هستند.

•  $T = -\Phi(Z)$  که برداری شامل غیرخطی‌های استاتیکی است که به صورت محلی در  $Z$  لیبشیتز<sup>۱</sup> هستند. همچنین این بردار شرط قطاع<sup>۲</sup> را به شرح زیر برآورده می‌کند:

$$[\Phi(Z) - \Gamma_1 Z]^T [\Phi(Z) - \Gamma_2 Z] \leq 0 \quad \text{for } \forall Z \in R^p \quad (۱۵)$$

که  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  ماتریس‌های قطری حقیقی هستند که قطاع‌های احاطه‌کننده غیرخطی‌های استاتیکی را تعریف می‌کنند و  $(\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1 = \Gamma^T > 0)$ . مبدأ  $X = 0$  یک نقطه تعادل سیستم (۱۴) برای تمام غیرخطی‌هایی است که شرط قطاع (۱۵) را برآورده می‌کنند. آنگاه سیستم حلقه

<sup>3</sup> Absolute Stable

<sup>4</sup> Globally Asymptotically Stable

<sup>5</sup> Strictly Positive Real

<sup>1</sup> Lipschitz

<sup>2</sup> Sector



$\Phi(\cdot)$  به دست می‌آید. با استفاده از لم مکمل شور<sup>۳</sup> [۲۸] معادله ریکاتی (۱۶) را می‌توان به‌عنوان یک مسئله امکان‌سنجی LMI فرموله کرد، بنابراین ماتریس  $P > 0$  باید نامساوی زیر را برآورده کند:

$$\begin{bmatrix} A'^T P + P A' & P B' - C'^T \Gamma_2 \\ B'^T P - \Gamma_2 C' & -2I - \Gamma_2 D' - D'^T \Gamma_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

در بخش بعدی، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته با کنترلر Min-Max طراحی شده بررسی می‌شود.

### ۵- شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

رگولاتورهای Min-Max به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که هر حلقه کنترلی پایدار باشد. همچنین سیستم چند رگولاتوری باید عملکرد رضایت بخشی در تعقیب دستور تراست و حفظ قیود داشته باشد؛ بنابراین، رگولاتورها به‌صورت زیر مدنظر قرار می‌گیرند:

$$K_1(s) = \frac{0.0009(0.5s+1)}{0.02s+1}, \quad K_2 = 0.0006, \quad (18)$$

$$K_3 = 0.1, \quad K_4 = 0.005, \quad K_5 = 0.1$$

فرض بر این است که نرخ جریان سوخت بین  $-0.5 \text{ kg/s}^2$  و  $0.5 \text{ kg/s}^2$  است و حدود مربوط به خروجی‌های مقید به‌صورت زیر هستند:

$$r_2 = 563 \text{ rpm}, \quad r_3 = 3.95 \text{ bar}, \quad (19)$$

$$r_4 = 70 \text{ K}, \quad r_5 = -4.3 \text{ bar}$$

برای تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته، سیستم خطی معادل  $H(s)$  بر اساس رابطه (۱۳) به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$H(s) = \frac{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{15} \\ h_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ h_{51} & \cdots & & h_{55} \end{bmatrix}}{s^4 + 53.35s^3 + 224.1s^2 + 349.4s + 204.1} \quad (20)$$

لم [۲۷]:

فرض کنید  $F(s)$  یک ماتریس تابع تبدیل با تحقق کمینه<sup>۱</sup> زیر باشد:

$$F(s) \sim \begin{bmatrix} M & N \\ Q & W \end{bmatrix}$$

آنگاه عبارات زیر معادل هستند:

(۱)  $M$  یک ماتریس هورویتز<sup>۲</sup> است و  $F(s)$  اکیداً مثبت حقیقی است.

