

علمی - پژوهشی

اثر کاهش عرض تیر یکسردرگیر کامپوزیت برداشت کننده انرژی

پیزوالکتریک بر توان خروجی: بررسی تجربی و تحلیلی

روح‌اله حسینی^{۱*}، محمدرضا الهامی^۲، سعید منصورى لطفعلی^۳، سید صادق مرعشی^۴

دانشگاه صنعتی قوچان

دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران

(تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۶)

چکیده

در این مقاله از ماده پیزوالکتریک سلولوزی جدیدی که بر روی یک تیر یکسردرگیر تعبیه شده، جهت برداشت انرژی از تیر استفاده شده و اثر کاهش عرض تیر در آن مورد بررسی قرار گرفته است. در کنار آن اتصال سری و موازی لایه‌های پیزوالکتریک در نظر گرفته می‌شود تا برداشت حداکثر توان از پیزوالکتریک‌ها حاصل گردد. ابتدا آزمایش تجربی بر روی یک تیر برداشت کننده انرژی با عرض ثابت صورت گرفته و جریان، ولتاژ و توان خروجی استخراج شده‌اند. سپس تیر مورد نظر از عرض به دو و سه قسمت مساوی تقسیم گشته و به صورت سری و موازی به هم متصل شده‌اند و نتایج برای هر یک از حالات به تفکیک مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در ادامه به بررسی تحلیلی اثر فرکانس بر روی کاهش عرض تیر پرداخته شده و در نهایت میزان برداشت انرژی از تیر واحد به صورت تحلیلی نیز مورد بررسی قرار گرفته و خروجی حل تحلیلی با نتایج تجربی صحت‌سنجی شده است. در کار تحلیلی انجام شده برای اولین بار اثر افزودن یک تکه پیزوالکتریک که بخشی از تیر را پوشانده با لحاظ کردن ضخامت لایه پیزوالکتریک در میزان فرکانس طبیعی و توان خروجی لحاظ شده است. نتایج بیانگر این هستند که تطابق خوبی بین داده‌های تجربی و تحلیلی وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: پیزوالکتریک سلولوزی، تیریکسردرگیر، برداشت انرژی، آزمایش تجربی، کامپوزیت برداشت انرژی

The Width Reduction Effect of a Piezoelectric Energy Harvesting Composite Beam on Output Power: An Experimental and Analytical Study

R. Hoseini¹, M. R. Elhami², S. Mansouri Lotfali³

Imam Hossein Comprehensive University

S. Sadegh Marashi⁴

Quchan University of Technology

(Received: 14/April/2021; Accepted: 07/August/2021)

ABSTRACT

In this paper, a novel cellulose piezoelectric material embedded on a cantilever beam is used to harvest energy from the structure and the effect of reducing the width of the beam is investigated. In addition, in order to obtain the maximum output power, the series and parallel connections of the piezoelectric layers are considered. First, an experimental work is carried out on a fixed-width energy scavenger beam, and the current, voltage and output power are extracted. Then the target beam is divided into two and three equal parts and connected in series and parallel, and the results are analyzed for each case separately. Next, an analytical study of the effect of frequency on the width reduction of the beam is considered. For the first time in the analytical work, the effect of adding a piece of piezoelectric layer that covers a part of the cantilever beam is considered in terms of natural frequency and output power. Finally, the amount of energy harvested from the unit beam is analyzed analytically and the analytical solution output is verified with experimental results. The results show that there is a good agreement between the analytical and experimental data.

Keywords: Cellulose Piezoelectric, Cantilever Beam, Energy Harvesting, Experimental Work, Energy Scavenging Composite

۱- استادیار (نویسنده پاسخگو): R.Hosseini.mech@gmail.com

۲- دانشیار: MEIhami@ihu.ac.ir

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد: SaeidMansouriLotfali@gmail.com

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد: S.s.marashi@gmail.com

۱- مقدمه

۱-۱- معرفی موضوع

امروزه برداشت انرژی از محیط نقش مهمی را در زندگی انسان‌ها ایفا می‌کند و این انرژی‌های نو به تدریج جایگزین انرژی‌های سنتی، مانند انرژی‌های فسیلی می‌شوند. از این رو برداشت انرژی موضوع جالبی برای محققان شده است. روش‌های متعددی برای جذب انرژی‌های نو از محیط مورد استفاده قرار گرفته که یکی از جدیدترین آن‌ها برداشت انرژی از ارتعاشات محیط با استفاده از مواد پیزوالکتریک است. این روش خیلی از محدودیت‌های روش‌های دیگر را ندارد و به راحتی می‌تواند مورد بهره‌برداری قرار گیرد. منبع تغذیه در اکثر موارد باتری‌ها هستند و با توجه به طول عمر محدودشان مشکلاتی را ایجاد خواهند کرد. از آنجا که مواد پیزوالکتریک، می‌توانند انرژی مکانیکی (ارتعاشات محیطی) را به انرژی الکتریکی تبدیل کنند، می‌توانند به عنوان منبع تغذیه در دستگاه‌ها استفاده شوند. هدف اصلی بازیابی انرژی‌هایی است که مصرف می‌شوند، برای مثال با اعمال کرنش حاصل از پدیده‌روی به مواد پیزوالکتریک، می‌توان از آنها انرژی برداشت کرد [۱-۳].

۱-۲- پیشینه پژوهش

در حالی که پدیده پیزوالکتریک به مدت چند دهه به خوبی شناخته شده، روش‌ها و ترفندهای گوناگونی جهت بهینه‌سازی برداشت انرژی از این مواد به کار رفته است که در ادامه برخی از آنها را بررسی می‌کنیم. یکی مهم‌ترین عوامل بهینه‌سازی برداشت انرژی، مواد پیزوالکتریک می‌باشد برای مثال مقایسه پیزوسرامیک PZT4 و PZT5^۱ در یک سامانه برداشت انرژی توسط امینی و همکاران انجام شده است [۴] و آقای سوائی و همکاران به بهره‌وری ماده پیزوالکتریک PVDF^۲ پرداخته‌اند [۵]. از ساز و کارهای برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک می‌توان به تیر دو سرگیردار اشاره نمود که آقایان حشمتی و امینی به این مورد پرداخته‌اند و از این ساز و کار در صنایع حمل و نقل ریلی برای برداشت انرژی نیز استفاده می‌شود [۶]. آقای شیلونگ سون از ساز و کار ترکیبی تیر یکسرگیردار و دو

سرگیردار استفاده کرده است [۷]. آقای ون هسیانگ و همکاران بر روی برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک با ساز و کار چرخشی پرداخته‌اند [۸]. اما در میان ساز و کارهای مختلف معمول‌ترین و مرسوم‌ترین ساز و کار تیر یکسرگیردار می‌باشد. تیر یکسرگیردار دارای ساز و کار ساده‌تری می‌باشد و از طرفی تحت تحریک یکسان، می‌تواند ارتعاشات بیشتری داشته باشد [۹]. عامل بعدی که در بهینه‌سازی برداشت انرژی از پیزوالکتریک‌ها تأثیرگذار است، شکل تیر می‌باشد که آقایان حسینی و حامدی برداشت انرژی از تیرهای مثلثی و دوزنقه‌ای را بررسی نموده‌اند [۱۰-۱۲].

