

---

**Analysis and Simulation of the Diffraction from Metamaterial Structures Using Surface Integral Equations and the Multi-Level Fast Multipole Method (MLFMM) and Comparison with the Moment Method**

**F. Mohajeri\*, M. E. Shariat**

\* Associate Professor, Department of Telecommunications and Electronics, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

(Received: 11/07/2020; Accepted: 22/09/2020)

**Abstract**

*The metamaterial is defined as an artificial, macroscopic, and effectively homogeneous structure (with an average unit cell size much smaller than the guide wavelength). In the electromagnetic literature, the response of a system to an electric or magnetic field is largely determined by the characteristics of the materials in question. Two examples of these microscopic properties are the electric permittivity and magnetic permeability coefficients, both of which are positive in ordinary materials. By arranging an array of metal wires, a negative electric permittivity can be obtained, and by arranging an array of periodic split ring resonator structures, a negative magnetic permeability coefficient can be obtained. To model metamaterial structures, integral equations of the electric field or magnetic field are used, which can be studied based on the numerical method of moment. One of the advantages of this method is that it only segregates the source, although the required memory increases in proportion to the size of the structure geometry. To solve this problem, today, alternative methods such as the fast multipole method (single level and multi-level) are used, which in addition to the source, the basic functions and observation points are also segmented. In this paper, using surface integral equations and the multi-level fast multipole method, the diffraction and calculation of scattering fields of some metamaterial surfaces are investigated. The results demonstrate an approximately 75% reduction in the computation time which is significant compared to the direct moment method.*

**Keywords:** Metamaterial, Moment Method, Surface Integral Equations, Multi-Level Fast Multipole Method.

---

\* Corresponding author E-mail: Mohajeri@shirazu.ac.ir

## تحلیل و شبیه‌سازی تفرق از ساختارهای فرامواد با استفاده از معادلات انتگرالی سطحی و الگوریتم چند قطبی سریع چند سطحی (MLFMM) و مقایسه با روش ممان

فرزاد مهاجری<sup>۱\*</sup>، محمد ابراهیم شریعت<sup>۲</sup>

۱- دانشیار، ۲- کارشناسی ارشد، گروه مخابرات و الکترونیک، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر،

دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

(دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۸)

### چکیده

فراماده به‌عنوان ساختاری مصنوعی، ماکروسکوپی و به‌طور مؤثر همگن (با میانگین اندازه سلول بسیار کوچک‌تر از طول موج هدایت) تعریف می‌شود. در ادبیات الکترومغناطیس، پاسخ یک سامانه به یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی تا حد زیادی توسط مشخصات مواد مورد بحث تعیین می‌شود. دو نمونه از این مشخصات ماکروسکوپی، ضرایب نفوذپذیری الکتریکی و مغناطیسی هستند که هر دو در مواد معمولی مثبتند. با چینش آرایه‌ای از سیم‌های فلزی، می‌توان ضریب گذردهی الکتریکی منفی و با چینش آرایه‌ای از ساختارهای متناوب تشدید کننده حلقه‌های شکافته می‌توان ضریب نفوذپذیری مغناطیسی منفی به‌دست آورد. برای مدل‌سازی ساختارهای فرامواد از معادلات انتگرالی میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی استفاده می‌شود که بر پایه روش عددی ممان قابل بررسی هستند. یکی از مزایای این روش این است که تنها به قطعه‌بندی منبع می‌پردازد، البته حافظه مورد نیاز متناسب با اندازه هندسه ساختار افزایش می‌یابد. برای رفع این ایراد امروزه از روش‌های جایگزینی مانند روش چند قطبی سریع (یک سطحی و چند سطحی) استفاده می‌شود که در این روش‌ها علاوه بر منبع، توابع پایه و نقاط مشاهده نیز قطعه‌بندی می‌گردند. در این مقاله با استفاده از معادلات انتگرالی سطحی و اعمال روش چند قطبی سریع چند سطحی به روش ممان، بررسی تفرق و محاسبه میدان‌های پراکندگی از برخی سطوح فرامواد انجام و نشان داده می‌شود که زمان محاسبات نسبت به روش ممان مستقیم، حدود ۷۵ درصد کاهش می‌یابد.

**کلیدواژه‌ها:** فراماده، روش ممان، معادلات انتگرالی سطحی، روش چند قطبی سریع چند لایه

بایاس مناسب و در حوالی فرکانس تشدید) منفی باشد. امروزه با چینش آرایه‌ای از سیم‌های فلزی، می‌توان ضریب گذردهی الکتریکی منفی به‌دست آورد [۳]، همچنین با چینش آرایه‌ای از ساختارهای متناوب تشدید کننده حلقه‌های شکافته (SRR) می‌توان به ضریب نفوذپذیری مغناطیسی منفی دست یافت [۴]. SRRها شامل حلقه‌های فلزی با فاصله هوایی هستند که در برابر میدان‌های مغناطیسی پاسخ بسیار قوی ایجاد می‌کنند. با تنظیم هندسه آن‌ها می‌توان ضریب نفوذپذیری مغناطیسی منفی مورد نظر را در بازه فرکانسی دلخواهی به‌دست آورد. ضمناً می‌توان با تشکیل آرایه‌ای از ترکیب SRR و سیم‌های باریک به تولید هم‌زمان ضریب گذردهی الکتریکی منفی و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی منفی در بازه فرکانسی مورد نظر رسید. برای مدل‌سازی و تحلیل دقیق ساختارهای فرامواد می‌توان از معادلات انتگرالی میدان الکتریکی (EFIE) یا معادلات انتگرالی میدان

### ۱- مقدمه

فراماده<sup>۱</sup> به‌عنوان ساختاری مصنوعی و به‌طور مؤثر همگن (با میانگین اندازه سلول بسیار کوچک‌تر از طول موج هدایت) تعریف می‌شود [۱]. در واقع فراماده یک ترکیب ماکروسکوپی با ساختار متناوب یا نامتناوب بوده که تابعی از ساختار و اجزای تشکیل دهنده‌اش است [۲]. در تئوری الکترومغناطیس، پاسخ یک سامانه به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تا حد زیادی توسط مشخصات مواد مورد بحث مشخص می‌شود. مهم‌ترین این مشخصات ماکروسکوپی، ضریب نفوذپذیری الکتریکی و مغناطیسی آن‌ها است که در مواد معمولی مثبت هستند. ضریب نفوذپذیری الکتریکی می‌تواند در برخی از مواد (مثلاً در فلزات در فرکانس پایین‌تر از فرکانس پلاسما) منفی و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نیز می‌تواند در برخی از مواد (مثلاً فریت‌ها تحت

<sup>۲</sup> Split Rings Resonator

<sup>۳</sup> Electric Field Integral Equations

\* نویسنده پاسخگو: Mohajeri@shirazu.ac.ir

<sup>۱</sup> Metamaterial

سرعت محاسبات، از روش‌هایی استفاده می‌شود که در آن‌ها علاوه بر منابع و توابع پایه، نقاط مشاهده نیز افزاینده می‌شوند. گاهی این افزاینده فضا فقط در یک مرحله انجام می‌شود که به آن روش چند قطبی سریع یک سطحی<sup>۴</sup> (SLFMM)، و زمانی در چند مرحله صورت می‌پذیرد که به آن روش چند قطبی سریع چند سطحی<sup>۵</sup> (MLFMM) می‌گویند، که این آخری از همه پیشرفته‌تر بوده و کمترین زمان محاسبات را داراست [۱۰].

در این مقاله و در بخش ۲ تئوری الگوریتم FMM مطرح و ترکیب آن با روش ممان شرح و لزوم استفاده از آن بیان می‌شود. در بخش ۳ تعمیم و اصلاح روش FMM و تبدیل آن به SLFMM و MLFMM انجام و ویژگی‌های آن‌ها با هم مقایسه و در بخش ۴ با روش MLFMM به بررسی تفرق و محاسبه میدان‌های پراکندگی یک ساختار فراماده متشکل از ۱۶ سلول SRR که به صورت چینش مربعی کنار هم قرار گرفته‌اند، پرداخته و نتایج با روش ممان مستقیم مقایسه می‌گردد. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که نتایج روش MLFMM به همان دقت روش ممان است با این تفاوت که بهبود قابل ملاحظه‌ای در زمان محاسبات حاصل شده است. در نهایت در بخش ۵ به نتیجه‌گیری مطالب بحث شده در مقاله پرداخته می‌شود.