(۲)  $W + W^T > 0$  و ماتریس‌های معین مثبت  $P$  و  $R$  وجود دارند به‌طوری‌که  $M^T P + P M + (Q - N^T P)^T (W + W^T)^{-1} (Q - N^T P) + R = 0$  بر اساس فرم توابع استاتیکی در شکل ۹، ماتریس  $\Gamma_1$  به‌صورت ماتریس صفر تعریف می‌شود؛ بنابراین، برای تضمین پایداری مجانبی، کافی است که  $[I + \Gamma_2 H]$  اکیداً مثبت حقیقی باشد. با استفاده از تحقق کمینه  $H(s)$ ، یعنی رابطه (۱۴)، تحقق کمینه برای  $[I + \Gamma_2 H]$  به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$[I + \Gamma_2 H] \sim \begin{bmatrix} A' & B' \\ \Gamma_2 C' & I + \Gamma_2 D' \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از عبارات لم، اگر شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه  $[I + \Gamma_2 H]$  اکیداً مثبت حقیقی بوده و شرط دایره چند متغیره برآورده می‌شود:

(۱) ماتریس  $A'$  هورویتز باشد

(۲)  $2I + \Gamma_2 D' + D'^T \Gamma_2$  مثبت معین باشد

(۳) ماتریس‌های متقارن مثبت معین  $P$  و  $R$  وجود داشته باشند که معادله ریکاتی زیر را برآورده کنند:

$$A'^T P + P A' + [\Gamma_2 C' - B'^T P]^T [2I + \Gamma_2 D' + D'^T \Gamma_2]^{-1} [\Gamma_2 C' - B'^T P] + R = 0 \quad (16)$$

بنابراین، پایداری مجانبی سیستم کنترل حول مبدأ  $X = 0$  تضمین می‌شود. علاوه بر این، تابع لیاپانوف  $V = X^T P X$  برای ارتباط متقابل فیدبک منفی  $H(s)$

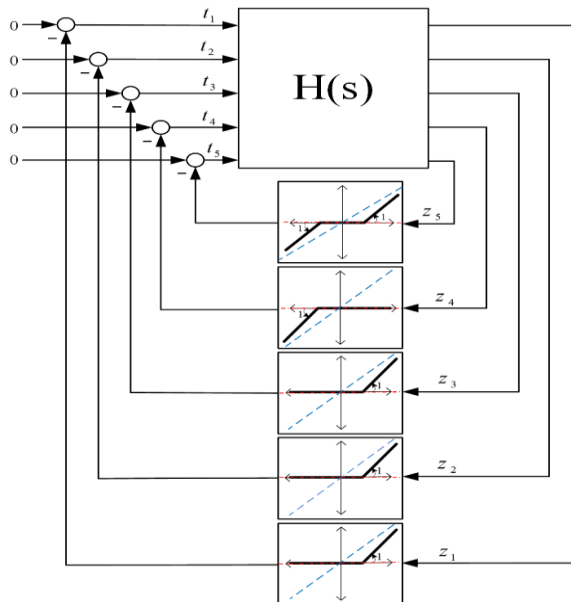
<sup>3</sup> Schur Complement Lemma

<sup>1</sup> Minimal Realization

<sup>2</sup> Hurwitz Matrix

توابع استاتیکی داریم  $t_i = 0$ , for  $i=1,2,\dots,5$ . حال با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲)، یعنی  $y_1 = G'_1(s) u_r$  و  $u_r = -y_1 K_1(s) - t_1 - t_2 \dots - t_5$  در طول رژیم حالت پایا ( $t \rightarrow \infty$ )، خروجی اصلی به صفر میل می کند ( $y_1 \rightarrow 0$ ). این نشان دهنده پایداری مجانبی سیستم کنترل Min-Max اصلی در حول نقطه تعادل آن است.

شکل ۱۰ وضعیت قطاع‌های انتخاب شده را نشان می دهد. طبق تعریف قطاع‌ها (۲۲)، مرزهای قطاع‌ها توابع غیرخطی استاتیکی را بسیار دور از مبدأ قطع می کنند، بنابراین سیستم حلقه بسته پایدار مطلق با یک ناحیه جذب بزرگ است.



