

علمی - پژوهشی

## طراحی و مقایسه کنترل پسگام فازی و کنترل مد لغزشی فازی برای کنترل سامانه‌های فروتحریک مکانیکی با دو درجه آزادی

محمد رضا سلطان پور<sup>۲</sup>سعید زارع<sup>۱</sup>

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء<sup>(ص)</sup>، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۲۰)

### چکیده

در این مقاله، دو نوع کنترل کننده برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی ارائه می‌شود. شیوه طراحی کنترل کننده‌های پیشنهادی و نحوه اثبات پایداری سامانه حلقه بسته با استفاده از راهکارهایی نظیر کنترل پسگام، کنترل مد لغزشی، منطق فازی و ترکیب آنان با جزئیات ارائه می‌گردد. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سامانه حلقه بسته با کنترل کننده‌های پیشنهادی در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، دارای پایداری مجانبی سراسری است. سپس مزایا و معایب کنترل کننده‌های پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته و در ادامه ملاک‌هایی نظیر سادگی در نحوه پیاده‌سازی عملی کنترل کننده، حجم محاسبات ورودی کنترل، نحوه تنظیم ضرایب ورودی کنترل و اندازه دامنه ورودی کنترل انتخاب شده و بر اساس آن‌ها، مقایسه بین کنترل کننده‌های پیشنهادی ارائه می‌شود. سرانجام برای بررسی عملکرد کنترل کننده‌های پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی پیاده‌سازی می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی‌ها عملکرد راهکارهای پیشنهادی را به روشنی نشان می‌دهند.

**واژه‌های کلیدی:** سامانه فروتحریک با دو درجه آزادی، عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، کنترل پسگام، کنترل مد لغزشی، سامانه فازی.

## The Design and Comparison of Backstepping Fuzzy Control and Fuzzy Sliding Mode Control for Controlling Underactuated Mechanical Systems with Two Degrees of Freedom

S. Zaare<sup>2</sup>M. R. Soltanpour<sup>1</sup>Department of Electrical Engineering,  
Khatam Al-Anbiya University, Tehran, IranDepartment of Electrical Engineering,  
Shahid Sattari Aeronautical University of Science and  
Technology, Tehran, Iran

(Received: 20/November/2020 ; Accepted: 10/March/2021)

### ABSTRACT

In this paper, two control methods are presented to control a class of underactuated systems with two degrees of freedom. The design method of the proposed controllers and how to prove the stability of the closed-loop system using solutions such as backstepping control, sliding mode control, fuzzy logic and their combinations are presented in details. Mathematical proof shows that the closed-loop system under the proposed scheme has a global asymptotic stability in the presence of structural and un-structural uncertainties. Then, the advantages and disadvantages of the proposed controls are examined and then some criteria such as simplicity in practical implementation, the control input calculations volume, the adjustment of the control input coefficients, and the amplitude of the control input are used to make comparisons between the suggested controllers. Finally, to evaluate the performance of the proposed controllers, simulations are implemented on the cart-position system with a single-link inverted pendulum. The simulation results confirm the performance of the proposed solutions.

**Keywords:** Underactuated System with two Degrees of Freedom, Structured and Un-structured uncertainties, Backstepping control, Sliding Mode Control, Fuzzy System.

۱ - استادیار: saeedzaare@miau.ac.ir

۲ - دانشیار (نویسنده مسئول): soltanpour@ssau.ac.ir

\* حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (License Commons) CC BY-NC (Creative) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://maj.ihu.ac.ir> دیدن فرمائید.

## ۱- مقدمه

به صورت فروتحریک می‌باشد. طبیعتاً راه کار دوم سازندگان را جهت طراحی‌های فروتحریک ترغیب خواهد نمود [۱ و ۲].

- در مواقعی برای کسب دیدگاه فیزیکی از نحوه کنترل سامانه‌های فروتحریک با درجات آزادی بالا، از سامانه‌های پیچیده فروتحریک با درجات آزادی کمتر نظیر سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی، سامانه گاری با پاندول معکوس دو لینکی، سامانه توپ و میله و غیره استفاده می‌شود [۵].

از آنجا که سامانه‌های فروتحریک دارای تعداد محرکه‌های کمتری هستند، بنابراین، این امر باعث کاهش سایز، وزن، مصرف انرژی و کاهش هزینه‌های اقتصادی ساخت این نوع از سامانه‌ها شده است. به همین دلیل محققین مطالعه، طراحی و کنترل این‌گونه از سامانه‌ها را از دیرباز شروع نموده‌اند [۶-۱۰].

برای کنترل سامانه‌های تحریک کامل، روش‌های کنترلی متعددی وجود دارد که دسترسی به عملکرد مطلوب در این سامانه‌ها را امکان‌پذیر نموده است. اما برای کنترل سامانه‌های فروتحریک تنها می‌توان از روش‌های کنترلی محدودی استفاده نمود و در مواردی نیز این روش‌ها قادر به کنترل سامانه خاصی بوده و نمی‌توان این روش‌ها را برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک استفاده نمود [۱۰]. به همین دلیل کنترل سامانه‌های فروتحریک، از حوزه‌های دشوار و چالش‌برانگیز در مهندسی کنترل محسوب می‌شود.

کنترل مد لغزشی، یکی از روش‌های کنترل ساختار متغیر است که از آن برای کنترل سامانه‌های غیرخطی دارای عدم قطعیت استفاده می‌شود [۱۱-۱۲]. تاکنون محققین از کنترل مد لغزشی برای کنترل سامانه‌های غیرخطی متعددی استفاده نموده‌اند و نتایج ارائه شده، موفقیت این روش کنترلی در غلبه بر عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در این سامانه‌ها را نشان می‌دهند [۱۳-۱۵]. در این روش، کنترل‌کننده با سوئیچ نمودن به موقع از ساختاری به ساختاری دیگر، متغیرهای حالت سامانه را وادار می‌نماید که به سمت سطح لغزش که تابعی از متغیرهای حالت یا خطاهای سامانه است همگرا شوند. در مراحل طراحی کنترل مد لغزشی، تابع لیاپانفی

در حوزه مهندسی کنترل به سامانه‌هایی که در آن‌ها تعداد درجات آزادی (متغیرهای مستقل بیان‌کننده ساختار سامانه) کمتر از محرک‌ها (متغیرهای ورودی) می‌باشند، سامانه‌های فروتحریک گفته می‌شود. دلایلی که باعث می‌شود یک سامانه فروتحریک باشد عبارت‌اند از:

- در بسیاری از سامانه‌ها نظیر فضاپیماها، بالگردها، موشک‌ها، زیردریایی‌ها و ربات‌های متحرک معادلات دینامیکی ذاتاً دارای ورودی‌های قابل کنترل کمتری نسبت به درجات آزادی سامانه می‌باشند؛ بنابراین آن‌ها در دسته سامانه‌های فروتحریک قرار می‌گیرند [۳-۱].

- در برخی از سامانه‌ها برای کاهش هزینه، افزایش بازدهی کنترل‌کننده و اهداف عملی دیگر، طراحی‌ها منجر به فروتحریک شدن سامانه می‌گردد. به عنوان مثال در بازوهای ماهر ربات عمدتاً لینک‌ها به صورت صلب مدل‌سازی می‌شوند. در این حالت سامانه دارای تحریک کامل است. از طرفی، در بسیاری از موارد برای افزایش بازدهی و جلوگیری از ارتعاش، لینک‌های ربات به صورت انعطاف‌پذیر در نظر گرفته می‌شوند. در این شرایط ضمن ثابت ماندن تعداد ورودی‌های کنترل، تعداد متغیرهای حالت بسته به اهداف طراحی (با توجه به تعداد قطعات تجزیه شده در هر لینک) افزایش یافته و موجب فروتحریک شدن سامانه می‌شود. نمونه دیگری از این قبیل سامانه‌ها، ماهواره دارای دو پیش‌رانه می‌باشد [۴].