## ۲- روش چند قطبی سریع و کاربرد آن در روش ممان

### ۲-۱- معادله انتگرالی میدان الکتریکی

روش ممان روشی است که برای حل معادلات انتگرالی سطحی یا حجمی در الکترومغناطیس و در حوزه فرکانس استفاده می‌شود. مسئله تابش الکترومغناطیسی شامل به دست آوردن میدان‌ها در همه فضا در اثر مجموعه‌ای از جریان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌باشد. مسائل پراکندگی می‌تواند به عنوان مسائل تابش که در آن جریان‌های محلی توسط جریان‌ها و میدان‌های اعمالی ایجاد شده‌اند، در نظر گرفته شود.

برای بررسی مسئله پراکندگی فرض بر آنست که میدان الکتریکی تابشی  $E^i(\mathbf{r})$  بر سطح هادی کامل الکتریکی  $S$  می‌تابد که این امر موجب القای جریان سطحی  $\mathbf{J}$  روی آن می‌گردد. چنانچه میدان پراکندگی حاصل از این جریان، با  $E^s(\mathbf{r})$  نشان داده شود، خواهد شد [۱۱ و ۱۲]:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] ds' \quad (2)$$

مغناطیسی<sup>۱</sup> (MFIE) استفاده کرد که هر دو بر پایه روش عددی ممان<sup>۲</sup> (MoM) قابل حل هستند [۵ و ۶]. یکی از مزایای روش ممان این است که تنها به قطعه‌بندی منبع می‌پردازد. شرایط مرزی توسط تابع گرین مسئله برآورده می‌شود و نیازی به اعمال جداگانه شرایط مرزی نیست. البته ایراد مهم این روش آن است که حافظه مورد نیاز، متناسب با اندازه هندسه مسئله افزایش می‌یابد. در روش ممان ساختار تفرق‌زا یا تشعشع‌کننده افزاینده شده و چگالی جریان الکتریکی و مغناطیسی بر روی کل ساختار بر حسب توابع پایه‌ای مشخصی بسط می‌یابد. در نهایت یک معادله ماتریسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{Za} = \mathbf{b} \quad (1)$$

که در آن،  $Z$  ماتریس امیدانس،  $a$  بردار مجهولات و  $b$  بردار معلومات (بردار تحریک) است. حافظه مورد نیاز ماتریس مربعی مرتبه  $N$  از مرتبه  $O(N^2)$  است. برای ذخیره هر عدد اعشاری به ۴ بایت حافظه احتیاج است و با توجه به اینکه برای نمایش هر عدد مختلط از دو عدد اعشاری استفاده می‌شود، در نتیجه ۸ بایت حافظه برای ذخیره یک عدد مختلط لازم است. با فرض آنکه تعداد مجهولات ۱۰۰۰ عدد باشد، برای ذخیره ماتریس امیدانس به ۸ مگا بایت و برای ۱۰۰۰۰۰ مجهول به ۸۰ گیگا بایت حافظه نیاز است. نظر به محدود بودن حافظه RAM در رایانه‌های امروزی شاید نتوان کل ماتریس را بر روی آن قرار داد. لاجرم می‌بایست این ماتریس را بر روی دیسک سخت ذخیره نمود که با توجه به سرعت دسترسی پایین این نوع از حافظه، محاسبات به مراتب کند می‌شود. به علاوه برای پر کردن ماتریس امیدانس هم زمان زیادی لازم است. جهت رفع این مشکل اساسی روش ممان، سعی فراوانی برای توسعه روش‌های کارا و سریع شده است که یکی از این روش‌ها، روش چند قطبی سریع<sup>۳</sup> (FMM) است. این روش که از آن به عنوان یکی از ۱۰ الگوریتم برتر قرن بیستم نام می‌برند، توسط گرین گارد و راخلین معرفی شد [۷]. هدف اولیه این روش محاسبه تعامل میان اجرام آسمانی بود، اما چندی بعد از آن برای مسائل تفرق نیز استفاده گردید [۸ و ۹]. تفاوت این روش با روش ممان آن است که توابع پایه را گروه‌بندی کرده و به محاسبه اثر متقابل میان گروه‌های توابع پایه مجزا می‌پردازد و در نتیجه بسیار سریع‌تر به جواب می‌رسد. پیچیدگی محاسبات در این روش از مرتبه  $O(N \log N)$  بوده در حالی که در روش ممان از مرتبه  $O(N^2)$  است. در حقیقت الگوریتم FMM روشی برای ضرب ماتریس در یک بردار به صورت سریع است. امروزه با تعمیم روش FMM و به جهت افزایش

<sup>1</sup> Magnetic Field Integral Equations

<sup>2</sup> Method of Moment

<sup>3</sup> Fast Multipole Method

<sup>4</sup> Single Level Fast Multipole Method

<sup>5</sup> Multi-Level Fast Multipole Method

که معادله (۷) یک معادله با  $N$  مجهول است. با اعمال  $N$  تابع وزن و توزیع مجدد اپراتورهای دیفرانسیل برداری، عناصر ماتریس  $Z$  و بردار تحریک  $b$  از معادله (۱) به صورت معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$z_{mn} = \int_{f_m} \int_{f_n} \left( \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') - \frac{1}{k^2} [\nabla \cdot \mathbf{f}_m(\mathbf{r})][\nabla \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}')] \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' ds \quad (8)$$

$$b_m = -\frac{j}{\omega\mu} \int_{f_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) ds \quad (9)$$

که در آن، تابع پایه با  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  و تابع وزن با  $f_m(\mathbf{r})$  نشان داده شده‌اند. برای توابع وزن می‌توان از هر تابعی استفاده کرد. یکی از رایج‌ترین روش‌ها استفاده از روش گالرکین<sup>۴</sup> است، که در آن توابع پایه خود به عنوان توابع وزن هم استفاده می‌شوند. با این انتخاب توابع وزن و حل دستگاه فوق می‌توان بردار ضرایب مجهول  $a$  را یافت و سپس به کمک رابطه (۶) جریان القایی مجهول روی سطح هادی را محاسبه کرد. بدیهی است که با داشتن جریان سطحی، محاسبه میدان‌های پراکنده می‌شود.

در روش ممان، هر تابع پایه با تمام توابع پایه دیگر از طریق تابع گرین تعامل دارد و ماتریس سامانه حاصله پر است. بنابراین همه عناصر ماتریس باید در حافظه ذخیره شوند. این روش هنگامی که  $N$  کوچک است به خوبی کار می‌کند، ولی برای مسائل بزرگ‌تر ممکن است به صورت یک مانع بزرگ ظاهر شود. چندین الگوریتم حل معادلات ماتریسی تکراری، که در سال‌های اخیر به طور فزاینده فراگیر شده‌اند، موجود است. در این الگوریتم‌ها به جای تغییر ماتریس سامانه، بخش عمده‌ای از تلاش صرف محاسبه حاصل ضرب ماتریس در بردار در هر تکرار می‌گردد، در حالی که ماتریس کامل هنوز هم باید ذخیره شود. زمان کلی محاسبه از مرتبه  $O(MN^2)$  است که در آن  $N^2$  تعداد عملیات برای محاسبه ضرب ماتریس در بردار و  $M$  تعداد تکرارها است. اخیراً، روش‌هایی مانند روش چند قطبی سریع [۷] و روش انتگرال تطبیقی<sup>۵</sup> (AIM) توسعه یافته‌اند که محاسبه سریع تعامل بین گروه‌های تابع پایه را انجام می‌دهند. این روش بسیاری از عناصر با مقادیر کوچک را از بین برده و تا حد زیادی محاسبه حاصل ضرب ماتریس در بردار را سرعت می‌بخشند.

### ۳-۲. روش چند قطبی سریع

در روش ممان به علت تعدد ضرب ماتریس در بردار مورد نیاز، زمان اجرا ممکن است بسیار بالا باشد. اگر حجم ماتریس  $Z$  برای ذخیره شدن در حافظه بالا باشد، یکی از گزینه‌های پیش رو اصلاح مسئله به منظور کاهش تعداد مجهولات است.

که در آن،  $r$  و  $r'$  به ترتیب بردارهای مکان نقطه میدان<sup>۱</sup> و نقطه منبع<sup>۲</sup> و عبارت  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  تابع گرین سه بعدی است که در معادله هلمهولتز (۳) صدق می‌کند و جواب آن به صورت معادله (۴) است:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (4)$$

با اعمال شرط مرزی صفر بودن میدان الکتریکی مماسی کل روی سطح  $S$  می‌توان بین میدان‌های الکتریکی  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$  و  $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$  ارتباطی برقرار کرد که با کمک این ارتباط و اعمال آن به معادله (۲)، می‌توان به معادله انتگرالی زیر موسوم به معادله انتگرالی میدان الکتریکی برای سطوح هادی کامل الکتریکی دست یافت [۱۳]:

$$-\frac{j}{\omega\mu} [\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r})] = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \cdot \int_S \left[ 1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds' \quad (5)$$

که در این رابطه، اپراتورهای گرادیان و دیورژانس روی مختصات نقطه مشاهده عمل می‌کنند و  $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r})$  بردار واحد مماس بر سطح  $S$  است. این معادله انتگرالی موسوم به فردهولم<sup>۳</sup> نوع اول است که در آن جریان القایی مجهول تنها در داخل انتگرال ظاهر می‌گردد. از آنجا که در به دست آوردن روابط فوق هیچ محدودیتی در شکل سطح پراکنده‌ساز ایجاد نشده، پس این معادله انتگرالی همانند اجسام نازک و سطوح باز، بر روی سطوح بسته نیز قابل استفاده است.