۱-۳- نوآوری کار حاضر

با توجه به مطالعات پیشین که بر روی بهینه‌سازی برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک صورت گرفته است به این نکته کمتر توجه شده است که آیا کاهش عرض تیر تأثیری بر روی برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک خواهد داشت و اگر این تیرهای برداشت انرژی با یکدیگر سری یا موازی شوند چه تغییری در توان خروجی حاصل خواهد شد. در پژوهش‌های قبلی، با توجه به قابل صرف‌نظر بودن ضخامت لایه پیزوالکتریک نسبت به زیرلایه و از طرفی پیچیدگی معادلات، در روابط تحلیلی از ضخامت لایه پیزوالکتریک در معادلات صرف‌نظر شده و معادلات استخراج شدند و تاکنون این معادلات با فرض قابل صرف‌نظر نبودن ضخامت لایه پیزوالکتریک، ارائه نشده است. اتفاقاً در بسیاری از پیزوسرامیک‌ها، ضخامت لایه پیزوالکتریک قابل صرف‌نظر نیست و این ضخامت تأثیر قابل توجهی می‌تواند بر معادلات تحلیلی بگذارد. لذا مهم‌ترین نوآوری کار حاضر به این موضوع اختصاص داده شد و این معادلات بدون هیچ فرض ساده‌کننده‌ای استخراج شدند.

این مقاله در ابتدا به بررسی تجربی یک تیر یکسرگیردار حامل لایه پیزوالکتریک سلولوزی با تحریک هارمونیک پایه (انتهای گیردار) پرداخته و در ادامه به جای یک تیر حامل پیزوالکتریک از دو تیر با نصف عرض اندازه اصلی که با هم سری و موازی شده‌اند استفاده شده و آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همین روند برای سه تیر برداشت‌کننده انرژی ادامه یافته و در انتها با حل تحلیلی به بررسی تأثیر کاهش عرض بر روی فرکانس طبیعی تیر پرداخته شده است و

^۱ Lead Zirconate Titanate^۲ Polyvinylidene fluoride

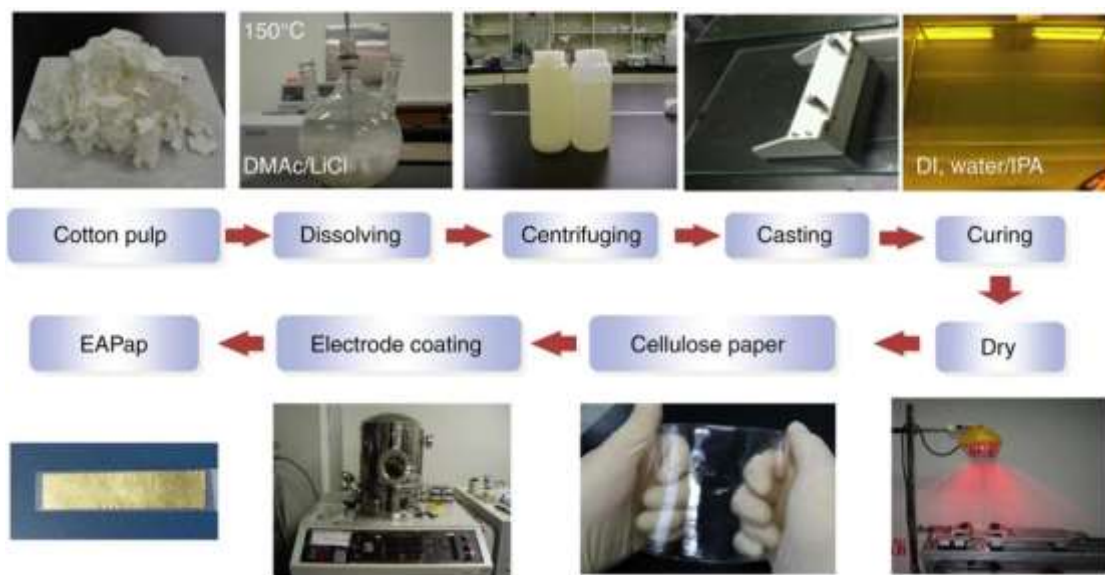
شیشه (به‌روش تیغه دکتر^۱) یک لایه یکنواخت به‌دست می‌آید. در ادامه با حلال‌های آبی دی یونیزه شده و ایزوپروپیل اقدام به رفع باقی‌مانده آندلیتیم می‌کند. زمانی که لایه، کمی رطوبت دارد تا ۱/۵ برابر طول اصلی کشیده شده و در مقابل اشعه مادون قرمز به مدت یک ساعت قرار می‌گیرد. لایه به‌دست‌آمده در حد میکرو با زاویه ۴۵ درجه نسبت به جهت کشش برش می‌خورد و در نهایت دو طرف لایه نازک پیزوالکتریک حاصله با لایه‌های آلومینیومی به‌عنوان الکترود برای جای‌گذاری در مدار نشانده شده و در انتها یک لایه شفاف جهت جلوگیری از آسیب‌دیدگی و اتصال کوتاه بر روی آن کشیده می‌شود [۱۴-۱۶]. مراحل ساخت لایه پیزوالکتریک در شکل ۱ به‌طور مختصر ذکر شده است.

برداشت انرژی از تیر یکسردرگیری که انتهای ثابت آن حرکت هارمونیک دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد تا صحت آزمایش تجربی اثبات گردد.

۲- آزمایش تجربی

۱-۲- ماده پیزوالکتریک سلولوزی

ماده پیزوالکتریک EAPap^۱ سلولوزی از کتان با درجه پلیمریزاسیون ۴۵۰۰ سانتی‌گراد ساخته شده، که بعد از حل شدن در ان-دیمتیل استالید بی‌آب با نسبت خاصی از کلرید لیتیم در دمای (۱۰۰ تا ۱۵۰) درجه سانتی‌گراد حاصل می‌گردد [۱۳]. بعد از همزنی یک مخلوط همگن و کامل حاصل می‌شود که این محلول، بسیار چسبناک و شفاف می‌باشد و در نهایت با ریخته‌گری نواری بر روی



شکل (۱): وسایل و مواد آزمایشگاهی مراحل ساخت تولید لایه پیزوالکتریک EAPap [۱۷]

مستطیلی حاصل گردد. آزمایش بر روی تیری به عرض ۵ cm و طول ۱۵ cm و ضخامت ۱ mm که سرگیردار آن با نیرویی هارمونیک تحریک می‌گردد، صورت گرفته است. در مرحله دوم تیر واحد از عرض نصف می‌شود و هر دو تیر حاصله تحت همان شرایط تیر واحد (مرحله اول آزمایش)، یک بار با یکدیگر سری و بار دیگر موازی می‌شوند و همین روند نیز برای سه تیر برداشت انرژی یکسان تکرار می‌شود. شکل ۲ تیرهای مورد آزمایش را نمایش می‌دهد.