- در سامانه‌های چند ورودی- چند خروجی همانند هواپیماهایی با نشست و برخاست عمودی، در بعضی از شرایط به دلیل وقوع عیب در محرکه‌ها و یا از کار افتادن آن‌ها، سامانه ناخواسته برخی از ورودی‌ها را از دست داده و به یک سامانه فروتحریک تبدیل می‌گردد. در این شرایط دو راه حل پیش‌رو است. اول اینکه جهت حفظ تعداد ورودی‌ها (محرک‌ها) سامانه به محرک‌های ثانویه (اضطراری) تجهیز شود که این مورد بسیار پرهزینه است. به علاوه در سامانه‌های ماهواره و هوافضا علاوه بر هزینه، مسئله افزایش وزن نیز به وجود خواهد آمد. دوم، طراحی و پیش‌بینی سامانه‌های کنترل

ورودی کنترل بر اساس سطوح لغزش زیرسامانه‌ها طراحی شده است. پس از آن محققین با روشی متفاوت اقدام به تجزیه زیرسامانه‌ها نموده و با استفاده از ترکیب کنترل تطبیقی و کنترل مد لغزشی، روشی برای کنترل کل سامانه ارائه نموده‌اند [۲۲-۲۳]. در روش پیشنهادی، از چندین پارامتر در تعریف سطوح لغزش زیرسامانه‌ها استفاده شده است. از آنجاکه شناسایی این پارامترها کار ساده‌ای نیست، محققین، تخمین‌گرهایی<sup>۱</sup> را برای تخمین این پارامترها معرفی نموده و باعث ارتقاء این روش کنترلی گردیدند [۲۴-۲۶]. از طرف دیگر بعضی از محققین بجای استفاده از تخمین‌گرها، از تقریب‌گرهای فازی تطبیقی<sup>۲</sup> برای طراحی سطوح لغزش زیرسامانه‌ها استفاده نموده‌اند [۲۱]. راهکارهای پیشنهادی، افق‌های جدیدی را در پیش روی محققین قرار داد و پیشرفت چشم‌گیری را در زمینه کنترل سامانه‌های مکانیکی فروتحریک به‌وجود آورد. اما پیاده‌سازی عملی کنترل‌کننده‌های پیشنهادی با مشکلات زیر روبرو است:

- تنظیم پارامترهای متعدد سطوح لغزش زیرسامانه‌ها، کار بسیار زمان‌بر و پیچیده‌ای است.
- استفاده از تخمین‌گرها و تقریب‌گرهای فازی تطبیقی برای تنظیم این پارامترها، کار را راحت‌تر می‌نماید. اما وجود این تخمین‌گرها و تقریب‌گرها باعث پیچیده شدن روند طراحی کنترل‌کننده و اثبات پایداری سامانه حلقه بسته گردیده و از طرف دیگر بار محاسباتی ورودی کنترل را افزایش می‌دهند.

در سال‌های اخیر پژوهشگران از کنترل مد لغزشی مرتبه بالا نیز، برای کنترل سامانه‌های مکانیکی فروتحریک استفاده نموده‌اند [۲۷-۲۸]. اثبات ریاضی و نتایج شبیه‌سازی‌ها، کاهش مناسب پدیده نامطلوب لرزش<sup>۳</sup> در ورودی کنترل و زمان محدود بودن پایداری سامانه حلقه بسته را نشان می‌دهند. اما واضح است که بالاتر رفتن درجه مد لغزش، کاهش دقت ردگیری کنترل‌کننده را به دنبال داشته و

ارائه می‌گردد که پایداری سامانه حلقه بسته را تضمین می‌نماید. زمانی که متغیرهای حالت سامانه به سطح لغزش می‌رسند، درجه سامانه کاهش می‌یابد و به همین دلیل سامانه حلقه بسته در برابر عدم قطعیت‌ها و اغتشاشات موجود مقاوم شده و دینامیک سامانه سریع‌تر می‌گردد [۱۶]. از آنجاکه پیاده‌سازی عملی این روش کنترلی بسیار ساده است، بنابراین، استفاده از کنترل مد لغزشی در بین محققین از جذابیت بالایی برخوردار است. تاکنون پژوهشگران از کنترل مد لغزشی، برای کنترل سامانه‌های فروتحریک استفاده نموده‌اند [۱۷-۲۰]. نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مطلوب کنترل‌کننده‌های پیشنهادی را نشان می‌دهند. اما با وجود تمامی این مزایا، راهکارهای پیشنهادی دارای معایب زیر هستند:

- کنترل مد لغزشی را برای کنترل سامانه‌هایی استفاده می‌نمایند که از یکدیگر مجزا باشند. از آنجاکه بین زیرسامانه‌های سامانه‌های فروتحریک، کوپلینگ شدیدی وجود دارد، بنابراین، استفاده از روش مد لغزشی کلاسیک، در کنترل سامانه‌های فروتحریک کار بسیار دشواری است.
- برای بر طرف نمودن مشکل فوق، محققین کنترل مد لغزشی را با روش‌های کنترلی دیگری ترکیب نموده‌اند. اما در بسیاری از موارد عملکرد کنترل پیشنهادی مناسب نبوده و از طرف دیگر نمی‌توان یک روش نظام‌مند برای ارائه تابع لیاپانف در این‌گونه از روش‌ها ارائه نمود.
- در پیاده‌سازی کنترل مد لغزشی کلاسیک، بروز لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب‌ناپذیر بوده و این پدیده احتمال وقوع پدیده تشدید را افزایش داده و عمر محرکه‌های سامانه را کاهش می‌دهد.

در مقاله [۲۱]، یک کنترل‌کننده مد لغزشی مبتنی بر مدل و چندلایه، برای پایداری سامانه دسته خاصی از سامانه‌های مکانیکی فروتحریک ارائه شده است. در روش پیشنهادی، در ابتدا برای هرکدام از زیرسامانه‌ها، سطح لغزشی تعریف می‌شود و در ادامه سطح لغزش کلی سامانه، ترکیب خطی از سطوح لغزش زیرسامانه‌ها است. در نهایت

<sup>1</sup> Estimators

<sup>2</sup> Adaptive Fuzzy Approximators

<sup>3</sup> Chattering

مقاوم بودن آن را در برابر عدم قطعیت‌های موجود تضعیف می‌نماید [۲۹].

کنترل پسگام، یکی از روش‌های مبتنی بر روش لیاپانف است که می‌توان با استفاده از آن، کلاس خاصی از سامانه‌های غیرخطی را پایدار نمود [۳۰]. ویژگی اساسی این دسته از سامانه‌ها بازخورد صریح<sup>۱</sup> می‌باشد. این بدان معناست که در یک سامانه سلسله مراتبی از فضای حالت، هر لایه تنها به متغیرهای حالات لایه‌های قبل وابسته است. بنابراین، ویژگی ساختارهای زیرسامانه‌ای، که در آن بتوان برخی از زیرسامانه‌های تقلیل یافته را با استفاده از تئوری لیاپانوف حول مبدأ پایدار نمود، وجود خواهد داشت. در نتیجه برای پیاده‌سازی روش پسگام، ابتدا سامانه کلی به زیرسامانه‌های کوچکی تقسیم شده و برای هر زیرسامانه، یک کنترل‌کننده مجازی به گونه‌ای طراحی می‌نمایند که آن زیرسامانه را خطی نموده و مشتق تابع لیاپانف را کوچک‌تر از صفر نمایند. در این صورت کنترل‌کننده مجازی باعث پایداری آن زیرسامانه می‌شود. سپس همین روش را تا آخرین زیرسامانه اجرا می‌نمایند. در نهایت با به‌دست آمدن تابع لیاپانف کل سامانه و بر اساس منفی شدن مشتق آن، کنترل‌کننده واقعی سامانه به‌گونه‌ای محاسبه می‌شود که پایداری مجانبی سراسری سامانه حلقه بسته را تضمین می‌نماید. از آنجاکه فرایند طراحی این روش کنترلی در یک فرایند بازگشت به عقب صورت می‌پذیرد، بنابراین به این روش کنترل پسگام گفته می‌شود. فرایند طراحی کنترل پسگام مرحله به مرحله انجام می‌شود، بنابراین یادگیری روش طراحی آن برای مهندسين و محققين حوزه کنترل آسان است. اما معایب این روش کنترلی به‌قرار زیر است:

- روش پسگام را برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های غیرخطی می‌توان استفاده نمود. با تحقیقاتی که در طول سالیان گذشته انجام گردیده، محققین راهکارهایی را ارائه نموده‌اند تا گستره استفاده از این روش کنترلی را افزایش دهند [۳۰].
- کنترل پسگام در مواجهه با عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی سامانه غیرخطی مقاوم نیست [۳۰].