### ۲-۲- روش ممان

در اغلب مسائل مورد توجه عملی، معادله انتگرالی (۵) به صورت تحلیلی قابل حل نیست و باید از روش‌های عددی برای حل آن استفاده کرد. یکی از مهم‌ترین این روش‌ها، روش ممان است، که یک روش عددی برای تبدیل این معادله انتگرالی به یک سامانه خطی قابل حل عددی رایانه‌ای می‌باشد. حال برای حل معادله انتگرالی (۵) از روش ممان، تابع مجهول  $\mathbf{J}$  به فرم رابطه (۶) بسط داده می‌شود و سپس در معادله انتگرالی (۵) قرار می‌گیرد تا معادله (۷) حاصل شود:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) \quad (6)$$

$$-\frac{j}{\omega\mu} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \int_S \left( 1 + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \right) \cdot \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' \quad (7)$$

<sup>4</sup> Galerkin

<sup>5</sup> Adaptive Integral Method

<sup>1</sup> Field Point

<sup>2</sup> Source Point

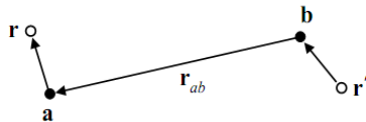
<sup>3</sup> Fredholm

می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\mathbf{z}_{m^*} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{m^*}^{\text{near}} & \mathbf{z}_{m^*}^{\text{far}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\text{near}} & \mathbf{b}^{\text{far}} \end{bmatrix} = \mathbf{z}_{m^*}^{\text{near}} \cdot \mathbf{b}^{\text{near}} + \mathbf{z}_{m^*}^{\text{far}} \cdot \mathbf{b}^{\text{far}} \quad (11)$$

که عناصر موجود در زیر بردارهای  $\mathbf{z}_{m^*}^{\text{near}}$  و  $\mathbf{b}^{\text{near}}$  فقط شامل توابع منبع واقع در ناحیه نزدیک به تابع پایه  $\mathbf{lm}$ ، و  $\mathbf{z}_{m^*}^{\text{far}}$  و  $\mathbf{b}^{\text{far}}$  فقط شامل توابع منبع واقع در ناحیه دور آن است. آنچه روش چند قطبی سریع اجازه می‌دهد، گروه‌بندی توابع پایه در ناحیه دور با هم، و سپس محاسبه سریع مقدار  $\mathbf{z}_{m^*}^{\text{far}} \cdot \mathbf{b}^{\text{far}}$  با استفاده از بسط چند قطبی این گروه‌ها است. مقدار  $\mathbf{z}_{m^*}^{\text{near}} \cdot \mathbf{b}^{\text{near}}$  هنوز هم با استفاده از روش ساده روش ممان محاسبه می‌شود. به عنوان یک نتیجه، عناصر ماتریس که به طور معمول شامل  $\mathbf{z}_{m^*}^{\text{far}}$  هستند، دیگر صراحتاً در حافظه ذخیره نمی‌شوند، تنها آن عناصری که در  $\mathbf{z}_{m^*}^{\text{near}}$  قرار دارند واقعاً محاسبه و به صورت معمول ذخیره می‌شوند. ضرب ماتریس در بردار اکنون شامل یک گام ضرب نزدیک با استفاده از ماتریس ممان نزدیک و یک گام ضرب دور با استفاده از FMM است.

بعد از بررسی اهمیت الگوریتم FMM در کاهش زمان محاسبات ضرب ماتریس در بردار، باید بتوان تابع گرین بین نقطه منبع  $\mathbf{r}'$  و نقطه مشاهده  $\mathbf{r}$  موجود در رابطه (۷) را نیز بازنویسی کرد. برای این منظور در شکل (۲) یک جفت از نقاط  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  که به ترتیب در نزدیکی  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{r}'$  قرار دارند، نشان داده شده است. با توجه به این شکل و استفاده از خاصیت جمع برداری جهت محاسبه  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  و استفاده از ایده استراتون<sup>۱</sup> می‌توان به معادله (۱۲) رسید:



شکل (۲): انتقال موج [۷]

$$\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_S e^{-jk\hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b)} T_L(k, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) ds \quad (12)$$

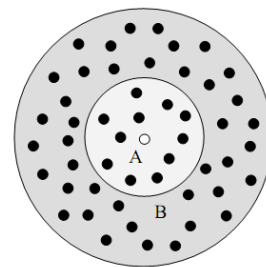
که در آن، تابع انتقال  $T_L(k, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab})$  از رابطه زیر به دست می‌آید [۱۴]:

$$T_L(k, \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{r}_{ab}) = \frac{k}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-j)^{l+1} (2l+1) h_l^{(2)}(k|\mathbf{r}_{ab}|) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ab}) \quad (13)$$

که در آن،  $P_l(x)$  چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه  $l$ ،  $h_l^{(2)}(x)$  تابع هنکل کروی از نوع دوم از مرتبه  $l$  و  $\hat{\mathbf{k}}$  بردار واحد نظیر ثابت

روش چند قطبی سریع یک الگوریتم عددی برای کاهش پیچیدگی محاسباتی این مسئله است. این الگوریتم یک تقریب با خطای کنترل شده روی تابع گرین سامانه اعمال می‌کند که اجازه می‌دهد نیروی وارده در اثر یک گروه از ذرات به صورتی محاسبه شود که کل آن‌ها به عنوان یک ذره در نظر گرفته شوند. هنگامی که FMM در مسائل برداری الکترومغناطیس استفاده شود، تعامل بین گروه‌هایی از توابع پایه که به خوبی از هم جدا شده‌اند می‌تواند منجر به افزایش سرعت محاسبه گردد. بنابراین محاسبه ضرب ماتریس در بردار در یک الگوریتم حل تکراری بسیار سریع و بدون نیاز به ذخیره بسیاری از عناصر ماتریس انجام می‌شود. این افزایش در سرعت و کاهش در حافظه مورد نیاز باعث حل بسیار سریع تر مسائل موجود می‌گردد.

برای نشان دادن این که FMM در روش ممان چگونه عمل می‌کند، ابتدا ضرب ماتریس در بردار در یک فرآیند تکراری بررسی می‌گردد. در روش ممان، ماتریس  $Z$  نشان دهنده تعامل بین تمام توابع پایه در سامانه و بردار  $\mathbf{b}$  در سمت راست معادله بیانگر تحریک هر یک از توابع پایه است. هنگامی که ضرب ماتریس در بردار  $\mathbf{c} = Z\mathbf{b}$  انجام می‌شود، در واقع میدان دریافت شده توسط هر تابع پایه در اثر تابش از توابع پایه دیگر محاسبه می‌شود. در حالی که چینش توابع پایه در هندسه مسئله دلخواه است، برای یک جفت از توابع پایه همانند شکل (۱)، می‌توان گفت که در ناحیه دور با نزدیک یکدیگر واقع شده‌اند. توابع پایه موجود در ناحیه  $A$  نسبت به تابع پایه واقع در مرکز "نزدیک" در نظر گرفته می‌شوند در حالی که توابع پایه موجود در ناحیه  $B$  نسبت به تابع پایه واقع در مرکز "دور" در نظر گرفته می‌شوند.