۲-۲- ساخت تیر یکسردرگیر حامل لایه پیزوالکتریک

تحقیقاتی که جهت برداشت انرژی از تیر حامل پیزوالکتریک صورت گرفته، نشان‌دهنده این است که هرچه تیر مرتعش عرض کمتری داشته باشد ظرفیت انرژی قابل برداشت از آن افزایش خواهد یافت. زیرا با کاهش عرض تیر میرایی نیز کاهش می‌یابد و در نتیجه توان خروجی بالا می‌رود [۱۸]. حال در این مقاله از این ایده استفاده شده تا بهینه‌سازی برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک در تیرهای

^۱ Electro Active Peaper ap

ن (ع) داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (License Commons) مانس، از آدرس <https://maj.ihu.ac.ir> دیدن فرمائید.

شیکر الکترومغناطیسی Eliezer HEV-50 با ولتاژ ورودی ۱۰۰ میلی ولت تحریک می‌شود که این تحریک باید هدفمند و کنترل شده باشد. هدفمند از این جهت که برداشت انرژی در فرکانس تشدید باید رخ دهد تا بیشینه انرژی را به همراه داشته باشد و کنترل شده به جهت صحت آزمایش می‌باشد. با توجه به اینکه فرکانس طبیعی تیر مورد نظر ۳۶ Hz می‌باشد، تحریک شیکر جهت برداشت انرژی بیشینه نیز باید در فرکانس ۳۶ Hz رخ دهد. سیگنال ژنراتور Agilent 33220A و تقویت‌کننده EA157 Elizer، این بازه فرکانسی را برای شیکر کنترل شده می‌کند. برای اطمینان از فرآیند آزمایش از یک شتاب‌سنج جهت پایش جابه‌جایی هارمونیک استفاده می‌شود و از پتانسیومتری که با دو الکتروود لایه پیزوالکتریک سری است، برای اندازه‌گیری توان خروجی در آن استفاده می‌شود و برای اندازه‌گیری جریان در مدار از یک پیکوآمتر Keithley 6485 و همچنین از آنالایزر Bruel & Kjaer 35360B-030 برای اندازه‌گیری ولتاژ خروجی استفاده می‌گردد. امپدانس لایه پیزوالکتریک با LCR متر HP4282A به نسبت فرکانس‌های مختلف اندازه‌گیری می‌شود [۱۴ و ۱۹]. تمامی این دستگاه‌ها و نحوه چیدمانشان در شکل ۳ قابل مشاهده است.

۲-۵- نتایج آزمایش تجربی

از آنجا که انتهای گیردار تیر با حرکتی هارمونیک تحریک می‌شود این تغییرات هارمونیک در قالب کرنش هارمونیک به لایه پیزوالکتریک می‌رسد و در ادامه، ولتاژ و جریان و توان هارمونیک را به همراه دارد که جدول ۲ اختلاف بیشینه و کمینه ولتاژ، جریان و توان را بعد از انجام پنج مرحله آزمایش تجربی با تکرار قابل قبول نمایش می‌دهد.

جدول (۲): ولتاژ، جریان و توان حاصل پنج مرحله آزمایش

تجربی				
تیر واحد	دو تیر	دو تیر	سه تیر	سه تیر
با عرض ۵۰mm	عرض با عرض ۲۵mm	سری با عرض ۱۶mm	سری با عرض ۱۶mm	موازی با عرض ۱۶mm
توان nW	۰/۹۰۷	۱/۲۸۳	۱/۰۰۱	۱/۴۲۵
ولتاژ V	۰/۰۲۵۶	۰/۰۴	۰/۱۷۳	۰/۰۶۵

2 Doctor Blade



شکل (۲): تیرهای مورد آزمایش تجربی در پنج مرحله

۲-۳- آنالیز مودال تیر یکسر گیردار حامل لایه پیزوالکتریک

یکی از مهم‌ترین عوامل بهینه‌سازی برداشت انرژی، تحریک در فرکانس طبیعی می‌باشد. زیرا در این حالت بیشترین جابه‌جایی رخ داده و در نتیجه بیشترین انرژی از لایه پیزوالکتریک دریافت خواهد شد. بنابراین باید ابتدا فرکانس طبیعی تیرهای مورد نظر را به دست آورده و در ادامه تحریک در این فرکانس به تیرها اعمال شود. برای این کار یک حس‌گر شتاب‌سنج در انتهای آزاد تیر یکسرگیردار قرار داده می‌شود و با چکش مودال ضربه‌ای به محلی مشخص از تیر وارد می‌گردد و با استفاده از نرم‌افزار Me Scoup که تنظیمات آزمایش روی آن اعمال شده است فرکانس طبیعی با چندین بار تکرار استخراج می‌گردد. جدول ۱ نشان‌دهنده فرکانس طبیعی میانگین در پنج مرحله آزمایش می‌باشد.

جدول (۱): نتایج حاصل از آزمایش تجربی برای به دست

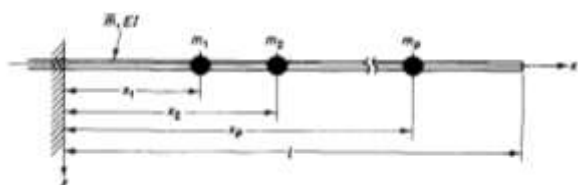
آوردن فرکانس طبیعی تیر یکسرگیردار حامل لایه

پیزوالکتریک

عرض تیر یکسرگیردار حامل لایه پیزوالکتریک (mm)			
۱۶/۶	۲۵	۵۰	فرکانس طبیعی اول تیر یکسرگیردار (Hz)
۳۵/۸	۳۵/۲	۳۶/۵	

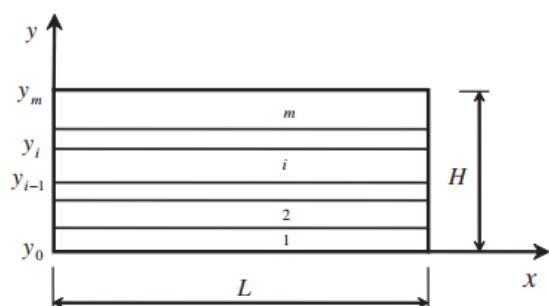
۲-۴- انجام آزمایش تجربی

نحوه و شرایط آزمایش از مهم‌ترین اصول تحلیل تجربی به شمار می‌آید، به‌گونه‌ای که اگر از دستگاهی مناسب با تنظیمات مدنظر در شرایط آزمایش استفاده نشود، خطای زیادی را شامل می‌شود. برای انجام آزمایش ابتدا