برای مقاوم‌سازی روش پسگام، محققین از ترکیب کنترل پسگام و کنترل مد لغزشی استفاده نموده‌اند [۳۱-۳۲]. با ترکیب نمودن این روش‌های کنترلی، ضعف‌ها و معایب کنترل پسگام تا حدود زیادی برطرف گردیده و مزایای کنترل مد لغزشی نیز به آن افزوده می‌شود.

در این مقاله دو راهکار برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی ارائه می‌شود. در راهکار پیشنهادی اول، در روش پسگام، سامانه کلی به زیرسامانه‌های کوچکی تقسیم می‌شود، این مجزا سازی به پیاده‌سازی کنترل مد لغزشی کمک نموده و عملکرد آن را مطلوب‌تر می‌نماید. از آنجاکه روش طراحی کنترل پسگام مرحله به مرحله و نظام‌مند انجام می‌شود، بنابراین تابع لیاپانف نهایی نیز در مراحل طراحی به‌راحتی به‌دست می‌آید. در پیاده‌سازی کنترل پیشنهادی، اطلاعات مربوط به زیرسامانه اول سامانه فروتحریک لازم و کافی است. بنابراین راهکار پیشنهادی از حجم محاسبات بسیار پائینی برخوردار است. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سامانه حلقه بسته با کنترل پیشنهادی و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است.

اما در راهکار پیشنهادی دوم، تنها از ظرفیت‌های کنترل مد لغزشی استفاده شده است. در روش پیشنهادی تلاش می‌گردد که با ترکیب مناسب کنترل‌کننده‌های مد لغزشی و سطوح لغزش زیرسامانه‌های اول و دوم، کنترل‌کننده نهایی طراحی شود که پایداری سراسری سامانه حلقه بسته را در حضور عدم قطعیت‌های موجود و کوپلینگ بین زیرسامانه‌های اول و دوم، تضمین نماید. کنترل مد لغزشی پیشنهادی دارای مراحل طراحی نظام‌مندی است و به‌راحتی می‌توان این راهکار را به سامانه‌های فروتحریک با درجات آزادی بالاتر نیز تعمیم داد.

در ادامه ساختار مقاله به‌صورتی است که در بخش ۲، معادلات دینامیکی سامانه فروتحریک با دو درجه آزادی معرفی و فرضیات حاکم بر طراحی کنترل پیشنهادی ارائه می‌شود. بخش ۳ مقاله، به بیان روش طراحی کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی برای سامانه فروتحریک با دو درجه آزادی اختصاص دارد. در بخش ۴، راهکار کنترل هم‌زمان زیرسامانه‌های مربوط به سامانه فروتحریک بیان می‌گردد. در ادامه در بخش ۵، با استفاده از سامانه فازی TSK، راهکاری

<sup>1</sup> Explicit Feedback

**فرضیه ۳:** توابع غیرخطی  $b_1(X)$  و  $b_2(X)$  کران دار، غیر صفر و دارای علامت معلومی به ازای هر  $X$  هستند. علامت  $b_i(X)$  تغییر نمی کند و بدون از دست دادن هر کلیتی فرض بر آن است که علامت آن ها مثبت است. همچنین کران بالا و پائین این توابع یعنی  $0 < b_i^{min} \leq b_i(X) \leq b_i^{max}$  مشخص هستند.

**فرضیه ۴:** اغتشاشات خارجی نامعلوم اما کران بالای مشخص دارند، یعنی  $d_i(t) \leq d_i^{max}$ .

### ۳- طراحی کنترل کننده ترکیبی پسگام و مد لغزشی برای کنترل دسته خاصی از سامانه های فروتحریک با دو درجه آزادی

در این بخش، در ابتدا کنترل کننده ترکیبی پسگام و مد لغزشی برای کنترل متغیرهای حالت  $x_1$  و  $x_2$  در زیرسامانه اول طراحی می شود. فرآیند طراحی به طور کلی در سه مرحله زیر انجام می شود [۳۰].

**مرحله ۱:** ابتدا خطای ردگیری متغیر حالت  $x_1$ ، به عنوان متغیر قابل کنترل به صورت زیر تعریف می شود:

$$e_1 = x_1 - x_{d1} \quad (2)$$

که در آن  $x_{d1}$  مسیر مطلوب است. تابع منتخب لیاپانف وابسته به متغیر کنترل به صورت زیر معرفی می شود:

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2} e_1^2 \Rightarrow \dot{V}_1(e_1) = e_1(x_2 - \dot{x}_{d1}) \quad (3)$$

هم اکنون متغیر حالت  $x_2$  به عنوان ورودی مجازی به گونه ای طراحی می شود که  $e_1$  را به سمت صفر همگرا نماید. برای این منظور داریم:

$$x_2 = -k_1 e_1 + \dot{x}_{d1} \quad (4)$$

که در آن  $k_1$  ثابتی مثبت است. در این شرایط  $\dot{V}_1(e_1) = -k_1 e_1^2 \leq 0$ . بنابراین از اختلاف ورودی مجازی و تابع کنترل کننده (۳)، متغیر  $Z_1$  به صورت زیر انتخاب می شود:

$$z_1 = x_2 + k_1 e_1 - \dot{x}_{d1} \Rightarrow \dot{e}_1 = z_1 - k_1 e_1 \quad (5)$$

در این حالت تابع لیاپانف (۳) برابر است با:

برای حذف پدیده لرزش در ورودی کنترل پیشنهادی ارائه می شود. در بخش ۶، راهکار دوم یعنی طراحی کنترل مد لغزشی برای کنترل سامانه های فروتحریک با دو درجه آزادی بیان می گردد. سپس در بخش ۷ اثبات پایداری سطوح لغزش مربوط به زیرسامانه های اول و دوم ارائه می شود. برای برطرف نمودن لرزش در ورودی کنترل پیشنهادی، روش طراحی سامانه فازی TSK برای کنترل مد لغزشی فازی و مزایای راهکار پیشنهادی به ترتیب در بخش ۸ و زیر بخش ۸-۱ آمده است. در بخش ۹، با بیان معیارهایی، عملکرد کنترل کننده های پیشنهادی با یکدیگر مقایسه می شوند. سپس برای بررسی عملکرد کنترل کننده های پیشنهادی، در بخش ۱۰ شبیه سازی هایی بر روی سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی پیاده سازی می گردد و در نهایت، بخش ۱۱ مقاله به نتیجه گیری اختصاص دارد.

### ۲- سامانه های فروتحریک دو درجه آزادی

در این مقاله، راهکارهایی برای کنترل دسته خاصی از سامانه های فروتحریک دو درجه آزادی با معادله زیر ارائه می شود [۱۷-۲۰]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= f_2(X) + b_2(X)u(t) + d_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که بردار متغیرهای حالت،  $u(t)$  ورودی کنترل و  $f_1(X)$ ،  $f_2(X)$ ،  $b_1(X)$  و  $b_2(X)$  توابعی غیرخطی، نرم و دارای عدم قطعیت بوده،  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$  اغتشاشات کران دار خارجی هستند. در ادامه مقاله، به منظور اختصار از بیان فاکتور زمان در متغیرهای حالت پرهیز می شود. برای طراحی کنترل کننده های پیشنهادی، فرضیات زیر باید برقرار باشند [۱۷-۲۰]:

**فرضیه ۱:** تمامی متغیرهای حالت قابل اندازه گیری هستند.

**فرضیه ۲:** توابع غیرخطی  $f_1(X)$  و  $f_2(X)$  دارای عدم قطعیت هستند و کران بالای آن ها یعنی  $f_i(X) \leq f_i^{max}$  مشخص است.