شکل (۱): توابع پایه دور و نزدیک در الگوریتم FMM [۷]

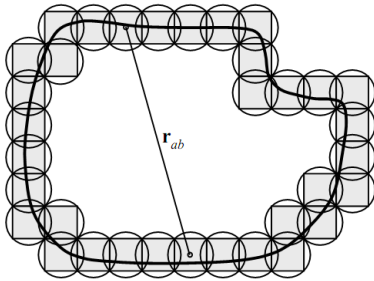
حال سطر  $\mathbf{lm}$  از ماتریس  $Z$  را در نظر بگیرید، که با  $\mathbf{z}_{m^*}$  نشان داده شده است. حاصل ضرب این سطر با بردار  $\mathbf{b}$  نشان دهنده میدان دریافت شده توسط تابع پایه  $\mathbf{lm}$  از همه توابع پایه است و می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\mathbf{c}_m = \mathbf{z}_{m^*} \cdot \mathbf{b} = [z_{m1}, z_{m2}, z_{m3}, \dots, z_{mN}] \cdot [b_1, b_2, b_3, \dots, b_N] \quad (10)$$

از آنجا که برخی از توابع پایه در ناحیه "نزدیک" تابع پایه  $\mathbf{m}$  و برخی دیگر در ناحیه "دور" آن قرار دارند، این ضرب داخلی

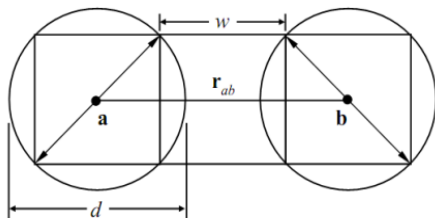
<sup>1</sup> Stratton

که این فرآیند تکمیل شود، مجموعه‌ای از گروه‌های باقی‌مانده وجود خواهند داشت که هر یک از مکعب‌های آن دارای یک کره محیطی با قطر  $d = \sqrt{3}w$  است. برای سادگی، شکل (۳) این فرآیند را در حالت دوبعدی نشان می‌دهد.



شکل (۳): مکعب‌ها و کره‌های دربر گیرنده آن‌ها در گروه‌بندی FMM یک سطحی [۹]

حال که گروه‌هایی از توابع پایه ایجاد شد، می‌توان توسط رابطه (۱۲) تابع گرین را بین نقاط دو گروه و با فرض اینکه این دو گروه به اندازه کافی از هم دور هستند، محاسبه کرد. برای انجام این کار اکنون نقاط  $a$  و  $b$  به مرکز کره محیطی هر یک از این دو گروه اختصاص داده می‌شود. معیار این که دو گروه نسبت به یکدیگر نزدیک و یا دور هستند، فاصله بین این کره‌ها است. به بیان دقیق‌تر، فاصله  $|r_{ab}|$  بین گروه‌ها باید بزرگ‌تر یا مساوی یک قطر کره باشد. اگر از یک شبکه از مکعب‌های هم اندازه استفاده شود، این شرط، چنانچه گروه‌ها حداقل توسط یک مکعب جدا شده باشند، ارضاء می‌شود. در این صورت در جهت‌های اصلی که در شکل (۴) نشان داده شده است حداقل فاصله بین مراکز  $2w$  است. سپس، برای هر گروه، باید یک لیست از گروه‌های دور و نزدیک به آن ایجاد کرد که لیست گروه نزدیک، خود این گروه و همه گروه‌های مستقیماً مجاور این گروه را دربر می‌گیرد و گروه‌های باقی مانده به فهرست گروه‌های دور اضافه می‌شوند.



شکل (۴): ابعاد و فاصله مکعب‌ها در گروه‌بندی FMM یک سطحی [۹]

چون نمی‌توان برای محاسبه تابع انتقال رابطه (۱۳) مجموع بی‌شمار جمله را لحاظ کرد، پس باید حد نهایی مجموع  $L$  با عنوان تعداد چند قطبی‌ها را تنظیم کرد. این عدد تابعی از قطر کره‌های دربر گیرنده مکعب‌ها و همچنین عدد موج است و روابطی برای محاسبه آن به صورت تجربی ارائه شده است که بهترین آن‌ها توسط چو و سانگ پیشنهاد شد [۱۶]:

انتشار است. این یک نتیجه مهم است که تابع انتقال تنها به  $r_{ab}$  بستگی دارد، تا تعامل بین هر دو نقطه در نزدیکی  $a$  و  $b$  با استفاده از همان تابع انتقال محاسبه گردد. اکنون اگر هدف محاسبه مجموع توابع گرین بین نقطه مشاهده  $r$  و تعدادی از نقاط منبع  $r_n$  نزدیک به  $b$  باشد، می‌توان از عبارت زیر استفاده کرد:

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-jk|r-r_n|}}{|r-r_n|} = \int e^{-jk\hat{k}\cdot r_n} T_L(k, \hat{k}, r_{ab}) \sum_{n=1}^N e^{jk\hat{k}\cdot r_n} ds \quad (14)$$

نتیجه معادله (۱۴) اجازه می‌دهد که ضرب ماتریس در بردار به سرعت محاسبه شود. برای هر نقطه منبع نخست مقدار  $e^{jk\hat{k}\cdot r_n b}$  محاسبه و تابع تابش نامیده می‌شود. سپس توابع تابش برای تمام نقاط منبع به صورت همدوس جمع‌آوری تا یک میدان محلی در  $b$  ایجاد گردد. این میدان محلی سپس با استفاده از تابع انتقال، انتقال یافته و نتیجه آن، به دست آوردن یک میدان محلی در  $a$  است. سپس این میدان محلی در  $a$  در تابع دریافت نقطه مشاهده ضرب شده و روی سطح کره انتگرال‌گیری می‌شود تا مجموع مورد نظر به دست آید. برای انجام یک ضرب دور FMM، باید همه توابع پایه به گروه‌های محلی مرتب شوند. توابع تابش و دریافت برای تمام توابع پایه، و همچنین توابع انتقال ارتباط دهنده تمام جفت گروه‌ها از قبل با هم محاسبه می‌شوند. ضرب دور، سپس شامل مراحل جمع‌آوری، انتقال و جداسازی این توابع در گروه‌ها است. بدون شک موفق‌ترین تابع پایه استفاده شده در ۲۵ سال گذشته تابع پایه مثلثی راثو، ویلتون، گلیسون [۱۵] (RWG) است، که در این مقاله و در شبیه‌سازی‌ها از آن استفاده شده است.

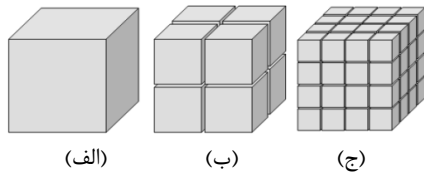
### ۳- تعمیم و اصلاح روش چند قطبی سریع

اکنون این آمادگی وجود دارد که بتوان FMM و روش ممان را با هم استفاده کرد. نخست یک الگوریتم چند قطبی سریع یک سطحی بیان و پس از آن از بسیاری از عناصر FMM یک سطحی برای توسعه الگوریتم چند سطحی استفاده می‌گردد.

#### ۳-۱- الگوریتم چند قطبی سریع یک سطحی

در این الگوریتم، نخستین وظیفه گروه‌بندی توابع پایه با هم است. بنابراین جعبه دربر گیرنده جسم به  $M$  مکعب کوچک هم اندازه به ضلع  $w$  و قطر  $\sqrt{3}w$  تقسیم می‌شود. طول  $w$  معمولاً کسری از طول موج مانند  $\lambda/2$  یا  $\lambda/4$  است. در مرحله بعد با در نظر گرفتن کلیه لبه‌هایی که مرکز آن‌ها درون هر مکعب قرار می‌گیرد، توابع پایه به تک‌تک مکعب‌ها اختصاص داده می‌شود و مکعب‌هایی که خالی باقی بمانند از دور خارج می‌شوند. هنگامی

مکعب‌ها طبقه‌بندی می‌شوند. این فرآیند بسیار سریع است زیرا تنها آن لبه‌هایی که متعلق به یک مکعب والد هستند، برای فرزندان آن مکعب نامزد می‌شوند. تقسیم زمانی متوقف می‌شود که اندازه مکعب‌ها به کسری از طول موج مانند  $\lambda/2$  یا  $\lambda/4$  برسد. گروه‌ها در این پایین‌ترین سطح از درخت (سطح  $I_{max}$ ) مکعب‌های بزرگ نامیده می‌شوند. لیست گروه‌های دور و نزدیک در تمامی سطوح به جز دو سطح اول ساخته می‌شوند. مکعب‌ها در این دو سطح همه گروه‌های نزدیک هستند، و در الگوریتم MLFMA استفاده نمی‌شوند. با شروع در بالاترین سطح (سطح ۳)، همه مکعب‌های نزدیک و دور به‌طور معمول معرفی می‌شوند. در سطوح بالاتر، تنها مکعب‌های فرزندی که متعلق به مکعب‌های مجاور به یک مکعب والد (از جمله خودش) هستند، نامزد گروه‌های نزدیک و دور برای فرزندان این مکعب در نظر گرفته می‌شوند. این امر تا حد زیادی میانگین تعداد گروه‌های دور را کاهش می‌دهد و همچنین تعداد بردار انتقال منحصر به فرد را به حداکثر ۳۱۶ عدد در هر سطح محدود می‌کند. این امر بسیار سودمند است چرا که تعداد کل انتقال‌ها می‌تواند در مسائل بزرگ‌تر، بسیار بالا باشد.