شکل (۱۰). تعریف سکتورها برای تحلیل پایداری

یک مطالعه شبیه سازی برای ارزیابی عملکرد کنترلر Min-Max طراحی شده با رگولاتورهای فیدبک خروجی در نظر گرفته شده است. عملکرد کنترلر با روش شناخته شده Min-Max/SMC مقایسه شده است. در روش Min-Max/SMC، طبق مدل خطی (۱) و متغیر لغزشی ( $s_i = y_i - r_i$ )، قانون کنترل برای هر رگولاتور به صورت زیر مشخص می شود [۱۳]:

$$u_{ri} = -\frac{1}{D_i} (C_i(Ax + Bu) + \eta_i \text{sign}(s_i)) \quad (24)$$

ماتریس‌های فضای حالت یک تحقق کمینه  $H(s)$

به صورت زیر مشخص می شوند:

$$A' = \begin{bmatrix} -38.0726 & -22.0405 & 10.6299 & 8.9811 \\ -8.3239 & -7.3693 & 5.1672 & -1.8711 \\ 6.0886 & 1.4671 & -2.6504 & -1.6585 \\ 20.4495 & 10.9436 & -6.4760 & -5.2557 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 2.3122 & 2.3122 & 2.3122 & 2.3122 & 2.3122 \\ 1.5373 & 1.5373 & 1.5373 & 1.5373 & 1.5373 \\ -0.6814 & -0.6814 & -0.6814 & -0.6814 & -0.6814 \\ -0.6907 & -0.6907 & -0.6907 & -0.6907 & -0.6907 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 0.2924 & -0.5149 & 0.3032 & -0.4665 \\ 0.3951 & -0.2090 & 0.0346 & -0.0781 \\ 0.4091 & 0.7699 & -0.7407 & 0.5526 \\ 0.3951 & -0.2090 & 0.0346 & -0.0781 \\ -0.1209 & -0.0005 & 0.7898 & -1.1851 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  جهت تعریف قطاع‌ها عبارت‌اند

از:

$$\Gamma_1 = 0 \times I_5, \quad \Gamma_2 = 0.91 \times I_5 \quad (22)$$

که  $I_5$  ماتریس یک  $5 \times 5$  است. بر اساس شرایط استخراج شده برای تحلیل پایداری،  $A'$  هورویتز و  $2I + \Gamma_2 D' + D'^T \Gamma_2$  مثبت معین است. همچنین یک ماتریس مثبت معین  $P$  از حل مسئله امکان سنجی (۱۷) به صورت زیر تعیین می شود:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1999 & 0.1488 & -0.4016 & 0.4941 \\ 0.1488 & 0.7860 & -0.6208 & 0.7449 \\ -0.4016 & -0.6208 & 1.1307 & -1.3091 \\ 0.4941 & 0.7449 & -1.3091 & 1.6186 \end{bmatrix} \quad (23)$$

بنابراین، سیستم کنترل به طور مجانبی در اطراف  $X = 0$  پایدار است و تابع لیاپانوف  $V = X^T P X$  برای سیستم حلقه بسته به دست می آید. بر اساس رابطه سیستم (۱۴) و ماتریس‌های تحقق (۲۱)، در نقطه تعادل  $X = 0$  داریم  $Z = 0$ . از این رو، در این شرایط، با در نظر گرفتن