شکل (۳): محاسبه فرکانس طبیعی به روش جرم متمرکز [۱۹]

حال اگر لایه پیزوالکتریک بلندی را روی تیر فرض کنیم اثر آن در مرکز ثقل لایه فرض می‌گردد که روش مناسبی برای محاسبه فرکانس طبیعی نمی‌باشد. روش‌های دیگری نیز برای محاسبه فرکانس طبیعی وجود دارند که در تیرهای چندلایه به کار می‌روند. روش کار بدین گونه بوده که از یک سری ضرایب تصحیح جهت محاسبه فرکانس کلی تیر چندلایه مطابق شکل ۵ استفاده می‌گردد [۲۰ و ۲۱]. این روش برای حالاتی است که لایه‌ها طول یکسانی داشته باشند، قابل استفاده می‌باشد. در حالی که در این مدل‌سازی پیزوالکتریک بخشی از تیر را می‌پوشاند و این روش نیز برای محاسبه فرکانس طبیعی کارآمد نمی‌باشد.



شکل (۴): تیر چندلایه جهت محاسبه فرکانس طبیعی [۲۰ و ۲۱]

۳-۱- فرکانس طبیعی و شکل مد

ابتدا انتهای گیردار تیر را مبدأ مختصات قرار داده و شکل به سه قسمت تقسیم می‌گردد. قسمت اول از نقطه صفر تیر (مبدأ تیر) شروع شده و تا ابتدای لایه پیزوالکتریک ادامه می‌یابد. قسمت دوم مربوط به لایه پیزوالکتریک می‌باشد و قسمت سوم از انتهای لایه پیزوالکتریک شروع شده و تا انتهای تیر ادامه می‌یابد. شکل ۶ قسمت‌های اول و دوم و سوم تیر را به همراه پارامترهای به کار رفته نشان می‌دهد.

۳- حل تحلیلی

در قسمت قبل با آزمایش تجربی به بررسی و بهینه‌سازی برخی از عواملی که در برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک اثرگذار بود پرداخته شد. حال در این بخش به حل تحلیلی تیر یکسرگیردار حامل لایه پیزوالکتریک پرداخته می‌شود. ابتدا حل تحلیلی با در نظر گرفتن اثر ضخامت لایه پیزوالکتریک استخراج می‌گردد. سپس اثر کاهش عرض تیر یکسرگیردار بر روی فرکانس طبیعی تیر حامل لایه پیزوالکتریک مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه دامنه ولتاژ و جریان و توان الکتریکی در فرکانس تشدید تیر واحد محاسبه می‌شود. برای محاسبه فرکانس طبیعی در حل تحلیلی به دلیل ضخامت بسیار ناچیز لایه پیزوالکتریک اغلب از اثر آن صرف‌نظر شده است. روش‌ها و فن‌های گوناگونی در محاسبه فرکانس طبیعی تیر یکسرگیردار وجود دارد. مدل‌سازی ریاضی تیر یکسرگیردار به وسیله یک معادله چهار عضوی صورت می‌پذیرد که با رسم این معادله در بازه طول تیر شکل مود به دست می‌آید و با توجه به شروط مرزی تیر یکسرگیردار این ثابت‌ها محاسبه شده و در ادامه شکل مود مورد نظر رسم می‌شود. در انتها با جای‌گذاری ثابت‌های محاسبه شده، فرکانس طبیعی محاسبه می‌شود. به‌عنوان مثال آقای جانگ‌شانگ‌یو جرمی را معادل جرم لایه نازک بر روی تیر در مکان مرکز ثقل آن فرض کرده و با توجه به این فرض شروط مرزی را به دست آورده و در نهایت فرکانس طبیعی را محاسبه می‌کند که در شکل ۴ مشاهده می‌شود [۱۹]. در این روش بنا به شرایط مساله می‌توان چندین جرم را روی تیر تقسیم نموده تا به مدل‌سازی دقیق‌تری از تیر رسید. با توجه به شروط مرزی تیر یکسرگیردار، این ثابت‌ها محاسبه شده و در ادامه شکل مود مورد نظر رسم می‌شود. در انتها با جای‌گذاری ثابت‌های محاسبه شده فرکانس طبیعی محاسبه می‌شود.

۲-۲- محاسبه ولتاژ جریان و توان خروجی از پیزوالکتریک

در ادامه حل تحلیلی دامنه ولتاژ و جریان و توان تیر یکسرگیردار حامل لایه پیزوالکتریکی که انتهای ثابت آن حرکت هارمونیک دارد، بررسی می‌گردد. معادله حاکم بر حرکت تیر یکسرگیردار تحت تحریک از پایه [۲۳] عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial t^2} = -m \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

در این رابطه M ممان داخلی تیر، I ممان اینرسی، w_b جابه‌جایی تیر نسبت به پایه، w_{rel} جابه‌جایی کلی تیر، m جرم بر واحد طول می‌باشد و از معادله (۳) محاسبه می‌گردد، c_a و c_s ضرایب میرایی تیر یکسرگیردار بوده که در آزمایش تجربی مقدار آنها 0.06875 می‌باشد.

ممان خمشی در معادله (۷) به صورت $M(x,t) = -\int_{h_a}^{h_b} T_1^s b y dy - \int_{h_b}^{h_c} T_1^p b y dy$ تعریف می‌شود که در آن $T_1^s = Y_s S_1^s$ و $T_1^p = Y_p (S_1^p - d E_3)$ به ترتیب فرمول‌های تنش وارده بر تیر پایه و لایه پیزوالکتریک می‌باشند با در نظر گرفتن رابطه کرنش خمشی $\epsilon = -y \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2}$ در این معادلات ممان خمشی مطابق معادله (۸) محاسبه می‌گردد.

$$M(x,t) = \int_{h_a}^{h_b} Y_s b \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} y^2 dy + \int_{h_b}^{h_c} Y_p b \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} y^2 dy - \int_{h_b}^{h_c} v(t) Y_p b \frac{d_{31}}{h_p} y dy \quad (8)$$

با در نظر گرفتن $E_3(t) = \frac{-v(t)}{h_p}$ و

$$g = -\frac{Y_p d_{31} b}{2h_p} (h_c^2 - h_b^2) \quad \text{و} \quad YI = b \left[\frac{Y_s (h_b^3 - h_a^3) + Y_p (h_c^3 - h_b^3)}{3} \right]$$

و در معادله (۸) ممان خمشی به صورت

$$M(x,t) = YI \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} + g v(t)$$

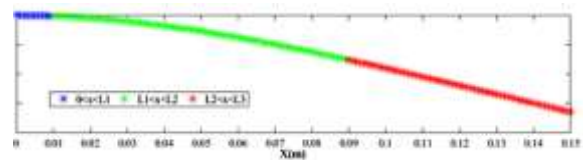
نوشته می‌شود.