شکل (۵): درخت هشت تایی سطح: (الف) یک، (ب) دو و (ج) سه [۱۷]

ضرب ماتریس در بردار در MLFMM روی سطوح بزرگ‌تر از دو درخت عمل می‌کند. از آنجا که توابع تابش در پایین‌ترین سطح ذخیره می‌شوند، یک مسیر رو به بالا (جمع‌آوری) از طریق درخت باید ساخته شود که در آن توابع تابش فرزندان جمع‌آوری شده و با استفاده از درون‌یابی به والد‌های آن‌ها برسد. سپس در بالاترین سطح یک مسیر رو به پایین آغاز می‌شود که در آن انتقال بین تمام مکعب‌های دور انجام شده، و سپس میدان‌های دریافت شده از تمام مکعب‌های والد با ترکیب انتگرال بر سطح کره و درون‌یابی معکوس به فرزندان آن‌ها می‌رسد. طرح انتقال در MLFMA در شکل (۶) نشان داده شده است. شکل (۶-الف) انتقال بین دو گروه در یکی از سطوح بالاتر را به تصویر می‌کشد. در سطح بعدی در شکل (۶-ب)، همه گروه‌های دور، فرزندان گروه‌هایی هستند که در سطح قبلی نزدیک در نظر گرفته می‌شدند. این امر بیشتر در مورد پایین‌ترین سطح در شکل (۶-ج)، که در آن تعداد انتقال دور به مراتب کمتر از مشابه آن در الگوریتم یک سطحی است، دیده می‌شود. در ادامه مسیر به سمت پایینی (جداسازی) هم لازم است که در آن نخست از بالاترین سطح یعنی سطح ۳ آغاز شده و انتقال بین تمام گروه‌های دور انجام می‌شود. از آنجا که

$$L = kd + \beta(kd)^{1/3} \quad (15)$$

که در آن،  $\beta$  تعداد ارقام دقت مورد نیاز است که عدد ۶ برای آن کافی است. سپس توابع انتقال بین جفت گروه‌های دور باید از پیش محاسبه و ذخیره شوند. چون این توابع به بردار جهت بین مراکز گروه بستگی دارند، باید برای همه بردارهای منحصر به فرد  $I_{tab}$  محاسبه شوند. گروه‌بندی توسط مکعب باعث ایجاد مجموعه‌ای از این بردارها شده که طول آن‌ها در جهت‌های اصلی مضاربی از اندازه ضلع مکعب است. در نتیجه، بسیاری از این بردارها ممکن است در بین جفت گروه‌های مختلف تکرار شوند که در چنین مواردی تنها یک تابع انتقال مورد نیاز است. با ذکر این نکات رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$c_m = c_m^{near} + c_m^{far} \quad (16)$$

که در آن،  $c_m^{near}$  و  $c_m^{far}$  به ترتیب سهم ضرب نزدیک و دور هستند.

### ۳-۲- الگوریتم چند قطبی سریع چند سطحی

در الگوریتم یک سطحی، تعداد انتقال‌ها به صورت نمایی با افزایش تعداد گروه‌ها رشد می‌کند. می‌توان بهره‌وری بیشتری را با تعمیم الگوریتم یک سطحی به چند سطحی به دست آورد. الگوریتم چند قطبی سریع چند سطحی مزایای یک الگوریتم یک سطحی را به گروه‌های مرتب شده در یک سلسله مراتب لایه‌ای اعمال می‌کند، که باعث کاهش تعداد کل انتقال‌ها، و تسریع زیادی در بخش ضرب از محاسبه ضرب ماتریس در بردار می‌شود.

ابتدا باید تأثیر استفاده از مکعب‌های بزرگ‌تر در FMM یک سطحی را در نظر گرفت. اگر بتوان راهی برای استفاده هم‌زمان از مکعب‌های بزرگ و کوچک ابداع کرد، می‌توان مزایای ذخیره‌سازی گروه‌های کوچک‌تر را در حین کاهش تعداد انتقال حفظ کرد. تقسیم هندسه مسئله، به مکعب‌های کوچک‌تر اجازه این کار را می‌دهد. با استفاده از یک طرح تقسیم‌بندی مبتنی بر درخت، گروه‌های بزرگ‌تر را می‌توان به صورت بازگشتی به گروه‌های کوچک‌تر با یک رابطه روشن والد و فرزند تقسیم کرد. یک انتخاب عالی برای این منظور درخت هشت‌تایی است [۱۷]، که یک طرح سلسله‌مراتبی رایج در گرافیک رایانه‌ای است. برای تولید یک درخت هشت‌تایی، شیء ابتدا در یک مکعب بزرگ محصور می‌شود. این مکعب سپس به هشت مکعب کوچک‌تر تقسیم می‌شود، که خود به هشت مکعب کوچک‌تر تقسیم می‌شوند، و به همین ترتیب ادامه می‌یابد، همان‌طور که در شکل (۵) نشان داده شده است. لبه‌ها به مکعب‌هایی در هر سطح با تعیین موقعیت مرکز آن‌ها نسبت به کره دربر گیرنده هر یک از

هر سلول همانند شکل (۷) دارای دو حلقه شکافته با شعاع داخلی حلقه کوچک‌تر ۶ و حلقه بزرگ‌تر ۱۰ میلی‌متر، عرض هر حلقه ۲ میلی‌متر، فاصله بین دو حلقه ۲ میلی‌متر و عرض شکافی برابر ۱ میلی‌متر می‌باشد. بنابراین مطابق شکل (۸) ابعاد کل مسئله  $100 \times 100$  میلی‌متر مربع خواهد بود. قبل از ادامه بحث، باید نشان داد که ساختار SRR شکل (۷) در فرکانس ۹ گیگا هرتز از خود ماهیت فراماده‌ای با ضریب گذردهی مغناطیسی منفی نشان می‌دهد. چنانچه فرکانس کار در رابطه (۱۷) صدق کند، آنگاه ساختار SRR دارای ضریب گذردهی مغناطیسی منفی می‌شود [۱]:

$$\omega_{0m} < \omega < \frac{\omega_{0m}}{\sqrt{1-F}} \quad (17)$$

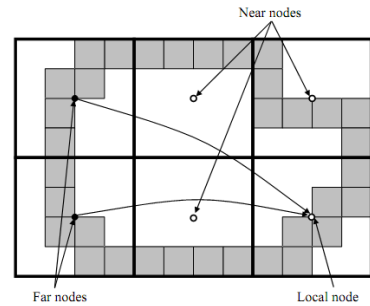
که در آن،  $F = \pi(a/p)^2$  و  $\omega_{0m}$  فرکانس تشدید مغناطیسی است که توسط رابطه (۱۸) تعریف می‌گردد:

$$\omega_{0m} = c \sqrt{\frac{3p}{\pi \ln(2w/\delta) a^3}} \quad (18)$$

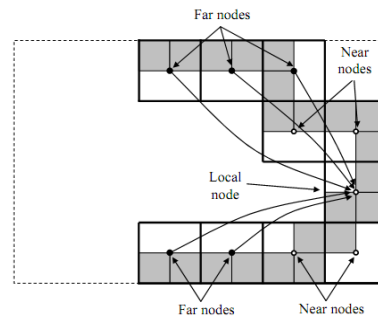
که در آن،  $c$  سرعت نور برابر  $3 \times 10^8$  متر بر ثانیه،  $p$  فاصله بین دو سلول متوالی برابر ۲۵ میلی‌متر،  $w$  عرض حلقه برابر ۲۴ میلی‌متر،  $\delta$  فاصله شعاعی بین حلقه‌ها برابر ۲ میلی‌متر و  $a$  شعاع داخلی حلقه کوچک‌تر برابر ۶ میلی‌متر است. با توجه به این اعداد  $\omega_{0m}$  برابر  $5/59 \times 10^{10}$  رادیان بر ثانیه و  $F$  مساوی  $0/18$  است و فرکانس کار مسئله ۹ گیگاهرتز (برابر  $9/12 \times 10^{10}$  رادیان بر ثانیه) است در بازه رابطه (۱۷) قرار می‌گیرد.

برای مش‌بندی این مسئله نیز، از مش‌های مثلثی RWG استفاده شده که در هر سلول تعداد ۲۸۸ مثلث ایجاد و در نتیجه کل ساختار شامل ۴۶۰۸ مثلث خواهد شد. برای اختصاص توابع پایه، لبه‌های (اضلاع) مشترک بین هر دو مثلث انتخاب گردیده و تابع مربوطه به آن اختصاص داده شده که در نتیجه تعداد کل توابع پایه در مسئله برابر با ۵۴۶۱ عدد خواهد شد (شکل (۸)). پس تعداد مجهولات در دستگاه معادلات این مسئله برابر با ۵۴۶۱ است. برای حل این دستگاه یک باراز روش ممان به‌صورت مستقیم و بار دیگر همراه با MLFMM به‌صورت جداگانه استفاده شده و نتایج با یکدیگر مقایسه گردیده است. برای این بررسی، موج تخت با ۳ زاویه مختلف،  $\theta=0$ ،  $\theta=\pi/6$  و  $\theta=\pi/3$  با  $\varphi=0$  و فرکانس ۹ گیگا هرتز مطابق رابطه (۱۹) به ساختار تابانده می‌شود و بردار جریان روی آن به‌دست می‌آید.