تعریف این متغیر ساختگی در جدول ۱ ارائه شده است؛ بنابراین، هیچ تضمینی برای متغیر سرعت فن وجود ندارد که بیش از حد مجاز نباشد. شکل ۱۲ پاسخ سرعت هسته را نشان می‌دهد. مقداری گذر از قید در خروجی روش Min-Max/SMC در زمان ۱۰ ثانیه وجود دارد. این امر به دلیل عدم وجود حلقه کنترل برای Nc در این روش است. پاسخ خروجی‌های محدود Ps3 و T-48 به ترتیب در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. دو کنترل‌کننده محدودیت-ها را به‌طور مؤثر برآورده می‌کنند. جریان سوخت به‌عنوان ورودی کنترلی نیز در شکل ۱۵ نشان داده شده است. شکل ۱۶ نرخ ورودی‌های کنترلی را برای حلقه‌های کنترل Min-Max در طول تعقیب سناریوی مطلوب نشان می‌دهد که روند سوئیچینگ و فیدبک فعال را در هر مرحله زمانی مشخص می‌کند. مسیر پاسخ موتور در بازه زمانی (۵-۱۶ s) در نقشه‌های LPC و HPC به ترتیب در شکل‌های ۱۷ و ۱۸ نشان داده شده است. مسیر پاسخ موتور شامل یک فرآیند شتاب‌گیری مثبت و رسیدن به یک نقطه کاری و سپس یک فرآیند شتاب‌گیری منفی و رسیدن به نقطه کاری اولیه است. در طی حرکت گذرا مسیر پاسخ موتور از خطوط کاری حالت پایا فاصله می‌گیرد و هرچه قدر شتاب موتور بیشتر باشد این فاصله‌گیری بیشتر است. با توجه به شکل ۱۷، کمپرسور LPC با شتاب‌گیری مثبت از خط سرج دور می‌شود و با شتاب‌گیری منفی به این خط نزدیک می‌شود. این امر برای کمپرسور HPC برعکس است و کمپرسور HPC با شتاب‌گیری مثبت به خط سرج نزدیک می‌شود (شکل ۱۸). با توجه به مسیر پاسخ موتور در این دو شکل، کمپرسور HPC بیش از LPC در معرض وقوع پدیده سرج قرار دارد، اما کنترلرها از حدود مربوط به حاشیه سرج LPC و HPC محافظت می‌کنند.

که  $\eta_i$  یک ثابت مثبت است. قانون ورودی کنترل (۲۴) نشان می‌دهد که خروجی‌های دارای  $D=0$  در تعریف  $y = Cx + Du$  نمی‌توانند مستقیماً در ساختار Min-Max/SMC در نظر گرفته شوند؛ بنابراین، سرعت هسته Nc که یک متغیر محدود برای جلوگیری از خرابی مکانیکی بخش‌های دوار است، در این ساختار رگولاتور ندارد. پارامترهای روش Min-Max/SMC در جدول ۱ آورده شده است. تمام مفروضات این روش برقرار هستند، به‌عنوان مثال، ماتریس A غیرتکین است، همه خروجی‌ها حداقل فاز هستند و ماتریس‌های  $(A_{eq,i} = A - \frac{BC_i}{D_i})$  دارای مقادیر ویژه با قسمت‌های حقیقی منفی هستند.