که همان $228/2873 \text{ rad/s}$ است. محاسبه می‌گردد. جدول ۳ فرکانس طبیعی اول تیر یکسرگیردار با عرض‌های مختلف را در آزمایش تجربی و حل تحلیلی نشان می‌دهد. با توجه به این که در اختلافی بین نتایج تجربی و تحلیلی وجود دارد، بنابراین درصد اختلاف فرکانس طبیعی در حل تحلیلی نسبت به آزمایش تجربی در ستون آخر جدول ۳ محاسبه شده است.

جدول (۳): فرکانس طبیعی اول در حل تحلیلی و آزمایش تجربی (Hz)

درصد اختلاف	حل تحلیلی	آزمایش تجربی	فرکانس طبیعی اول تیر با عرض ۵۰ mm
۰/۴۷٪	۳۶/۳۳	۳۶/۵	فرکانس طبیعی اول تیر با عرض ۵۰ mm
۰/۳۲٪	۳۶/۳۳	۳۵/۲	فرکانس طبیعی اول تیر با عرض ۲۵ mm
۰/۴۸٪	۳۶/۳۳	۳۵/۸	فرکانس طبیعی اول تیر با عرض ۱۶/۶ mm

با جای‌گذاری β در ماتریس J و حل $J_{12 \times 12} P_{12 \times 1} = 0$ ماتریس P یا همان ضرایب ثابت معادله شکل مود به دست می‌آید و با در نظر گرفتن این ضرایب ثابت و β در معادله (۶) شکل مود به دست می‌آید. شکل ۷ شکل مود فرکانس اول تیر یکسرگیردار حامل لایه پیزوالکتریک را نمایش می‌دهد که قسمت آبی مربوط به قسمت اول تیر و قسمت سبز رنگ مختص به ناحیه پیزوالکتریک است و ناحیه قرمز رنگ برای قسمت سوم تیر می‌باشد.



شکل (۶): شکل مد اول تیر یکسرگیردار حامل پیزوالکتریک در متلب

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = - \int_{x_1}^{x_2} (d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^3 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx - \frac{\epsilon_{33}^s b l}{h_p} \frac{dv(t)}{dt}) \quad (13)$$

$$v(t) = R_i i(t) = -R_l \left[\int_{x_1}^{x_2} (d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^3 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx + \frac{\epsilon_{33}^s b l}{h_p} \frac{dv(t)}{dt}) \right] \quad (14)$$

معادله (۱۴) را می‌توان به صورت نوشت و با در نظر گرفتن جداسازی متغیرها رابطه انتگرالی معادله ولتاژ به صورت معادله (۱۶) نوشته خواهد شد.

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{h_p}{R_l \epsilon_{33}^s b L} v(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_2(x) \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (15)$$

با در نظر گرفتن حرکت هارمونیک انتهای گیردار تیر برداشت انرژی معادله (۱۵) به صورت معادله (۱۶) نوشته خواهد شد و از آنجا که اختلاف پتانسیل مربوط به قسمتی از تیر است که لایه پیزوالکتریک آن را پوشانده بنابراین مطابق معادله (۶) ϕ_2 را در معادله (۱۵) در نظر گرفته و در معادله (۱۶) $\phi_2 = - \frac{d_{31} Y_p h_{pc} h_p}{\epsilon_{33}^s L} \frac{d\phi_2(x)}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2}$ می‌باشد [۲۵].

$$\left(\frac{1+j\omega\tau_c}{\tau_c} \right) V_0 = \frac{j\omega [m\omega^2 (\gamma_r^w Y_0 + \gamma_r^\theta \theta_0) - \chi_r V_0]}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_r\omega} \quad (16)$$

با توجه به معادله (۱۶) اگر فرکانس تحریک از یک نقطه در بازه‌ای که شامل فرکانس طبیعی سامانه باشد، شروع به افزایش کند، مقادیر ولتاژ، جریان و توان با نزدیک شدن به فرکانس طبیعی سامانه و در حوالی آن نقطه افزایش می‌یابند تا زمانی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی برابر شود ($\omega = \omega_r$). لازم به ذکر است که این نقطه شامل بیشترین جابه‌جایی برای لایه پیزوالکتریک بوده و در نتیجه بیشترین مقدار را برای ولتاژ و جریان و توان خواهد

با قرار دادن ممان خمشی $M(x,t)$ در معادله (۷) رابطه کلی حرکت تیر یکسرگیردار به صورت معادله (۹) نوشته می‌شود.

$$YI \frac{\partial^4 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{rel}(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{rel}(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial t^2} + g v(t) = -m \frac{\partial^2 w_b(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial w_b(x,t)}{\partial t^2} \quad (9)$$

رابطه ساختاری مواد پیزوالکتریک است که روابط مکانیکی و الکتریکی را به هم ارتباط می‌دهد. در این رابطه، $D_3(x,t)$ جابه‌جایی الکتریکی، T تنش نرمال در جهت x و ϵ_{33}^T ضریب گذردهی در تنش ثابت می‌باشند. ضریب گذردهی در کرنش ثابت ϵ_{33}^S می‌باشد و می‌تواند توسط رابطه $(\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^T - d_{31}^2 E_3)$ جایگزین این ضریب در تنش ثابت شود تا در نهایت جابه‌جایی الکتریکی مطابق معادله (۱۰) برقرار شود.

$$D_3(x,t) = d_{31} Y_p S_1(x,t) - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \quad (10)$$

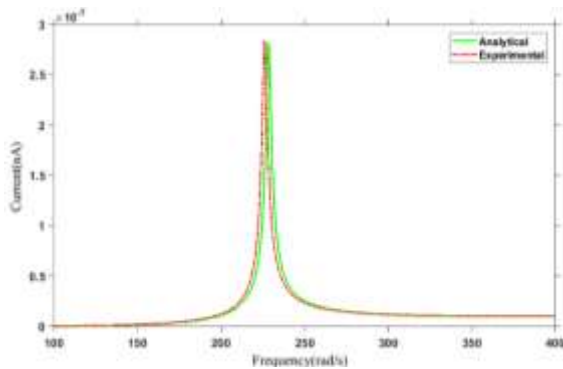
با قرار دادن $S_1(x,t) = -h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2}$ در معادله (۱۰) رابطه نهایی جابه‌جایی الکتریکی $(D_3(x,t))$ به دست می‌آید.