**مرحله ۳:** در این مرحله، ورودی کنترل  $u_s$  به گونه‌ای طراحی می‌شود که توانایی غلبه بر عدم قطعیت‌های (۱۳) را داشته و نهایتاً پایداری مجانبی سراسری زیرسامانه حلقه بسته اول را در حضور عدم قطعیت‌های تضمین نماید. برای این کار ورودی کنترل  $u_s$  به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$u_s = -\rho_1 \text{sign}(z_1) \quad (۱۴)$$

که  $\rho_1$  ثابتی مثبت و  $\text{sign}(z_1)$  تابع علامت است. معادله (۱۴) در (۱۲) جای‌گذاری و به صورت زیر مرتب می‌شود:

$$\dot{V}_2(e_1, z_1) = -k_1 e_1^2 - k_2 z_1^2 + z_1 \eta_1 - \rho_1 \text{sign}(z_1) = -k_1 e_1^2 - k_2 z_1^2 + z_1 \eta_1 - \rho_1 |z_1| \quad (۱۵)$$

در معادله فوق اگر بر اساس فرضیات بیان شده در بخش ۲ مقاله،  $|\eta_1| > \rho_1$  انتخاب شود، آنگاه  $\dot{V}_2(e_1, z_1) < 0$  است و تنها می‌گردد. از آنجاکه همواره  $\dot{V}_2(e_1, z_1) < 0$  است و تنها برای  $z_1 = e_1 = 0$  برابر با صفر می‌گردد، بنابراین بر اساس قضیه لاسال [۳۰]، در زیرسامانه حلقه بسته اول،  $e_1$  و  $z_1$  به سمت صفر همگرا می‌شوند. در این صورت سامانه حلقه بسته زیرسامانه اول با ورودی  $z_1 = x_2 + k_1 e_1 - \dot{x}_{d_1}$  تحت کنترل در آن  $e_1 = x_1 - x_{d_1}$  و  $\dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{d_1}$  پیشنهادی زیر و در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود:

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d_1} - k_2 z_1 + u_s) \\ u_s = -\rho_1 \text{sign}(z_1) \quad (۱۶)$$

به‌طور مشابه برای زیرسامانه دوم در رابطه (۱) متناسب با متغیرهای حالت  $x_3$  و  $x_4$  و با ورودی  $z_2 = x_4 + k_3 e_3 - \dot{x}_{d_3}$  که در آن  $e_3 = x_3 - x_{d_3}$  می‌باشند، می‌توان مراحل طراحی فوق را طی و به قوانین کنترل زیر دست یافت:

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}_2(X)} (-\hat{f}_2(X) - k_3 \dot{e}_3 + \ddot{x}_{d_3} - k_4 z_2 + u_s) \\ u_s = -\rho_2 \text{sign}(z_2) \quad (۱۷)$$

که  $k_3$ ،  $k_4$  و  $\rho_2$  ثابت‌های مثبت و  $x_{d_3}$  مسیر مطلوب متغیر حالت  $x_3$  است.

باید به این نکته توجه داشت که ورودی‌های کنترل (۱۶) و (۱۷) هر کدام به تنهایی قادر به پایدار نمودن زیرسامانه‌های مربوط به خود هستند. این در حالی است که

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1 z_1 - k_1 e_1^2 \quad (۶)$$

**مرحله ۲:** با مشتق‌گیری از (۴) و ترکیب آن با (۱) داریم:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_2 + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d_1} = f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d_1} \quad (۷)$$

در این صورت معادلات زیرسامانه اول بر حسب متغیر  $z_1$ ، به شکل زیر خواهد بود:

$$\dot{e}_1 = x_2 - \dot{x}_{d_1} \\ \dot{z}_1 = f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d_1} \quad (۸)$$

در این مرحله، ورودی کنترل  $u(t)$  به گونه‌ای طراحی می‌شود که خطای ردگیری  $e_1$  به سمت صفر همگرا شود. برای این کار تابع منتخب لیاپانف زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$V_2(e_1, z_1) = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} z_1^2 \quad (۹)$$

با جای‌گذاری روابط (۱)، (۴) و (۸) در مشتق تابع لیاپانف داریم:

$$\dot{V}_2(e_1, z_1) = e_1 \dot{e}_1 + z_1 \dot{z}_1 = -k_1 e_1^2 + z_1 (f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) + k_1 \dot{e}_1 - \ddot{x}_{d_1}) \quad (۱۰)$$

در ادامه ورودی کنترل  $u(t)$  به صورت زیر انتخاب می‌گردد:

$$u(t) = \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d_1} - k_2 z_1 + u_s) \quad (۱۱)$$

که  $k_2$  ثابتی مثبت،  $\hat{b}_1(X)$  و  $\hat{f}_1(X)$  بخش‌های معلوم توابع غیرخطی  $b_1(X)$  و  $f_1(X)$  و ورودی کنترل جدیدی است که باید طراحی شود. با جای‌گذاری (۱۱) در (۱۰) و ساده‌سازی روابط خواهیم داشت:

$$\dot{V}_2(e_1, z_1) = -k_1 e_1^2 + z_1 (\eta_1 - k_2 z_1 + u_s) \quad (۱۲)$$

که در آن

$$\eta_1 = f_1(X) - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} \hat{f}_1(X) + \left(1 - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)}\right) k_1 \dot{e}_1 + \left(\frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} - 1\right) \ddot{x}_{d_1} + \left(\frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} - 1\right) u_s + \left(1 - \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)}\right) k_2 z_1 + \frac{b_1(X)}{\hat{b}_1(X)} d_1(t) \quad (۱۳)$$

از رابطه (۱۳) واضح است که این عبارت نمایانگر جمع کل عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی زیرسامانه اول است. بنابراین ورودی کنترل  $u_s$  باید به گونه‌ای طراحی شود که بر این عدم قطعیت‌ها غلبه نماید.

۲. هرگاه  $|s|$  به سمت صفر همگرا می‌شود، آنگاه باید  $|g(s)|$  نیز به مقدار صفر نزدیک شده و به ازای  $s = 0$ ،  $g(s) = 0$  شود.

ویژگی‌های ذکر شده به راحتی توسط منطق فازی قابل دستیابی می‌باشند. بنابراین جهت دستیابی به این هدف از یک تقریبگر فازی استفاده می‌گردد. در این تقریبگر از فازی‌ساز تکین، موتور استنتاج ضرب ممدانی و غیرفازی‌ساز میانگین مراکز استفاده می‌شود. در موتور استنتاج این سامانه فازی، از ۵ قاعده فازی TS زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} R^1: & \text{if } s \text{ is NB then } y^1 = -\varepsilon_{\max} \\ R^2: & \text{if } s \text{ is NM then } y^2 = -\frac{\varepsilon_{\max}}{2} \\ R^3: & \text{if } s \text{ is Z then } y^3 = 0 \\ R^4: & \text{if } s \text{ is PM then } y^4 = \frac{\varepsilon_{\max}}{2} \\ R^5: & \text{if } s \text{ is PB then } y^5 = \varepsilon_{\max} \end{aligned} \quad (20)$$

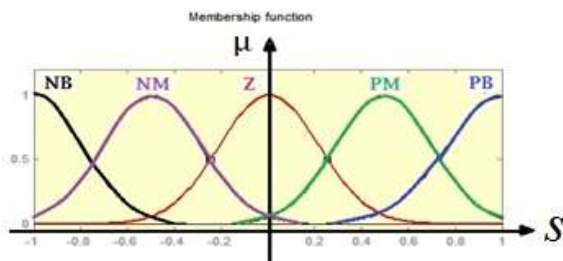
که در قواعد فازی فوق، منظور از متغیرهای زبانی NB، NM، Z، PM و PB به ترتیب منفی بزرگ، منفی متوسط، صفر، مثبت متوسط و مثبت بزرگ است،  $0 < \varepsilon_{\max} < 1$  انتخاب می‌شود و توابع عضویت ورودی  $s$  در شکل ۱ نشان داده شده است.

با توجه به ساختار و قواعد تقریبگر فازی، خروجی هر کدام از قواعد و خروجی نهایی عبارت‌اند از:

$$\mu_{f_s^i}(s^*) \cdot y^i, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (21)$$

$$g(s) = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_s^i}(s^*) \cdot y^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_s^i}(s^*)} \quad (22)$$

که در آن  $\mu_{f_s^i}(s^*)$  شدت آتش و  $y^i$  خروجی قاعده  $i$  ام هستند.



شکل (۱): توابع عضویت ورودی  $s$ .