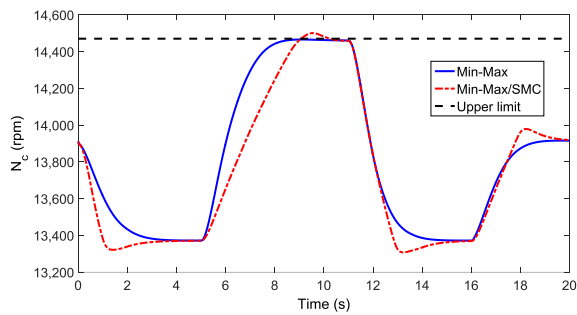
جدول (۱). پارامترهای روش Min-Max/SMC

$C_1$	$D_1$	$\eta_1$	$\eta_3$	$\eta_4$	$\eta_5$
[۰/۰۰۳۹ -۰/۰۰۱]	۱	۲	۲	۱۲۰	۵

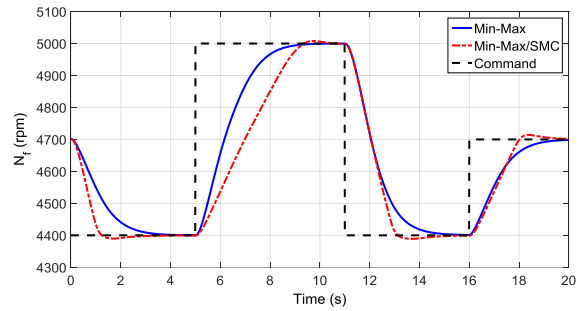
یک سناریوی کلی برای ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده Min-Max طراحی شده در تعقیب نماینده تراست و مدیریت قیود تعریف شده است. شبیه‌سازی با مدل سطح جزء غیرخطی انجام شده و از یک نقطه کاری شروع می‌شود. پاسخ سیستم در تعقیب سرعت فن مطلوب در شکل ۱۱ نشان داده شده است. پاسخ Min-Max/SMC دارای مقداری فرارجهش<sup>۱</sup> و فروجهش<sup>۲</sup> است. این اشکال به دلیل استفاده از یک متغیر ساختگی در این روش برای کنترل سرعت فن است. برای خروجی اصلی  $\Delta N_f$  به‌عنوان متغیر حالت اول،  $D=0$  بنابراین قانون کنترل (۲۴) را نمی‌توان مستقیماً اعمال کرد. از این رو، یک خروجی محدود ساختگی برای کنترل غیرمستقیم سرعت فن در نظر گرفته شده است [۱۳]. ضرایب  $C_1, D_1$  برای

<sup>۱</sup> Overshoot

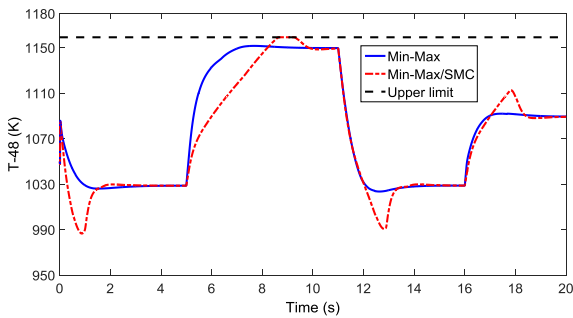
<sup>۲</sup> Undershoot



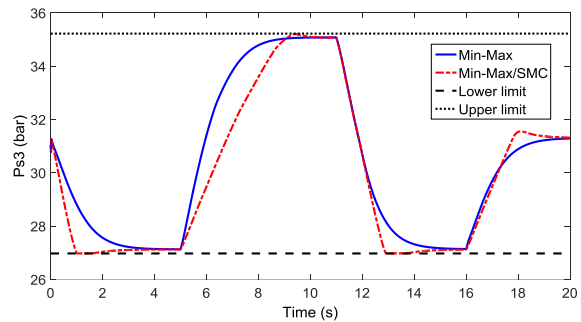
شکل (۱۲). پاسخ خروجی مقید  $N_c$



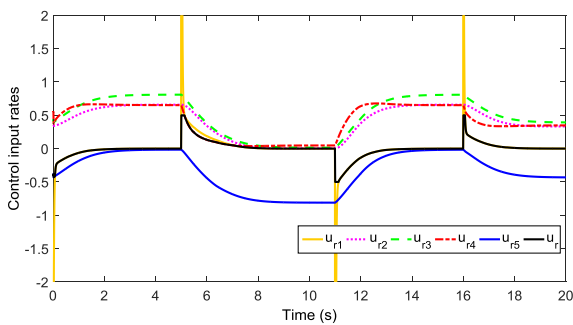
شکل (۱۱). پاسخ سرعت فن به عنوان نماینده تراست