$$D_3(x,t) = -d_{31} Y_p h_{pc} \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} - \epsilon_{33}^S \frac{v(t)}{h_p} \quad (11)$$

حال با انتگرال‌گیری از جابه‌جایی الکتریکی در طول سطح پیزوالکتریک، بار الکتریکی خروجی از پیزوالکتریک $(q(t))$ به دست می‌آید [۲۴]:

$$q(t) = \int_A \vec{D} \cdot \vec{n} dA = - \int_{x_1}^{x_2} (d_{31} Y_p h_{pc} b \frac{\partial^2 w_{rel}(x,t)}{\partial x^2} + \epsilon_{33}^S b \frac{v(t)}{h_p}) dx \quad (12)$$

در ادامه با مشتق‌گیری از بار الکتریکی خروجی برحسب زمان مطابق معادله (۱۳) جریان الکتریکی خروجی $(i(t))$ به دست می‌آید و با ضرب این معادله در مقدار مقاومتی که با دو قطب لایه پیزوالکتریک موازی شده، ولتاژ خروجی $(v(t))$ محاسبه خواهد شد.

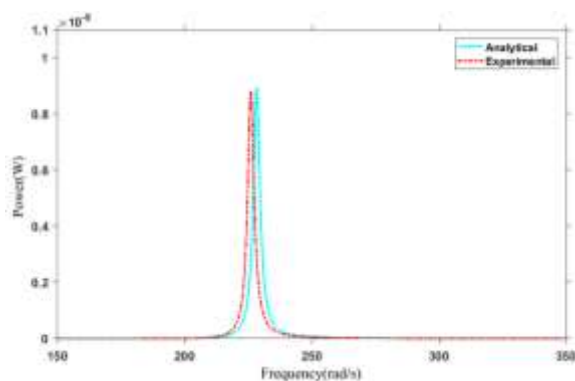


شکل (۸): نمودار پاسخ فرکانسی جریان و مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی

پاسخ فرکانسی برای محاسبه توان در حل تحلیلی از معادله (۱۹) محاسبه می‌شود [۲۶].

$$P_0 = I_{rms}^2 \times R_L = \left(\frac{0.354 \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j m \omega^3 \phi_1 \gamma_1 Y_0}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2\xi \omega \omega_1}}{R_l \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j \phi_1 \omega \phi_1}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2\xi \omega \omega_1} + \frac{1 + j \omega \tau_c}{\tau_c} \right)} \right)^2 \times R_L \quad (19)$$

پاسخ فرکانسی بیشینه توان خروجی از تیر واحد ۰/۸۹۴ nW می‌باشد و شکل ۱۰ نمودار پاسخ فرکانسی توان الکتریکی را در آزمایش تجربی و حل تحلیلی نمایش می‌دهد.



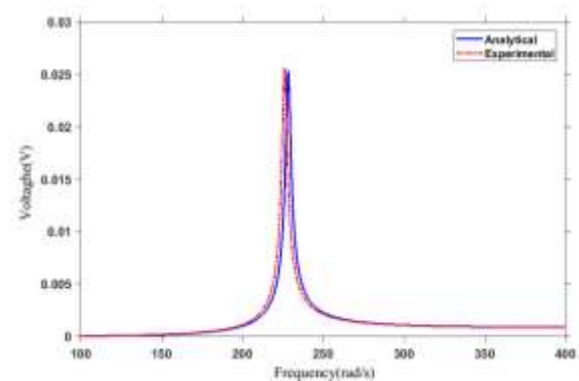
شکل (۹): نمودار پاسخ فرکانسی توان خروجی و مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی

همان‌طور که در بالا اشاره گردید، در نزدیکی فرکانس طبیعی تیر، تشدید رخ داده و بیشترین جابه‌جایی تیر و لذا

شد. در ادامه نیز با دور شدن از فرکانس تحریک، مقادیر ولتاژ، جریان و توان خروجی به شدت کاهش می‌یابند. در شکل‌های (۸)، (۹) و (۱۰) این تغییرات به‌خوبی نمایش داده شده‌اند. پاسخ فرکانسی برای محاسبه ولتاژ در حل تحلیلی از معادله (۱۷) محاسبه می‌شود [۹].

$$V_0 = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j m \omega^3 \phi_1 \gamma_1 Y_0}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2\xi \omega \omega_1}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j \phi_1 \omega \phi_1}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2\xi \omega \omega_1} + \frac{1 + j \omega \tau_c}{\tau_c}} \quad (17)$$

بیشینه ولتاژ خروجی از تیر واحد ۰/۰۲۵۳۷ می‌باشد، شکل ۸ نمودار پاسخ فرکانسی ولتاژ را در آزمایش تجربی و حل تحلیلی نشان می‌دهد.



شکل (۷): نمودار پاسخ فرکانسی ولتاژ و مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی

پاسخ فرکانسی برای محاسبه جریان در حل تحلیلی از معادله (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$I_0 = \frac{1}{R_l} \left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j m \omega^3 \phi_1 \gamma_1 Y_0}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2\xi \omega \omega_1}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{j \phi_1 \omega \phi_1}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2\xi \omega \omega_1} + \frac{1 + j \omega \tau_c}{\tau_c}} \right) \quad (18)$$

پاسخ فرکانسی بیشینه جریان خروجی از تیر واحد ۲۹۵ nA می‌باشد و شکل ۹ نمودار پاسخ فرکانسی جریان را در آزمایش تجربی و حل تحلیلی نمایش می‌دهد.

افزایش خواهد یافت. این امر به دلیل کاهش میرایی تیرهای با عرض کمتر نسبت به تیر اصلی می باشد.

۵- مراجع

- Hosseini, R., Zargar, O., and Hamed, M., "Improving Power Density of Piezoelectric Vibration-Based Energy Scavengers," *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 10, No. 1, pp. 98-109, 2018.
- Pan, H., Qi, L., Zhang, Z., and Yan, J., "Kinetic energy harvesting technologies for applications in land transportation: A comprehensive review," *Applied Energy*, Vol. 286, p. 116518, 2021.
- Song, Y., Shi, Z., Hu, G.-H., Xiong, C., Isogai, A., and Yang, Q., "Recent advances in cellulose-based piezoelectric and triboelectric nanogenerators for energy harvesting: a review," *Journal of Materials Chemistry A*, Vol. 9, No. 4, pp. 1910-1937, 2021.
- Amini, Y., Fatehi, P., Heshmati, M., and Parandvar, H. J. C. S., "Time domain and frequency domain analysis of functionally graded piezoelectric harvesters subjected to random vibration: Finite element modeling," Vol. 136, pp. 384-393, 2016.
- Ippili, S. et al., "An Eco-friendly Flexible Piezoelectric Energy Harvester That Delivers High Output Performance is Based on Lead-Free MASnI3 Films and MASnI3-PVDF Composite Films," 2019.
- Heshmati, M. and Amini, Y. J. A. M. M., "A comprehensive study on the functionally graded piezoelectric energy harvesting from vibrations of a graded beam under travelling multi-oscillators", Vol. 66, pp. 344-361, 2019.
- Sun, S., Peter, W. T. J. M. S., and Processing, S., "Modeling of a horizontal asymmetric U-shaped vibration-based piezoelectric energy harvester (U-VPEH)," Vol. 114, pp. 467-485, 2019.
- Wu, W.-H., Kuo, K.-C., Lin, Y.-H., and Tsai, Y.-C. J. M. E., "Non-contact magnetic cantilever-type piezoelectric energy harvester for rotational mechanism," Vol. 191, pp. 16-19, 2018.
- Hosseini, R., Hamed, M., Ebrahimi Mamaghani, A., Kim, H. C., Kim, J., and Dayou, J., "Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed