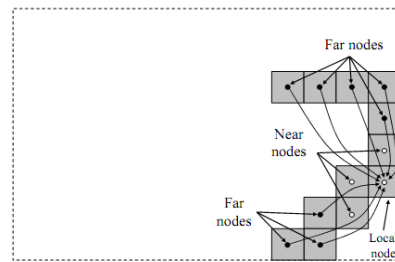
این بالاترین سطح است، هیچ درون‌یابی معکوس مورد نیاز نیست. حال به سطح بعدی رفته، و تمام انتقالات بین گروه‌های دور انجام می‌گردد. سپس به این میدان‌ها، میدان‌های درون‌یابی معکوس از گروه‌های والد آن‌ها اضافه شده، پس از آن این عمل تا رسیدن به پایین‌ترین سطح برای همه سطوح پایین‌تر تکرار می‌شود. پس از اینکه انتقالات و درون‌یابی‌های معکوس در این سطح انجام شد، می‌توان نتایج را به عناصر مناسب بردار حاصل ضرب اضافه کرد. با این عمل ضرب ماتریس در بردار به‌طور کامل با استفاده از MLFMM انجام می‌پذیرد.



(الف)



(ب)



(ج)

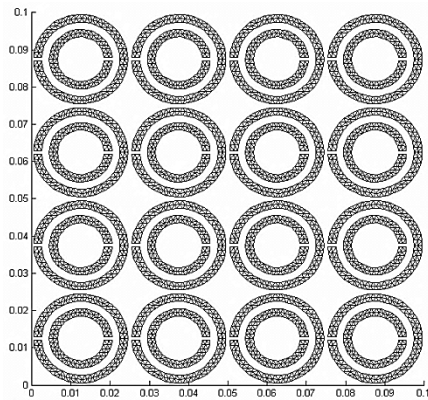
شکل (۶): انتقالات در الگوریتم سطحی MLFMM:

(الف) M-2، (ب) M-1 و (ج) M [۱۷]

#### ۴- بررسی تفرق و محاسبه میدان‌های پراکنندگی از ساختار فراماده SRR با استفاده از روش چند قطبی سریع سطحی

اکنون به بررسی و شبیه‌سازی تفرق از یک ساختار فراماده متشکل از سلول‌های SRR پرداخته می‌شود. این ساختار شامل تکرار ۱۶ سلول SRR در صفحه  $xy$  به‌صورت چینش  $4 \times 4$  است.





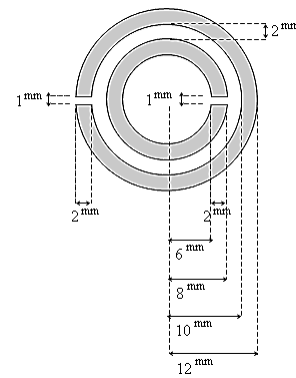
شکل (۸): چینش ساختار فراماده و مشبندی سلول‌های SRR

#### ۴-۱- روش ممان

در این روش ماتریس امیدانس  $Z$ ، به صورت کامل محاسبه می‌گردد. پر شدن این ماتریس زمانی برابر با ۴۸۶۸۱ ثانیه در کد متلب و ۴۵۶۳۲ ثانیه در نرم‌افزار FEKO صرف نمود. الگوریتم برای هر زاویه تابش، پس از اجرای تعدادی تکرار همگرا می‌گردد و زمان کل تکرارها، میانگین زمان اجرای هر تکرار و همچنین زمان کل حل مسئله با استفاده از روش ممان با کدنویسی در نرم‌افزار متلب در جدول (۱) و با استفاده از نرم‌افزار FEKO در جدول (۲) نشان داده شده است. جریان‌های سطحی و میدان‌های دور به دست آمده از روش ممان مستقیم به عنوان مرجع برای ارزیابی نتایج بقیه روش‌ها استفاده شده است.

#### ۴-۲- روش SLFMM

این روش با تقسیم‌بندی مسئله به مکعب‌هایی با ابعاد یال برابر با ۱۲/۵ میلی‌متر در صفحه  $xy$  انجام می‌گیرد، که البته به علت مسطح بودن مسئله می‌توان آن‌ها را به صورت مربع‌هایی در صفحه  $xy$  در نظر گرفت. تعداد این مربع‌ها برابر با ۱۶ عدد است. سپس باید این مربع‌ها شماره‌گذاری گردد و مربع‌های دور و نزدیک تعیین شود. ۱/۲ ثانیه زمان صرف شد تا شماره‌گذاری و تعیین مربع‌های دور و نزدیک انجام شود. در روش SLFMM باید برای هر تابع پایه توابع تابش و دریافت و برای هر دو مکعب که طبق تعریف همسایه نمی‌باشند، تابع انتقال موج را به دست آورد. زمان محاسبه این توابع برابر با ۲۰/۱ ثانیه شد. در این روش ماتریس امیدانس  $Z$ ، به صورت کامل محاسبه نمی‌گردد، بلکه تنها برای لبه‌های واقع در دو مربع همسایه محاسبه می‌شود. محاسبه این عناصر ماتریس امیدانس زمانی برابر با ۱۱۴۹۱ ثانیه در کد متلب و ۹۸۵۶ ثانیه در نرم‌افزار FEKO صرف نمود. الگوریتم برای هر زاویه تابش، پس از اجرای تعدادی تکرار همگرا می‌گردد و زمان کل تکرارها، میانگین زمان اجرای هر تکرار و همچنین زمان کل حل مسئله با استفاده از روش SLFMM با کدنویسی در نرم‌افزار متلب در جدول (۱) و با استفاده از نرم‌افزار FEKO در جدول (۲) نشان داده شده است.



شکل (۹): سلول SRR

$$E_y = 1000e^{jk(x \sin \theta + z \cos \theta)} \quad (۱۹)$$

بعد از اعمال روش ممان با ۵۴۶۱ تابع پایه RWG و انتخاب همین تابع به عنوان تابع آزمون، به یک دستگاه معادلات با ۵۴۶۱ مجهول می‌رسید. شکل ماتریسی این معادله به صورت رابطه (۲۰) است:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1,5461} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2,5461} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{5461,1} & z_{5461,2} & \cdots & z_{5461,5461} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{5461} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{5461} \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

در این دستگاه، بردار مجهولات، دامنه توابع پایه (جریان سطحی روی المان‌ها) است. برای حل این دستگاه از روش ممان به صورت مستقیم و SLFMM و MLFMM به صورت جداگانه استفاده شده و نتایج با یکدیگر مقایسه گردیده است. در روش ممان با در نظر گرفتن یک مقدار اولیه برای بردار مجهولات و محاسبه حاصل ضرب ماتریس امیدانس در این بردار، جواب به دست آمده را از جواب اصلی (بردار مقادیر معلوم) کم می‌کند. الگوریتم هنگامی متوقف می‌شود که مقدار اندازه بردار باقی‌مانده از یک مقدار پیش‌فرض کمتر شود، که در اینجا ۰/۰۱ اندازه بردار مقادیر معلوم (b) در نظر گرفته شده است. پس از به دست آمدن جریان سطحی روی پچ در هر زاویه تابش، میدان دور حاصل از این میدان برای هر روش به صورت جداگانه محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه گردیده است. کدنویسی جهت حل مسئله توسط نرم‌افزار متلب انجام شد و کد برنامه شامل توابعی جهت مش‌بندی، محاسبه عناصر خودی، محاسبه عناصر ماتریس امیدانس، انجام عملیات پیش‌آماده‌سازی، تقسیم‌بندی ساختار به مکعب‌ها در سطح‌های مختلف، پیدا کردن مکعب‌های دور و نزدیک، محاسبه توابع انتقال موج و تابش و دریافت، محاسبه عناصر بردار تحریک، اجرای الگوریتم‌های MoM، SLFMM و MLFMM است.

## ۳-۴- روش MLFMM

و زمان کل تکرارها، میانگین زمان اجرای هر تکرار و همچنین زمان کل حل مسئله با استفاده از روش MLFMM با کدنویسی در نرم‌افزار متلب در جدول (۱) و با استفاده از نرم‌افزار FEKO در جدول (۲) نشان داده شده است.