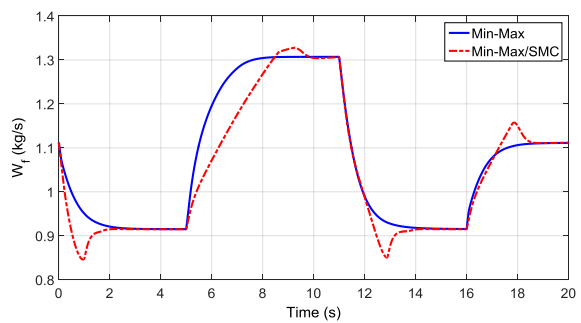
شکل (۱۴). پاسخ خروجی مقید T-48



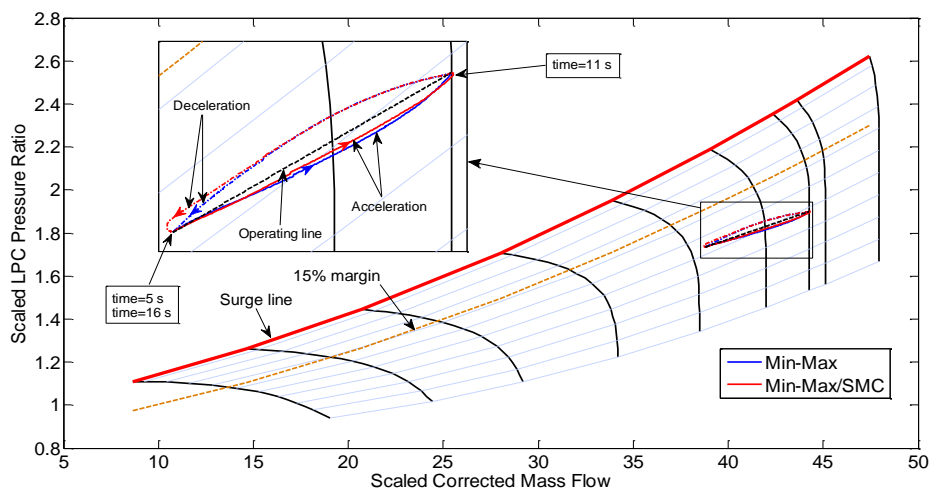
شکل (۱۳). پاسخ خروجی مقید Ps3



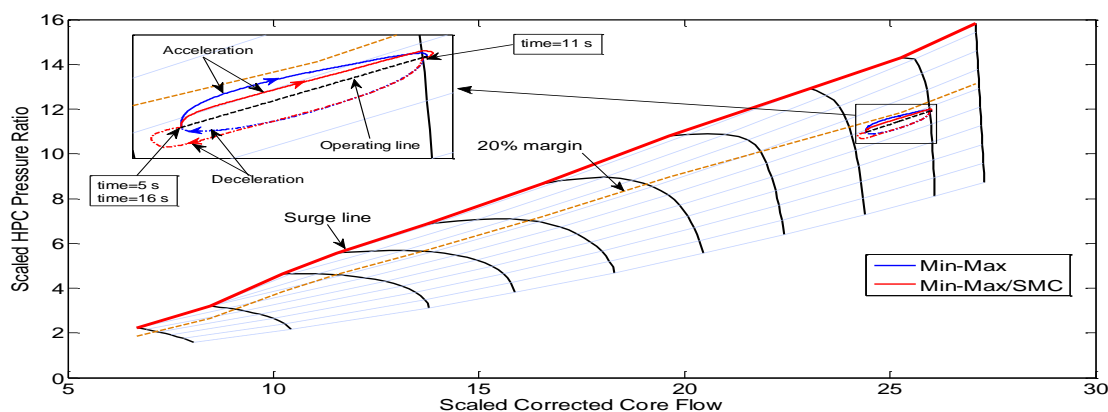
شکل (۱۶). نرخ ورودی کنترلی کنترلر Min-Max



شکل (۱۵). مقایسه ورودی‌های کنترلی



شکل (۱۷). نمایش شتاب‌گیری موتور روی نقشه LPC



شکل (۱۸). نمایش شتاب‌گیری موتور روی نقشه HPC

Commercial Aircraft Engine”, NASA/TM—2012-217261, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2012.