بیشترین ولتاژ، جریان و توان خروجی را خواهیم داشت. با این حال توان خروجی در نزدیکی فرکانس طبیعی به شدت بالاست و با فاصله گرفتن از این فرکانس، افت محسوسی پیدا می کند. لذا باید با روش های مختلف افزایش پهنای باند فرکانسی، یک طراحی کاربردی برای سازه مدنظر ارائه نمود. همان طور که ملاحظه می شود نتایج تحلیلی دقت خوبی دارند و به خوبی با نتایج تجربی سازگار هستند و لذا پژوهش انجام شده از اعتبار خوبی برخوردار می باشد.

۴- نتیجه گیری

داده های به دست آمده از آنالیز مودال در آزمایش تجربی در کنار نتیجه به دست آمده از حل تحلیلی هر دو بیانگر این امر هستند که فرکانس طبیعی تیر یکسردرگیر مستطیلی به عرض آن وابسته نمی باشد. علاوه بر این با کاهش عرض، فرکانس طبیعی ثابت می ماند و میرایی تیر نیز کاهش می یابد و این خود عامل مناسبی برای افزایش دامنه ارتعاشات می باشد، یعنی کاهش عرض تیر کاهش میرایی در برابر ارتعاشات را به همراه دارد و در نتیجه اتلاف انرژی کاهش و برداشت انرژی افزایش می یابد. برای کاهش عرض بهترین حالت تقسیم بندی عرض تیر به چند قسمت مساوی می باشد و از آنجا که این تیرها حامل لایه پیزوالکتریک می باشند و هر کدام به عنوان یک برداشت کننده انرژی عمل می کنند، می توان از تعریف مدار معادل برای هر تیر بهره برد. پس از تقسیم بندی تیر به چند قسمت، هر کدام از آنها را با یکدیگر سری و موازی کرده تا علاوه بر کاهش میرایی، اثر نحوه چیدمان تیرهای برداشت کننده انرژی در مدار نیز بررسی گردد. در این مقاله برای اولین بار روابط تحلیلی برای تیر برداشت کننده انرژی با لایه پیزوالکتریک با در نظر گرفتن ضخامت لایه پیزوالکتریک در روابط، استخراج شده است. لذا می توان از این روابط حتی در سایر پژوهش های مشابه که ضخامت لایه پیزوالکتریک قابل صرف نظر کردن نمی باشد، بهره برد. با تقسیم بندی تیر به دو قسمت در حالت موازی، توان الکتریکی نسبت به تیر اصلی ۱۰٪ افزایش یافته در حالی که با سری کردن این دو تیر توان الکتریکی خروجی ۴۱٪ افزایش یافته است. در مرحله بعد با تقسیم بندی عرض تیر به سه قسمت و چیدمان موازی آنها توان الکتریکی خروجی نسبت به تیر اصلی ۵۷٪ افزایش یافته که با سری کردن این سه تیر توان خروجی ۶۱٪

18. Hosseini, R. and Hamed, M., "An Investigation into Width Reduction Effect on the Output of Piezoelectric Cantilever Energy Harvester Using FEM," in Proc. of 5th Conference on Emerging Trends in Energy Conservation, 2016 .
19. Abas, Z., Kim, H. S., Zhai, L., and Kim, J., "Experimental study of vibrational energy harvesting using Electro-Active paper," International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, Vol. 16, No. 6, pp. 1187-1193, 2015.
20. Chen, W., Lv, C., and Bian, Z. J. C. S., "Free vibration analysis of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature," Vol. 63, No. 3-4 ,pp. 417-425, 2004.
21. Banerjee, J. J. C. and structures, "Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method," Vol. 81, No. 18-19, pp. 1915-1922, 2003.
22. Hosseini, R. and Hamed, M., "Study of the resonant frequency of unimorph triangular V-shaped piezoelectric cantilever energy harvester," International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology, Vol. 8, No. 4, 2015.
23. Erturk, A., Inman, D. J. J. J. o. I. M. S., and Structures, "On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters," Vol. 19, No. 11, pp. 1311-1325, 2008.
24. Erturk, A., Tarazaga, P. A., Farmer, J. R., Inman, D. J. J. J. o. V., and Acoustics, "Effect of strain nodes and electrode configuration on piezoelectric energy harvesting from cantilevered beams," Vol. 131, No. 1, p. 011010, 2009.
25. Franco, V., Varoto, P. J. M. S., and Processing, S., "Parameter uncertainties in the design and optimization of cantilever piezoelectric energy harvesters," Vol. 93, pp. 593-609, 2017.
26. Hosseini, R. et al., "Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution," Vol. 8, No. 2-3, pp. 110-124, 2017.
- parameter solution," International Journal of Smart and Nano Materials, Vol. 8, No. 2-3, pp. 110-124, 2017.
10. Hosseini, R. and Hamed, M. J. M .T., "An investigation into resonant frequency of trapezoidal V-shaped cantilever piezoelectric energy harvester," Vol. 22, No. 5, pp. 1127-1134, 2016.
11. Hosseini, R., Hamed, M. J. J. o. M., and Microengineering, "Improvements in energy harvesting capabilities by using different shapes of piezoelectric bimorphs," Vol. 25, No. 12, p. 125008, 2015.
12. Hosseini, R., Hamed, M. J. I. J. o. A. D., and Technology, M., "Study of the resonant frequency of unimorph triangular V-shaped piezoelectric cantilever energy harvester," Vol. 8, No. 4, 2015.
13. John, A., Mahadeva, S. K., and Kim, J., "The preparation, characterization and actuation behavior of polyaniline and cellulose blended electro-active paper," Smart Materials and Structures, Vol. 19, No. 4, 2010.
14. Hosseini, R., Ebrahimi, M. A., And Nouri, M., "An Experimental Investigation into Width Reduction Effect on the Efficiency of Piezopolymer Vibration Energy Harvester," 2017.
15. Zhai, L., Kang, B.-W., Kim, J.-H., Kim, J., Abas, Z., and Kim, H. S., "Electrode effect on the cellulose piezo-paper energy harvester," in Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD): International Society for Optics and Photonics, Vol. 8687, 2013, p. 86870R .
16. Yun, G.-Y., Yun, K.-J., Kim, J.-H .and Kim, J., "Electrical and mechanical characterization of nanoscale-layered cellulose-based electro-active paper," Journal of nanoscience and nanotechnology, Vol. 11, No. 1, pp. 570-573, 2011.
17. Kim, J., Mun, S., Ko, H.-U., Zhai, L., Min, S.-K., and Kim, H. C., "A Comprehensive Review of Electroactive Paper Actuators," in Ionic Polymer Metal Composites (IPMCs), pp. 398-422, 2015.