با کدنویسی در نرم‌افزار متلب جریان‌های سطحی برای زوایای تابش جدول (۱) و برای هر سه روش، محاسبه و میدان‌های دور پراکندگی ترسیم شده‌اند. همچنین جهت اطمینان خاطر از کدنویسی، با استفاده از نرم‌افزار FEKO، مشابه این عملیات انجام شد. در اینجا جهت جلوگیری از طولانی شدن مقاله فقط به ذکر نتایج تحت زاویه تابش  $\theta = \pi/3$  و  $\phi = 0$  حاصل از دو روش MoM و MLFMM که در نرم‌افزار FEKO ترسیم شده‌اند پرداخته می‌شود. شکل (۹) جریان‌های سطحی روی سطوح سلول‌های SRR را نشان می‌دهد.

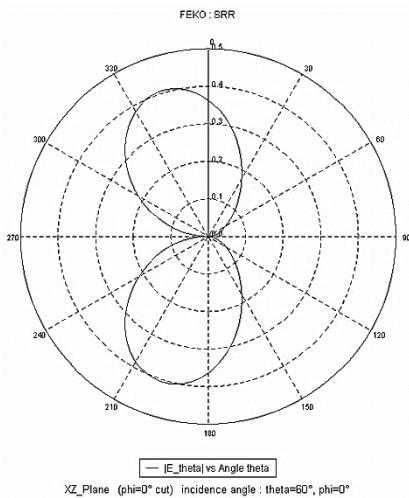
در این روش هم مسئله به مکعب‌هایی با ابعاد یال برابر با  $12/5$  میلی‌متر تقسیم‌بندی شده است، با این تفاوت که الگوریتم FMM در ۲ سطح پیاده می‌گردد. تعداد این مربع‌ها در سطح ۱ برابر با ۶۴ عدد و در سطح ۲ برابر با ۱۶ عدد است. سپس باید همانند SLFMM این مربع‌ها شماره‌گذاری شده و مربع‌های دور و نزدیک تعیین شوند. زمان لازم برای شماره‌گذاری و تعیین مربع‌های دور و نزدیک برابر ۱ ثانیه شد. در روش MLFMM همانند SLFMM، باید توابع تابش، دریافت و توابع انتقال موج را به دست آورد که برای این منظور  $16/9$  ثانیه زمان صرف شد. در این روش هم ماتریس امیدانس  $Z$  به صورت کامل محاسبه نمی‌گردد. محاسبه عناصر ماتریس امیدانس زمانی برابر با ۱۱۵۰۰ ثانیه در کد متلب و ۹۸۳۹ ثانیه در نرم‌افزار FEKO صرف نمود. الگوریتم برای هر زاویه تابش، پس از اجرای تعدادی تکرار همگرا می‌گردد

جدول (۱): زمان محاسبه جریان روی سطح سلول‌های SRR تحت زوایای تابش مختلف با کدنویسی در نرم‌افزار متلب

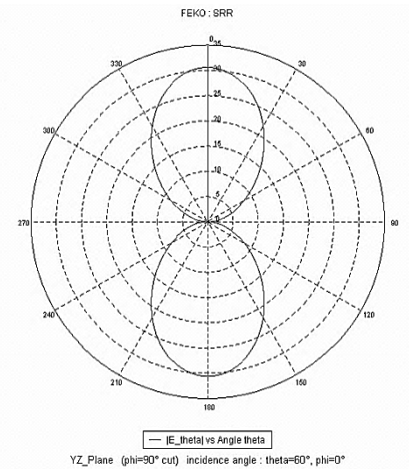
زمان کل محاسبه	میانگین زمان یک تکرار	تعداد تکرارها	زمان کل تکرارها	زمان محاسبه توابع تابش و انتقال	زمان محاسبه ماتریس امیدانس	روش مورد استفاده		زاویه تابش $\theta$
						$\phi$		
۴۹۳۹۵	۴/۷	۱۵۲	۷۱۴					۰
۴۹۱۲۸	۴/۷	۹۵	۴۴۷	-	۴۸۶۸۱	MoM	۰	$\pi/6$
۴۹۲۲۲	۴/۷	۱۱۵	۵۴۱					$\pi/3$
۱۲۱۵۳	۱/۶	۴۰۱	۶۴۲					۰
۱۲۱۴۴	۱/۶	۳۹۶	۶۳۳	۲۰/۱	۱۱۴۹۱	SLFMM	۰	$\pi/6$
۱۲۰۵۸	۱/۶	۳۴۲	۵۴۷					$\pi/3$
۱۲۱۰۲	۱/۴	۴۱۸	۵۸۵					۰
۱۲۰۶۶	۱/۴	۳۹۲	۵۴۹	۱۶/۹	۱۱۵۰۰	MLFMM	۰	$\pi/6$
۱۲۰۱۹	۱/۴	۳۵۰	۵۰۲					$\pi/3$

جدول (۲): زمان محاسبه جریان روی سطح سلول‌های SRR تحت زوایای تابش مختلف با نرم‌افزار FEKO

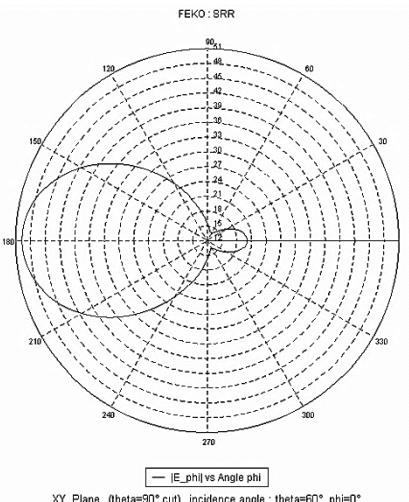
زمان کل محاسبه	میانگین زمان یک تکرار	تعداد تکرارها	زمان کل تکرارها	زمان محاسبه توابع تابش و انتقال	زمان محاسبه ماتریس امیدانس	روش مورد استفاده		زاویه تابش $\theta$
						$\phi$		
۴۶۳۱۵	۴/۸	۱۴۱	۶۸۳					۰
۴۶۰۵۲	۴/۸	۸۷	۴۲۰	-	۴۵۶۳۲	MoM	۰	$\pi/6$
۴۶۱۴۵	۴/۸	۱۰۷	۵۱۳					$\pi/3$
۱۰۴۹۶	۱/۵	۳۹۷	۵۹۵					۰
۱۰۵۴۵	۱/۵	۳۸۷	۵۸۰	۱۸/۳	۹۸۵۶	SLFMM	۰	$\pi/6$
۱۰۳۹۱	۱/۵	۳۴۵	۵۱۷					$\pi/3$
۱۰۴۳۸	۱/۳	۴۵۰	۵۸۵					۰
۱۰۴۰۲	۱/۳	۴۲۲	۵۴۹	۱۳/۹	۹۸۳۹	MLFMM	۰	$\pi/6$
۱۰۳۴۴	۱/۳	۳۷۸	۴۹۱					$\pi/3$



شکل (۱۱): میدان دورپراکندگی  $E_\theta$  در صفحه  $XZ$  (زاویه تابش  $\theta=60^\circ$  و  $\phi=0^\circ$  درجه)

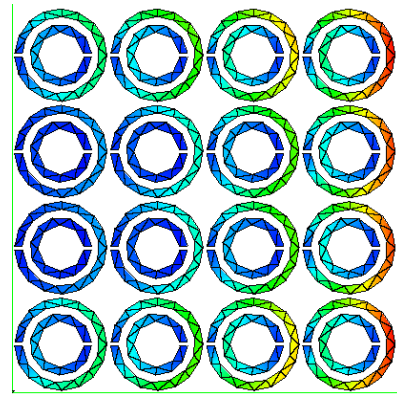


شکل (۱۲): میدان دورپراکندگی  $E_\theta$  در صفحه  $YZ$  (زاویه تابش  $\theta=60^\circ$  و  $\phi=0^\circ$  درجه)

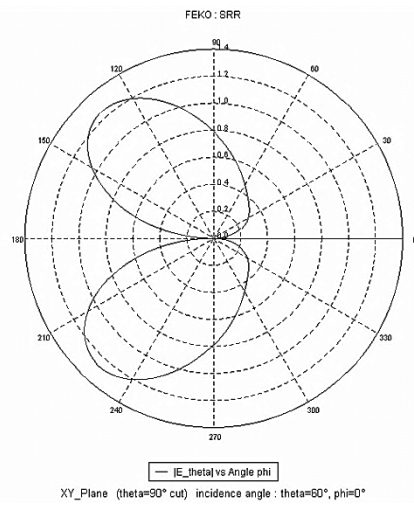


شکل (۱۳): میدان دورپراکندگی  $E_\phi$  در صفحه  $xy$  (زاویه تابش  $\theta=60^\circ$  و  $\phi=0^\circ$  درجه)