2. May, R.D., and Garg, S. “Reducing Conservatism in Aircraft Engine Response Using Conditionally Active Min-Max Limit

Regulators”, NASA/TM—2012-217814, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2012.

3. Garg, S. “Aircraft Turbine Engine Control Research at NASA Glenn Research Center”, NASA/TM-2013-217821, Glenn

Research Center, Cleveland, Ohio, 2013.

4. Imani, A., and Montazeri-Gh, M. “Improvement of Min-Max Limit Protection in Aircraft Engine Control: An LMI

Approach”, J. Aerosp. Sci. Technol. Vol. 68, pp. 214-222, 2017.

5. Neto, A. H., and Yoneyama, T. “A Novel Approach for Stall Prevention and Rotation Speed Limiting in a Min-Max

Controller Structure”, J. Control, Automat. Electr. Syst. Vol. 30, pp. 27-40, 2019.

6. Liu, X., Luo, C., and Xiong, L. “Compensators Design for Bumpless Switching in Aero-Engine Multi-Loop Control

System”, Asian J. Control, Published Online, 2021.

7. Mohammadi, S.J., Miran-F, S.A., Jafari, S., and Nikolaidis, T. “A Scientometric Analysis and Critical Review of Gas

Turbine Aero-Engines Control: from Whittle Engine to More-Electric Propulsion”, J. Meas. Control, Vol. 54, No. 5, pp.

935-966, 2021.

با توجه به نتایج، کنترلر Min-Max با رگولاتورهای فیدبک خروجی، تعقیب سرعت فن را به نحو مطلوبی انجام داده و از خروجی‌های مقید محافظت می‌کند؛ بنابراین، علاوه بر تضمین پایداری مجانبی سیستم کنترل، عملکرد کنترلر Min-Max حاوی رگولاتورهای فیدبک خروجی رضایت‌بخش است و از طرفی پیچیدگی‌ها و محدودیت‌های رویکرد Min-Max/SMC را ندارد.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک کنترل‌کننده Min-Max با رگولاتورهای خروجی و اشباع نرخ جریان سوخت برای یک موتور توربوفن با نسبت کنارگذر بالا طراحی شد. در این راستا، یک مدل خطی از یک مدل سطح جزء غیرخطی تعیین شده و رگولاتورهای ساختار Min-Max به‌گونه‌ای طراحی شدند که حلقه‌های کنترلی به‌صورت جداگانه پایدار بوده و عملکرد رضایت‌بخشی داشته باشند. طرح Min-Max دارای ساختار سوئیچینگ است و پایداری تک‌تک حلقه‌ها لزوماً پایداری کل سیستم را تضمین نمی‌کند. به‌منظور بررسی پایداری کل سیستم، فرم سیستم کنترلی به پیکربندی متعارف سیستم لور تبدیل شد و شرایط پایداری مجانبی تعیین گردید. سپس پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته تضمین شده و پاسخ سیستم در تعقیب تراست و مدیریت قیود مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج شبیه‌سازی با مدل ترمودینامیکی غیرخطی، عملکرد مطلوب کنترلر Min-Max را در مقایسه با روش Min-Max/SMC نشان می‌دهد.

#### ۷- مراجع

1. Csang, J.T., May, R.D., Guo, T.H., and Litt, J. “The Effect of Modified Control Limits on the Performance of a Generic