فهرست علائم

ولتاژ	V	میدان الکتریکی	D
توان	P	ضریب پیزوالکتریک	d_{31}
عرض	w	ضخامت	h
جابه‌جایی تیر نسبت به پایه	w_{rel}	ممان اینرسی	I
جابه‌جایی پایه تیر	Y_0	جریان	I_0
تابع زمانی	η_r	طول	l
تابع شکل مد	ϕ_r	جرم	m
چگالی	ρ	ممان خمشی	M
فرکانس	ω	مقاومت الکتریکی	R_L
میرایی	ξ	کرنش	S
		تنش	T

پیوست

$$\mathbf{J}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin \beta l_1 & \cos \beta l_1 & \sinh \beta l_1 & \cosh \beta l_1 & -\sin \alpha_2 \beta l_1 & -\cos \alpha_2 \beta l_1 \\
 \cos \beta l_1 & -\sin \beta l_1 & \cosh \beta l_1 & \sinh \beta l_1 & -\alpha_2 \cos \alpha_2 \beta l_1 & \alpha_2 \sin \alpha_2 \beta l_1 \\
 -\gamma_1 \sin \beta l_1 & -\gamma_1 \cos \beta l_1 & \gamma_1 \sinh \beta l_1 & \gamma_1 \cosh \beta l_1 & \alpha_2^2 \sin \alpha_2 \beta l_1 & \alpha_2^2 \cos \alpha_2 \beta l_1 \\
 -\gamma_1 \cos \beta l_1 & \gamma_1 \sin \beta l_1 & \gamma_1 \cosh \beta l_1 & \gamma_1 \sinh \beta l_1 & \alpha_2^3 \cos \alpha_2 \beta l_1 & -\alpha_2^3 \sin \alpha_2 \beta l_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_2 \beta l_2 & \cos \alpha_2 \beta l_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \cos \alpha_2 \beta l_2 & -\alpha_2 \sin \alpha_2 \beta l_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 \alpha_2^2 \sin \alpha_2 \beta l_2 & -\gamma_2 \alpha_2^2 \cos \alpha_2 \beta l_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 \alpha_2^3 \cos \alpha_2 \beta l_2 & \gamma_2 \alpha_2^3 \sin \alpha_2 \beta l_2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sinh \alpha_2 \beta l_1 & -\cosh \alpha_2 \beta l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\alpha_2 \cosh \alpha_2 \beta l_1 & -\alpha_2 \sinh \alpha_2 \beta l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\alpha_2^2 \sinh \alpha_2 \beta l_1 & -\alpha_2^2 \cosh \alpha_2 \beta l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\alpha_2^3 \cosh \alpha_2 \beta l_1 & -\alpha_2^3 \sinh \alpha_2 \beta l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sinh \alpha_2 \beta l_2 & \cosh \alpha_2 \beta l_2 & -\sin \alpha_3 \beta l_2 & -\cos \alpha_3 \beta l_2 & -\sinh \alpha_3 \beta l_2 & -\cosh \alpha_3 \beta l_2 \\
 \alpha_2 \cosh \alpha_2 \beta l_2 & \alpha_2 \sinh \alpha_2 \beta l_2 & -\alpha_3 \cos \alpha_3 \beta l_2 & \alpha_3 \sin \alpha_3 \beta l_2 & -\alpha_3 \cosh \alpha_3 \beta l_2 & -\alpha_3 \sinh \alpha_3 \beta l_2 \\
 \gamma_2 \alpha_2^2 \sinh \alpha_2 \beta l_2 & \gamma_2 \alpha_2^2 \cosh \alpha_2 \beta l_2 & \alpha_3^2 \sin \alpha_3 \beta l_2 & \alpha_3^2 \cos \alpha_3 \beta l_2 & -\alpha_3^2 \sinh \alpha_2 \beta l_2 & -\alpha_3^2 \cosh \alpha_3 \beta l_2 \\
 \gamma_2 \alpha_2^3 \cosh \alpha_2 \beta l_2 & \gamma_2 \alpha_2^3 \sinh \alpha_2 \beta l_2 & \alpha_3^3 \cos \alpha_3 \beta l_2 & -\alpha_3^3 \sin \alpha_3 \beta l_2 & -\alpha_3^3 \cosh \alpha_3 \beta l_2 & -\alpha_3^3 \sinh \alpha_3 \beta l_2 \\
 0 & 0 & -\sin \alpha_3 \beta L & -\cos \alpha_3 \beta L & \sinh \alpha_3 \beta L & \cosh \alpha_3 \beta L \\
 0 & 0 & -\cos \alpha_3 \beta L & \sin \alpha_3 \beta L & \cosh \alpha_3 \beta L & \sinh \alpha_3 \beta L
 \end{bmatrix}$$

شروط مرزی

$$\phi_1(0) = \frac{d\phi_1(0)}{dx} = 0 \quad \text{خیز و شیب در انتهای گیردار تیر}$$

$$\frac{d^2\phi_3(L)}{dx^2} = \frac{d^3\phi_3(L)}{dx^3} = 0 \quad \text{خمش و نیرو در مقطع اول}$$

$$\phi_n(l_n) = \phi_{n+1}(l_n) \quad \text{پیوستگی در هر مقطع}$$

$$\frac{d\phi_n(l_n)}{dx} = \frac{d\phi_{n+1}(l_n)}{dx} \quad \text{برابری شیب در هر مقطع}$$

$$(EI)_n \frac{d^2\phi_n(l_n)}{dx^2} = (EI)_{n+1} \frac{d^2\phi_{n+1}(l_n)}{dx^2} \quad \text{برابری نیرو در هر مقطع}$$

$$(EI)_n \frac{d^3\phi_n(l_n)}{dx^3} = (EI)_{n+1} \frac{d^3\phi_{n+1}(l_n)}{dx^3} \quad \text{برابری خمش در هر مقطع}$$