سامانه (۱) فروتحریک بوده و تنها دارای یک ورودی می‌باشد. بنابراین ساختار کنترل باید به گونه‌ای اصلاح شود که تنها با یک ورودی بتوان هر دو زیرسامانه را تحت کنترل داشت.

#### ۴- کنترل هم‌زمان زیرسامانه‌های اول و دوم سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی

در این بخش از مقاله برای کنترل هم‌زمان زیرسامانه‌های اول و دوم، از طریق یک متغیر واسط اقدام به ارتباط بین دو زیرسامانه می‌نماییم. این متغیر و اجزاء آن به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= g(s)\varepsilon_{\max} \\ s &= \dot{e}_3 + k_3 e_3 \\ e_3 &= x_3 - x_{d3}, \quad \dot{e}_3 = x_4 - \dot{x}_{d3} \end{aligned} \quad (18)$$

بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله متغیر ورودی  $Z_1$  در قانون کنترل (۱۶) به صورت زیر اصلاح می‌شود.

$$Z_1 = x_2 + k_1(e_1 - \varepsilon) - \dot{x}_{d1} \quad (19)$$

در این حالت با اعمال ورودی کنترل (۱۶)، نتیجه می‌شود که  $e_1$  بجای صفر به سمت مقدار  $\varepsilon$  همگرا می‌گردد. در صورتی که  $\varepsilon$  به سمت صفر نزدیک شود، آنگاه  $e_1$  نیز صفر خواهد شد. اگر  $\varepsilon \neq 0$  باشد، در این صورت ورودی کنترل (۱۶) به گونه‌ای عمل می‌نماید که  $s$  به سمت صفر همگرا شود. با صفر شدن  $s$ ، متغیر  $\varepsilon$  نیز صفر می‌شود. در این صورت خطاهای ردگیری  $e_1$  و  $e_3$  نیز صفر می‌گردند. بنابراین خطاهای ردگیری زیرسامانه‌های اول و دوم هم‌زمان به سمت صفر همگرا شده و دیگر نیازی به ورودی کنترل (۱۷) نبوده و سامانه حلقه بسته فروتحریک دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود. با این تفاسیر و نحوه عملکرد فرآیند کنترل، تابع  $g(s)$  باید به گونه‌ای طراحی شود که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. تابع  $g(s)$  باید کران دار باشد. یعنی  $-\varepsilon_{\max} \leq g(s) \leq \varepsilon_{\max}$  بوده و باید  $0 < \varepsilon_{\max} < 1$  انتخاب شود.

$$= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 + \rho_1)$$

R<sup>2</sup>: if  $z_1$  is NM then  $u^2$

$$= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} \left( -\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 + \frac{\rho_1}{2} \right)$$

R<sup>3</sup>: if  $z_1$  is Z then  $u^3$

$$= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1) \quad (23)$$

R<sup>4</sup>: if  $z_1$  is PM then  $u^4$

$$= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} \left( -\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 - \frac{\rho_1}{2} \right)$$

R<sup>5</sup>: if  $z_1$  is PB then  $u^5$

$$= \frac{1}{\hat{b}_1(X)} (-\hat{f}_1(X) - k_1 \dot{e}_1 + \ddot{x}_{d1} - k_2 z_1 - \rho_1)$$

در پایگاه قواعد فازی فوق،  $z_1$  ورودی و مقدار آن بر اساس مقادیر قانون کنترل (۱۶) محاسبه می‌شود. نهایتاً خروجی این سامانه که همان ورودی نهایی کنترل می‌باشد به صورت زیر است:

$$y = u(t) = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_{z_1}^i}(z_1^*) \cdot u^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_{z_1}^i}(z_1^*)} \quad (24)$$

در تنظیم پایگاه قواعد فازی (۲۵)، مواردی مد نظر قرار گرفت که به صورت مختصر به آن‌ها اشاره می‌شود:

- تنظیم قواعد فازی باید به گونه‌ای انجام شود که باعث تضعیف پایداری سامانه حلقه بسته نشود. به همین دلیل قواعد فازی  $R^1$  و  $R^5$  باید طوری تنظیم گردیدند که اگر  $|z_1|$  افزایش یابد، آنگاه بر اساس معادله (۱۶)، عملکرد این قواعد باعث حفظ پایداری سامانه حلقه بسته می‌گردد.
- در طراحی قواعد فازی تلاش گردید تا کاهش دامنه ورودی کنترل اتفاق بیفتد. همان‌طور که در قواعد فازی  $R^2$  و  $R^4$  مشاهده می‌شود، با کاهش  $|z_1|$ ، مقدار ضریب  $\rho_1$  نیز نصف می‌گردد. به همین دلیل با کاهش  $|z_1|$ ، دامنه کنترل پیشنهادی نیز کاهش می‌یابد و این امر از اشباع محرکه‌های سامانه فروتحرک جلوگیری می‌نماید.
- از ورودی کنترل (۱۶) نتیجه می‌شود که متغیر  $z_1$  (۱۹)، از طریق  $\varepsilon$  با تقریبگر فازی  $g(s)$  ارتباط دارد. از آنجاکه در طراحی تقریبگر فازی  $g(s)$ ، از ۵ قاعده فازی یک ورودی - یک خروجی استفاده گردید، به همین دلیل در طراحی پایگاه قواعد کنترل پیشنهادی نیز برای کاهش حجم محاسبات ورودی کنترل، تلاش گردید تا از

خلاصه عملکرد تقریبگر فازی پیشنهادی جهت دستیابی به اهداف به صورت زیر است.

- در پایگاه قواعد فازی (۲۰)، بر اساس ۵ قاعده تعریف شده مشخص است که دامنه تغییرات این قواعد بین  $-\varepsilon_{max}$  و  $\varepsilon_{max}$  است. به عبارت دیگر، خروجی هر کدام از قواعد فازی  $-\varepsilon_{max} \leq y^i \leq \varepsilon_{max}$  است. بنابراین تقریبگر معادله (۲۲) ویژگی ۱ بخش قبل را ارضاء می‌نماید.
- در (۲۰) عملکرد قواعد فازی به گونه‌ای است که با تغییرات  $s$  خروجی  $y^i$  به صورت مطلوب تغییر نماید. در این راستا با کاهش و نزدیک شدن  $|s|$  به سمت صفر، خروجی قواعد فازی نیز می‌بایست کاهش یافته و به سمت صفر همگرا شود. به طوری که با صفر شدن  $|s|$ ، خروجی این قاعده نیز صفر می‌شود. بنابراین معادله (۲۲) ویژگی ۲ بخش قبل را نیز برآورده می‌سازد.

اگرچه در راهکار پیشنهادی تنها اطلاعات مربوط به زیرسامانه اول یعنی توابع غیرخطی  $\hat{f}_1(X)$  و  $\hat{b}_1(X)$  لازم و کافی می‌باشند و این امر موجب کاهش حجم محاسبات و هزینه‌های اقتصادی پیاده‌سازی عملی آن می‌شود، اما کماکان به دلیل استفاده از تابع  $\text{sign}^*$  در معادلات (۱۶)، بروز پدیده نامطلوب لرزش در ورودی کنترل امری اجتناب‌ناپذیر است. این رخداد احتمال بروز پدیده تشدید را در سامانه‌های الکترومکانیک افزایش می‌دهد و باعث فروپاشی سامانه و یا کاهش عمر محرکه‌های سامانه می‌شود [۱۴-۱۶]. بنابراین در بخش بعد، راهکاری برای جلوگیری از بروز لرزش در ورودی کنترل ارائه می‌گردد.