همچنین میدان دور پراکندگی  $E_\theta$  برای همین زاویه تابش جهت مقایسه در صفحه  $xy$  در شکل (۱۰)، در صفحه  $xz$  در شکل (۱۱) و در صفحه  $yz$  در شکل (۱۲) نشان داده شده است. میدان دور پراکندگی  $E_\phi$  نیز برای این زاویه تابش در صفحه  $xy$  در شکل (۱۳)، در صفحه  $xz$  در شکل (۱۴) و در صفحه  $yz$  در شکل (۱۵) ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل‌های (۱۰ الی ۱۵) ملاحظه می‌گردد، الگوریتم MLFMM هیچگونه خللی در نتایج روش ممان ایجاد نکرده و نتایج کاملاً مشابه و بر هم منطبق هستند. ذکر این نکته مهم لازم است که زمان محاسبات به‌طور کاملاً چشمگیری کاهش یافته است و این حسن استفاده از الگوریتم MLFMM را به همراه روش ممان نشان می‌دهد. پس باید خاطرنشان کرد که اعمال روش SLFMM و MLFMM به روش ممان تنها روی سرعت محاسبات و همگرایی جواب اثر مثبت می‌گذارد و پس از همگرایی، الگوهای تشعشی تقریباً یکسان و بر هم منطبق هستند.



شکل (۹): جریان‌های سطحی روی سطح سلول‌های SRR (زاویه تابش  $\theta=60^\circ$  و  $\phi=0^\circ$  درجه)

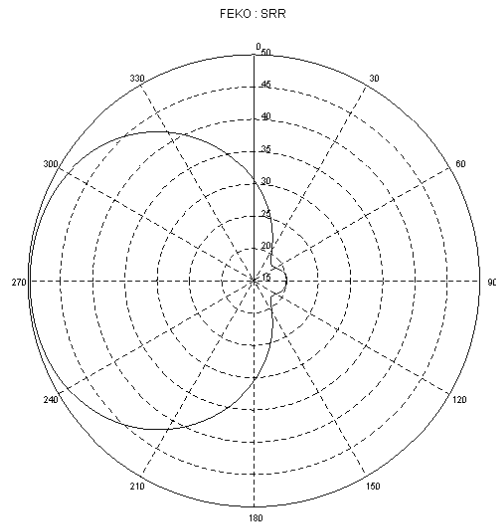


شکل (۱۰): میدان دور پراکندگی  $E_\theta$  در صفحه  $xy$  (زاویه تابش  $\theta=60^\circ$  و  $\phi=0^\circ$  درجه)

مسئله، تحلیل‌ها از سه روش MoM، SLFMM و MLFMM انجام پذیرفت و زمان اجرای هر یک از روش‌ها ثبت گردید. مشاهده می‌شود که روش FMM بدون اینکه از دقت پاسخ‌ها در حد معنی داری بکاهد، بهبود قابل ملاحظه‌ای در زمان محاسبه ایجاد می‌کند. در صورت استفاده از FMM چند سطحی (MLFMM)، این سرعت‌بخشی حتی بیشتر هم می‌گردد و زمان محاسبات تا ۷۵ درصد کاهش می‌یابد. روش FMM قابلیت بالایی برای انجام به‌صورت پردازش موازی در سامانه‌های رایانه‌ای دارد و به خصوص این روش برای اعمال روی CPUهای چند هسته‌ای، رایانه‌های موازی و همچنین استفاده در GPU سامانه‌ها، بسیار کارآمد است. بنابراین استفاده از این روش جهت برنامه‌نویسی با زبان‌هایی مانند C یا نسخه‌های جدید نرم‌افزار متلب که امکان پردازش موازی و استفاده از GPU را دارند، بسیار سودمند است.

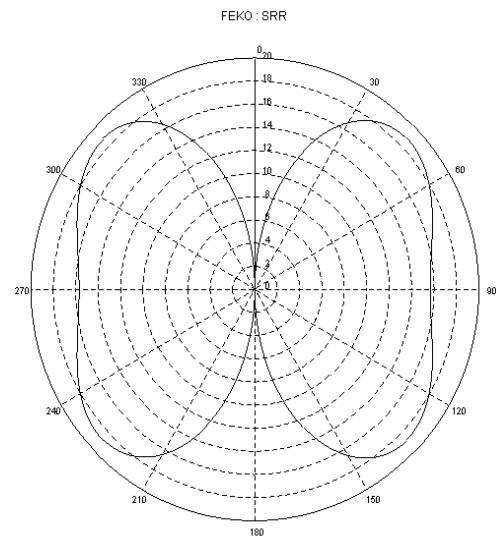
## ۶. مراجع

- [1] C. Caloz and T. Itoh, "Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications," John Wiley & Sons, Inc, Newjersi, USA, 2005.
- [2] D. R. Smith, J. B. Pendry, and M. C. K. Wiltshire, "Metamaterials and Negative Refractive Index," Science, vol. 305, pp. 788-792, 2004.
- [3] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, "Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructure," Physical review letters, vol. 76, pp. 4773-4776, 1996.
- [4] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena," IEEE Transactions Microwave Theory Technology, vol. 47, pp. 2075-2084, 1999.
- [5] Y. Oijala, P. Taskinen, and M. Järvenpää, "Surface Integral Equation Formulations for Solving Electromagnetic Scattering Problems with Iterative Methods," Radio Science, vol. 40, p. RS6002, 2005.
- [6] M. H. Amini and A. R. Mallahzadeh, "On the Analysis of Electromagnetic Susceptibility of Superconducting Microstrip Transmission Lines in Oblique Incidence," Journal of Applied Electromagnetics, vol. 9, pp. 51-54, 2021 (In Persian).
- [7] V. Greengard and L. Rokhlin, "A Fast Algorithm for Particle Simulations," Journal of computational physics, vol. 73, pp. 325-348, 1987.
- [8] V. Rokhlin, "Rapid Solution of Integral Equations of Scattering Theory in Two Dimensions," Journal of computational physics, vol. 86, pp. 414-439, 1986.
- [9] V. Rokhlin, "Diagonal Forms of Translation Operators for the Helmholtz Equation in Three Dimensions," Applied and computational harmonic analysis, vol. 1, pp. 82-93, 1993.
- [10] N. A. Gumerov and R. Duraiswami, "A Broadband



— |E<sub>φ</sub>| vs Angle theta  
XZ\_Plane (phi=0° cut) incidence angle : theta=60°, phi=0°

شکل (۱۴): میدان دورپراکنده E<sub>φ</sub> در صفحه XZ (زاویه تابش θ=۶۰° و φ=۰° درجه)



— |E<sub>φ</sub>| vs Angle theta  
YZ\_Plane (phi=90° cut) incidence angle : theta=60°, phi=0°

شکل (۱۵): میدان دورپراکنده E<sub>φ</sub> در صفحه yz (زاویه تابش θ=۶۰° و φ=۰° درجه)

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به شرح و بسط روش چند قطبی سریع یک سطحی و چند سطحی و کاربرد بسیار مفید آن در روش ممان پرداخته و به مزایای این روش‌ها اشاره شد. این الگوریتم را باید یک انقلاب در آنالیز سریع مسائل الکترومغناطیس دانست. پیچیدگی این روش از مرتبه O(NlogN) بوده و مصرف حافظه آن بسیار کم است. ساختار فراماده‌ای متشکل از سلول‌های SRR در فرکانس ۹ گیگا هرتز آنالیز و نتایج ارائه شد. برای مقایسه سرعت حل

- Theory," McGraw-Hill, Inc., New York, USA, 1941.
- [15] S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 30, pp. 409-418, 1982.
- [16] J. M. Song and W. C. Chew, "Error Analysis for the Truncation of Multipole Expansion of Vector Green's Functions," IEEE Microwave Wireless Components Letters, vol. 11, pp. 311-313, 2011.
- [17] J. D. Foley, A. Van Dam, S. K. Feiner, J. Hughes, M. McGuire, D. F. Sklar, and K. Akeley, "Computer Graphics: Principles and Practice," Addison-Wesley, Boston, USA, 1996.
- Fast Multipole Accelerated Boundary Elementmethod for the Three Dimensional Helmholtz Equation," The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 125, pp. 191-205, 2009.
- [11] C. A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics," John Wiley & Sons, Inc, Newjersi, USA, 1989.
- [12] W. C. Gibson, "The Method of Moments in Electromagnetics," Taylor & Francis Group, United Kingdom, 2008.
- [13] R. F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods," Wiley-IEEE Press, USA, 1993.
- [14] J. Stratton and O. Heaviside, "Electromagnetic