- NASA/TM—2009-215668, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2009.
19. Imani, A., and Montazeri-Gh, M. "A Min-Max Selector Controller for Turbofan Engines with Improvement of Limit Management and Low Computational Burden", *T. I. Meas. Control*, Vol. 41, No. 1, pp. 36-44, 2018.
20. Montazeri-Gh, M., Hosseini, S.M., and Imani, A. "Min-Max Controller Design for Double Shaft Unmixed Turbofan Engine's Thermodynamic Model", *Aerosp. Mech. J.*, Vol. 15, No. 2, pp. 17-32, 2019. (In Persian)
21. Walsh, P.P., and Fletcher, P. "Gas Turbine Performance", 2nd ed., Blackwell Science, UK, 2004.
22. Montazeri-Gh, M., Ehteshami, M., and Imani, A. "Multivariable Model Predictive Control Design for a Turbofan Engine and Performance Comparison with a Min-Max Controller", *J. Fluid Mech. and AeroDyn.*, Vol. 8, No. 1, pp. 161-176, 2019. (In Persian)
23. Zinnecker, A.M., Chapman, J.W., Lavelle, T.M., and Litt, J. S. "Development of a Twin-Spool Turbofan Engine Simulation Using the Toolbox for Modeling and Analysis of Thermodynamic Systems (T-MATS)", NASA/TM—2014-218402, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2014.
24. Chapman, J.W., and Litt, J.S. "Control Design for an Advanced Geared Turbofan Engine", NASA/TM—2017-219569, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2017.
25. Richter, H. "Advanced Control of Turbofan Engines", Springer, New York, US, 2012.
26. Khalil, H.K. "Nonlinear Control", Pearson Education, London, UK, 2015.
27. Haddad, W.M., and Bernstien, D.S. "Explicit Construction of Quadratic Lyapunov Functions for the Small Gain, Positivity, Circle, and Popov Theorems and Their Application to Robust Stability. Part I: Continuous-Time Theory", *Int. J. Robust Nonlin.* Vol. 3, No. 4, pp. 313-339, 1993.
28. Scherer, C.W., and Weiland, S. "Linear Matrix Inequalities in Control", Delft University of Technology, Netherlands, 2004.
8. Mohammadi, E., and Montazeri-Gh, M. "Active Fault Tolerant Control with Self-Enrichment Capability for Gas Turbine Engines", *J. Aerosp. Sci. Technol.* Vol. 56, pp. 70-89, 2016.
9. Seborg, D.S., Edgar, T.F., Mellichamp, D.A., and Edgar, T.F. "Process Dynamics and Control", 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc, New Jersey, US, 2011.
10. Lopez, A.A., and Martin, J.A. "Using Multivariable Nonlinear Stability Theory for Override Control Systems"; In: *Eur. Control Conf.*, Karlsruhe, Germany, 31 August–3 September 1999.
11. Glattfelder, A.H., and Schaufelberger, W. "Control Systems with Input and Output Constraints", Springer, London, UK, 2003.
12. Johansson, M. "Piecewise Linear Control Systems. In *Lecture Notes in Control and Information Sciences*", Vol. 284., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 2003.
13. Richter, H. "A Multi-Regulator Sliding Mode Control Strategy for Output-Constrained Systems", *Automatica*, Vol. 47, No. 10, pp. 2251-2259, 2011.
14. Richter, H. "Multiple Sliding Modes with Override Logic: Limit Management in Aircraft Engine Controls", *AIAA J. Guid. Control Dyn.* Vol. 35, No. 4, pp. 1132-1142, 2012.
15. Imani, A., and Montazer-Gh, M. "Stability Analysis of Override Logic System Containing State Feedback Regulators and its Application to Gas Turbine Engines", *Eur. J. Control*, Vol. 52, pp. 97-107, 2020.
16. Imani, A., and Montazer-Gh, M. "A Multi-loop Switching Controller for Aircraft Gas Turbine Engine with Stability Proof", *Int. J. Control Autom. Syst.*, Vol. 17, No. 6, pp. 1359-1368, 2019.
17. DeCastro, J.A., Litt, J.S., and Frederick, D.K. "A Modular Aero-Propulsion System Simulation of a Large Commercial Aircraft Engine", NASA/TM—2008-215303, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2008.
18. Litt, J., Frederick, D., and Guo, T.H. "The Case for Intelligent Propulsion Control for Fast Engine Response",