## ۵- استفاده از سامانه فازی برای جلوگیری از بروز لرزش در ورودی کنترل

در این بخش از مقاله، برای جلوگیری از بروز لرزش در ورودی کنترل، ضمن تضمین پایداری مجانبی سراسری سامانه حلقه بسته، مجدداً از سامانه فازی TS با ساختار همانند بخش قبل استفاده می‌شود. پایگاه قواعد فازی این سامانه، بر اساس روش کنترل هم‌زمان دو زیرسامانه با قانون کنترل (۱۶) و متغیر واسط (۱۹) به قرار زیر است:

$$R^1: \text{if } z_1 \text{ is NB then } u^1$$



## ۶- طراحی کنترل کننده مد لغزشی برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی

در این بخش از مقاله، راهکاری جدید و مبتنی بر کنترل مد لغزشی، برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی ارائه می‌گردد. راهکار پیشنهادی فقط مبتنی بر روش کنترل مد لغزشی بوده و در طراحی آن، تنها از پتانسیل‌های موجود در این روش استفاده شده است. در طراحی کنترل پیشنهادی، در ابتدا برای کنترل متغیرهای حالت زیرسامانه‌های اول و دوم، یعنی  $(x_1, x_2)$  و  $(x_3, x_4)$ ، سطوح لغزش زیر انتخاب می‌شوند:

$$\sigma_1 = \lambda_1 e_1 + \dot{e}_1 \quad (25)$$

$$\sigma_2 = \lambda_2 e_3 + \dot{e}_3 \quad (26)$$

که  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  ثابت‌های مثبت،  $e_1 = x_1 - x_{d1}$  و  $e_3 = x_3 - x_{d3}$  هستند. در صورتی که برای زیرسامانه‌های اول و دوم، به صورت جداگانه کنترل مد لغزشی طراحی شود، آنگاه ورودی‌های معادل این زیرسامانه‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$u_{eq1} = \frac{-\lambda_1 \dot{e}_1 - \hat{f}_1(X) + \ddot{x}_{d1}}{\hat{b}_1(X)} \quad (27)$$

$$u_{eq2} = \frac{-\lambda_2 \dot{e}_3 - \hat{f}_2(X) + \ddot{x}_{d3}}{\hat{b}_2(X)} \quad (28)$$

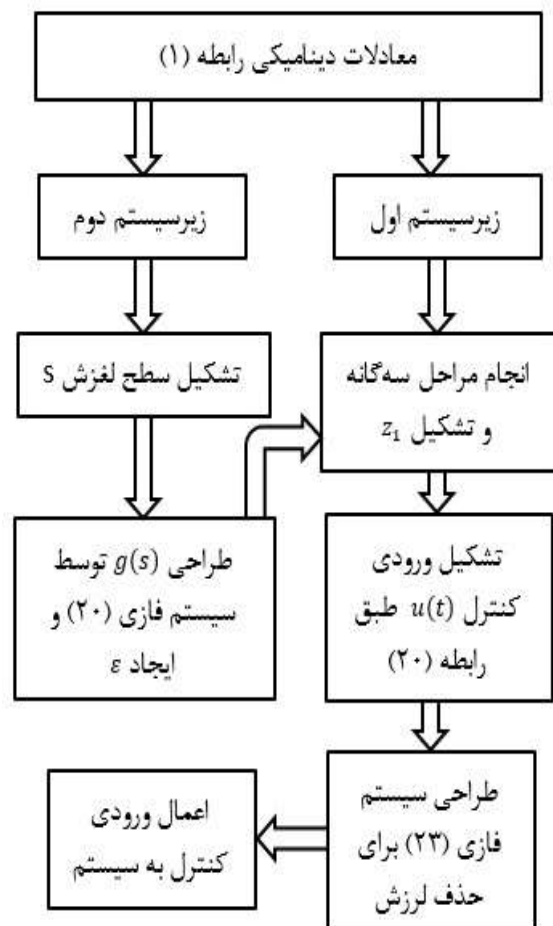
در یک سامانه فروتحریک، کنترل چند خروجی سامانه از طریق ورودی‌های کمتر کار بسیار پیچیده‌ای است. بنابراین برای اینکه هر کدام از زیرسامانه‌ها بتوانند عملکرد مطلوبی داشته باشند، ورودی کنترل نهایی باید شامل ورودی‌های معادل زیرسامانه‌ها باشد. پس ورودی کنترل نهایی به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_s \quad (29)$$

که ورودی  $u_s$ ، بخش ناپیوسته کنترل کننده مد لغزشی است. در ادامه سطح لغزش زیر که ترکیبی از سطوح لغزش زیرسامانه‌ها است، به صورت زیر معرفی می‌گردد:

۵ قاعده فازی یک ورودی - یک خروجی استفاده شود. بنابراین مجموع قواعد فازی تقریبگر فازی و کنترل پیشنهادی برابر با ۱۰ قاعده یک ورودی - یک خروجی خواهد بود. به همین دلیل پیاده‌سازی عملی کنترل پیشنهادی به آسانی میسر می‌شود.

به منظور درک بهتر و سهولت در پیاده‌سازی، فرآیند طراحی کنترل ترکیبی پسگام - مد لغزشی فازی به صورت یک درختواره در شکل ۲ ارائه شده است. همان‌طور که در این شکل نیز مشخص است ابتدا تقریبگر فازی  $g(s)$  (۲۰) طراحی و در ادامه به طراحی سامانه فازی (۲۳) پرداخته می‌شود. به عبارت دیگر تقریبگر فازی اول در درون تقریبگر دوم طراحی شده است.



شکل (۲): جزئیات و مراحل پیاده‌سازی کنترل ترکیبی پسگام - مد لغزشی فازی.

**قضیه:** دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک با معادله (۱) و با سطوح لغزش معادلات (۲۵)، (۲۶) و (۳۰) را در نظر بگیرید. در حضور ورودی کنترل با معادلات (۲۷)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۲)، در صورتی که  $\sigma_1 \in L_\infty$ ،  $\dot{\sigma}_1 \in L_\infty$  (به عبارتی اگر  $\sigma_1$  و  $\dot{\sigma}_1$  محدود باشند) و  $\rho > (\alpha D_1 + \gamma D_2)$  انتخاب شود، آنگاه سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  به صورت مجانبی به سمت صفر همگرا شده و در نتیجه سامانه حلقه بسته دارای پایداری مجانبی سراسری می‌گردد.

**اثبات:** از دو طرف معادله (۳۳) نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^t \dot{V} dt = \int_0^t (-kQ^2 - \rho|Q| + |Q|(\alpha D_1 + \gamma D_2)) dt$$

$$V(t) - V(0) = \int_0^t (-(\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2))|Q| - kQ^2) dt \quad (34)$$

با توجه به رابطه (۳۴) و تابع منتخب لیاپانف داریم:

$$V(t) = \frac{1}{2}Q^2 = V(0) - \int_0^\infty ((\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2))|Q| + kQ^2) dt \leq V(0) < \infty \quad (35)$$

از معادله (۳۵) نتیجه می‌شود که  $Q \in L_\infty$  است. به عبارت دیگر:

$$\sup_{t \geq 0} |Q| = \|Q\|_\infty < \infty \quad (36)$$

از معادلات (۳۱)، (۳۳) و (۳۶) خواهیم داشت:

$$\dot{V} = Q\dot{Q} \leq -kQ^2 - \rho|Q| + |Q|(\alpha D_1 + \gamma D_2) < \infty \quad (37)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود که  $\dot{Q} \in L_\infty$  است. یعنی:

$$\sup_{t \geq 0} |\dot{Q}| = \|\dot{Q}\|_\infty < \infty \quad (38)$$

بنابراین از معادلات (۳۰)، (۳۶) و (۳۸) نتیجه می‌شود که:

$$\sup_{t \geq 0} |\sigma_1| = \|\sigma_1\|_\infty < \infty$$

$$\sup_{t \geq 0} |\dot{\sigma}_1| = \|\dot{\sigma}_1\|_\infty < \infty$$

$$\sup_{t \geq 0} |\sigma_2| = \|\sigma_2\|_\infty < \infty \quad (39)$$

$$Q = \alpha\sigma_1 + \gamma\sigma_2 \quad (30)$$

که  $\alpha$  و  $\gamma$  ثابت‌های مثبتی هستند. برای طراحی ورودی  $u_s$  با استفاده از مشتق تابع منتخب لیاپانف  $V = \frac{1}{2}Q^2$  نهایتاً به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\dot{V} = Q\dot{Q} == Q[(\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2}) + u_s(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1) + \alpha d_1 + \gamma d_2] \quad (31)$$

$$u_s = \frac{-1}{(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho \text{sign}(Q)] \quad (32)$$

که  $k$  و  $\rho$  ثابت‌های مثبتی هستند. با جای‌گذاری معادله (۳۲) در (۳۱) داریم:

$$\dot{V} = Q[-kQ - \rho \text{sign}(Q) + \alpha d_1 + \gamma d_2] = -kQ^2 - \rho|Q| + Q(\alpha d_1 + \gamma d_2) \leq -kQ^2 - \rho|Q| + |Q|(\alpha D_1 + \gamma D_2) \quad (33)$$

از معادله (۳۳) نتیجه می‌شود که با انتخاب مناسب ضرایب  $k$ ،  $\rho$ ،  $\alpha$  و  $\gamma$  مشتق تابع لیاپانف کوچک‌تر از صفر می‌گردد. بنابراین سطح لغزش  $Q$  با گذشت زمان به سمت صفر همگرا می‌شود.

**نکته ۱:** معادله (۳۳) نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ضرایب  $k$ ،  $\rho$ ،  $\alpha$  و  $\gamma$  می‌توان سطح لغزش  $Q$  را به سمت صفر همگرا نمود. اما صفر شدن سطح لغزش  $Q$ ، لزوماً صفر شدن سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  را به دنبال ندارد. بنابراین صفر شدن سطح لغزش  $Q$ ، اثبات پایداری سامانه حلقه بسته را تضمین نمی‌نماید.

## ۷- تحلیل پایداری تمامی سطوح لغزش

در بخش قبل اثبات شد که ورودی کنترل با معادلات (۲۷)، (۲۸)، (۲۹) و (۳۲)، سطح لغزش  $Q$  را در حضور تمامی عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری به سمت صفر همگرا می‌نماید. در این بخش می‌خواهیم ثابت کنیم که صفر شدن سطح لغزش  $Q$  باعث صفر شدن سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  گردیده و در نهایت سامانه حلقه بسته دارای پایداری مجانبی سراسری می‌شود.

داریم:  $\infty > \int_0^\infty Q_1^2 dt > \int_0^\infty Q_2^2 dt \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty Q_1^2 dt = \int_0^\infty (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + 2\alpha_1 \gamma \sigma_1 \sigma_2 + \gamma^2 \sigma_2^2) dt < \infty \\ 0 &\leq \int_0^\infty Q_2^2 dt = \int_0^\infty (\alpha_2^2 \sigma_1^2 + 2\alpha_2 \gamma \sigma_1 \sigma_2 + \gamma^2 \sigma_2^2) dt < \infty \end{aligned} \quad (41)$$

پس:

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^\infty (Q_1^2 - Q_2^2) dt = \int_0^\infty ((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sigma_1^2 + \\ &2(\alpha_1 - \alpha_2) \gamma \sigma_1 \sigma_2) dt < \infty \end{aligned} \quad (42)$$

در ادامه نامعادله فوق داریم:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty ((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \sigma_1^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 (Q_1 - \alpha_1 \sigma_1)) dt \\ &= \int_0^\infty -(\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sigma_1^2 dt \\ &+ \int_0^\infty 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 Q_1 dt > 0 \end{aligned} \quad (43)$$

از معادله (۳۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty ((\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2)) |Q| + k Q^2) dt = \\ &\int_0^\infty (\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2)) |Q| dt + \\ &\int_0^\infty k Q^2 dt \leq V(0) < \infty \end{aligned} \quad (44)$$

از آنجاکه  $\rho > (\alpha D_1 + \gamma D_2)$  و  $k > 0$  است، بنابراین  $\int_0^\infty k Q^2 dt \geq 0$  و  $\int_0^\infty (\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2)) |Q| dt \geq 0$  خواهد بود. چون جمع دو مقدار مثبت، یک مقدار محدود است، بنابراین هر کدام از این مقادیر مثبت نیز محدود خواهند بود. پس  $\int_0^\infty |Q| dt = (\rho - (\alpha D_1 + \gamma D_2)) \int_0^\infty |Q| dt$  است. در ادامه از معادله (۴۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \sigma_1^2 dt &< \int_0^\infty 2(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 Q_1 dt \\ &\leq 2 \int_0^\infty |(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_1 Q_1| dt \\ &\leq 2|\alpha_1 - \alpha_2| \int_0^\infty \|\sigma_1\|_\infty |Q_1| dt = 2|\alpha_1 - \\ &\alpha_2| \|\sigma_1\|_\infty \|Q_1\|_1 < \infty \end{aligned} \quad (45)$$

از معادله (۴۵) داریم:

$$\int_0^\infty \sigma_1^2 dt < \infty \quad (46)$$

به روش مشابه اثبات می‌شود که:

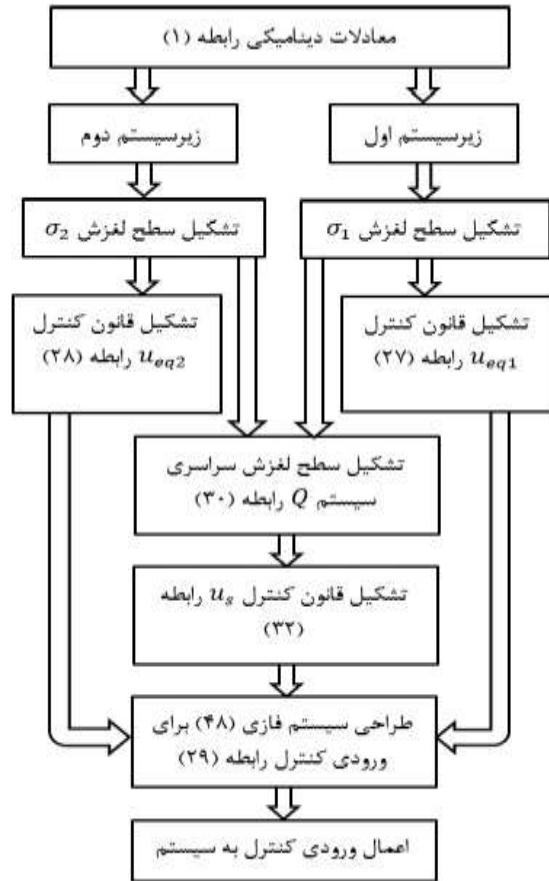
$$\sup_{t \geq 0} |\dot{\sigma}_2| = \|\dot{\sigma}_2\|_\infty < \infty$$

با توجه به مطالب فوق، می‌دانیم که اگر  $\rho > (\alpha D_1 + \gamma D_2)$  باشد، آنگاه مقادیر  $\alpha$  و  $\gamma$  تأثیر مستقیمی بر پایداری سامانه ندارند. بنابراین دو سطح لغزش زیر معرفی می‌گردد:

$$Q_1 = (\alpha_1 \sigma_1 + \gamma \sigma_2), \quad Q_2 = (\alpha_2 \sigma_1 + \gamma \sigma_2) \quad (40)$$

که  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  ثابت‌های دلخواه و فرض بر آن است که  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  پس  $Q_1 \neq Q_2$  است. همچنین فرض می‌شود که

در خاتمه مراحل طراحی، به منظور درک بهتر و سهولت در پیاده‌سازی، فرآیند طراحی کنترل پیشنهادی مد لغزشی فازی به صورت یک درختواره در شکل ۳ ارائه شده است.



شکل (۳): جزئیات و مراحل پیاده‌سازی کنترل مد لغزشی فازی.

#### ۱-۸- ویژگی‌های کنترل مد لغزشی فازی پیشنهادی

در طراحی کنترل پیشنهادی، نکات و نوآوری‌هایی نهفته است که در زیر به طور مختصر به آن اشاره شده است:

۱. در طراحی کنترل پیشنهادی، سامانه کلی به دو زیرسامانه تجزیه می‌شود. در زیرسامانه اول با صفر شدن سطح لغزش  $\sigma_1$ ، متغیرهای حالت  $(x_1, x_2)$  به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا می‌شوند و در زیرسامانه دوم نیز، با صفر شدن  $\sigma_2$ ، همین اتفاق برای متغیرهای حالت  $(x_3, x_4)$  تکرار می‌شود.

۲. در طراحی کنترل پیشنهادی، بر اساس ورودی کنترل (۲۷)، (۲۸) و (۳۲) قواعد فازی به گونه‌ای طراحی

$$\int_0^{\infty} \sigma_2^2 dt < \infty \quad (47)$$

از معادلات (۴۶) و (۴۷) داریم که  $\sigma_1 \in L_2$  و  $\sigma_2 \in L_2$  است. از آنجاکه  $\sigma_1 \in L_{\infty}$ ،  $\dot{\sigma}_1 \in L_{\infty}$ ،  $\sigma_2 \in L_{\infty}$  و  $\dot{\sigma}_2 \in L_{\infty}$  هستند، بنابراین بر اساس لم باربالت می‌توان نتیجه گرفت که  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_1 = 0$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_2 = 0$  است و قضیه اثبات می‌گردد [۳۰].

#### ۸- طراحی کنترل مد لغزشی فازی برای سامانه فروتحریک با دو درجه آزادی

در بخش قبل اثبات شد که سامانه حلقه بسته با کنترل پیشنهادی (۳۲) در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است. اما همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد وجود تابع  $sign(*)$  در کنترل پیشنهادی چالش‌های جدی به دنبال دارد. بنابراین همانند بخش ۵ و بر اساس قوانین کنترل (۲۷)، (۲۸) و (۳۲) از یک تقریبگر فازی به شکل زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{aligned} R^1: & \text{if } Q \text{ is NB then } u^1 = u_{eq1} + u_{eq2} \\ & + \frac{-1}{(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ - \rho] \\ R^2: & \text{if } Q \text{ is NM then } u^2 = u_{eq1} + u_{eq2} \\ & + \frac{-1}{2(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ - \rho] \\ R^3: & \text{if } Q \text{ is Z then } u^3 = u_{eq1} + u_{eq2} \quad (48) \\ R^4: & \text{if } Q \text{ is PM then } u^4 = u_{eq1} + u_{eq2} \\ & + \frac{-1}{2(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho] \\ R^5: & \text{if } Q \text{ is PB then } u^5 = u_{eq1} + u_{eq2} \\ & + \frac{-1}{(\gamma\hat{b}_2 + \alpha\hat{b}_1)} [\gamma\hat{b}_2 u_{eq1} + \alpha\hat{b}_1 u_{eq2} + kQ + \rho] \end{aligned}$$

که در قواعد فازی فوق، دقیقاً از متغیرهای زبانی بخش ۴ استفاده گردیده و مقادیر توابع عضویت ورودی  $Q$  عیناً مطابق شکل ۱ است. با توجه به قواعد فازی (۴۸) و ساختار سامانه فازی، خروجی این آن به صورت زیر است:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_Q^i}(Q^*) \cdot u^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_{f_Q^i}(Q^*)} \quad (49)$$

## ۹- مقایسه کنترل کننده‌های پیشنهادی

در این بخش از مقاله، با توجه به معیارهای اصلی عملکرد روش‌های پیشنهادی، به‌طور خلاصه مقایسه‌ای بین کنترل کننده‌ها در جدول ۱ ارائه می‌شود.

گردیده‌اند که دامنه ورودی کنترل تا جایی که امکان دارد کاهش پیدا نموده و علاوه بر آن اثبات پایداری سامانه حلقه بسته نیز تضمین شود. برای نیل به این اهداف، قاعده فازی ۳ به‌گونه‌ای طراحی شد که اگر سطح لغزش  $Q$  صفر باشد، بخش کلیدزنی ورودی کنترل یعنی  $u_s$  برابر صفر می‌شود. از طرف دیگر در صورتی که سطح لغزش  $Q$  منفی متوسط یا مثبت متوسط باشد، مطابق قواعد فازی ۲ و ۴ بخش  $u_s$  نصف مقدار واقعی آن می‌گردد. به همین دلیل این قواعد باعث کاهش دامنه ورودی کنترل می‌شوند. از طرف دیگر برای برقراری پایداری مجانبی سراسری سامانه حلقه بسته، قواعد فازی ۱ و ۵ طراحی شده‌اند. مطابق این قواعد فازی در صورتی که سطح لغزش  $Q$  منفی بزرگ یا مثبت بزرگ باشد، آنگاه ورودی کنترل مطابق روابط (۲۷)، (۲۸) و (۳۲) خواهد بود. بنابراین قضیه بخش ۷ مقاله برقرار می‌شود و در این صورت سامانه حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری می‌گردد.

۳. ورودی کنترل مد لغزشی فازی پیشنهادی، فاقد پدیده نامطلوب لرزش در ورودی کنترل است. بنابراین پیاده‌سازی عملی این کنترل کننده، امری امکان‌پذیر خواهد بود.

۴. بسیاری از کنترل کننده‌های مد لغزشی فازی، فاقد اثبات پایداری سامانه حلقه بسته هستند. درحالی که در کنترل پیشنهادی، با جدا شدن سطح لغزش  $Q$  از مقدار صفر و زیاد شدن آن، بلافاصله قضیه بخش ۷ برقرار شده و سطح لغزش  $Q$  به سمت صفر همگرا می‌شود.

۵. در کنترل پیشنهادی می‌توان با قرار دادن ضریب مقیاس کننده در ورودی سامانه فازی، به راحتی توابع عضویت موجود در قواعد فازی را به‌گونه‌ای تغییر داد تا سطح لغزش  $Q$  سریع‌تر به سمت صفر همگرا شود.

جدول (۱): مقایسه روش‌های کنترل پیشنهادی.

قابلیت توسعه برای سامانه‌های مراتب بالاتر	انرژی مصرفی	تعداد ضرایب کنترل	حجم محاسبات	سهولت در پیاده‌سازی عملی	روش پیشنهادی
ندارد	کم	۴	کم	پیچیده	کنترل ترکیبی پسگام-مد لغزشی فازی
دارد	زیاد	۶	زیاد	ساده	کنترل مد لغزشی فازی
به علت ساختار کنترل ترکیبی پسگام-مد لغزشی فازی و متغیر واسط $\varepsilon$ این روش تنها برای سامانه مرتبه دو قابل استفاده است.	در روش مد لغزشی فازی چون که هم‌زمان از دو معادلات زیرسامانه در طراحی کنترل‌کننده استفاده شده است دامنه ورودی زیاد و در نتیجه مصرف انرژی بالاتری دارد.	در روش کنترل ترکیبی پسگام-مد لغزشی فازی تنظیم ضریب $k_3$ امری زمان‌بر و مقادیر بزرگ آن باعث ایجاد نوسان می‌شود. بنابراین تنظیم آن از ضرایب کوچک به بزرگ و به‌صورت سعی و خطا انجام می‌شود. از طرفی در روش مد لغزشی فازی انتخاب بزرگ ضرایب $\alpha$ و $\gamma$ ، مطابق معادله (۳۷)، انتخاب بزرگ‌تر ضریب $\rho$ را به دنبال دارد و این امر باعث افزایش دامنه ورودی کنترل می‌شود.	از آنجا که معادلات دینامیکی دارای دو زیرسامانه است در طراحی کنترل ترکیبی پسگام-مد لغزشی فازی تنها از معادلات یک زیرسامانه استفاده شده است و لذا دارای حجم محاسبات کمتری است.	روش کنترل ترکیبی پسگام-مد لغزشی فازی مطابق بخش‌های ۴، ۱-۴ و ۵ دارای دو سامانه فازی به‌صورت وابسته می‌باشد که این حالت منتج به پیچیدگی در پیاده‌سازی می‌گردد.	توضیحات

## مطالعه موردی

معادلات دینامیکی این سامانه با استفاده از روش لاگرانژ به‌دست آمده و به قرار زیر است [۶]:

$$f_1(X) = \frac{m_t g \sin(x_1) - m_p L \sin(x_1) \cos(x_1) x_2^2}{L(\frac{4}{3}m_t - m_p \cos^2(x_1))}$$

$$b_1(X) = \frac{1}{L(\frac{4}{3}m_t - m_p \cos^2(x_1))}$$

$$f_2(X) = \frac{-\frac{4}{3}m_p L x_2^2 \sin(x_1) + m_p g \sin(x_1) \cos(x_1)}{\frac{4}{3}m_t - m_p \cos^2(x_1)} \quad (50)$$

$$b_2(X) = \frac{1}{\frac{4}{3}m_t - m_p \cos^2(x_1)}, \quad m_t = m_c + m_p$$

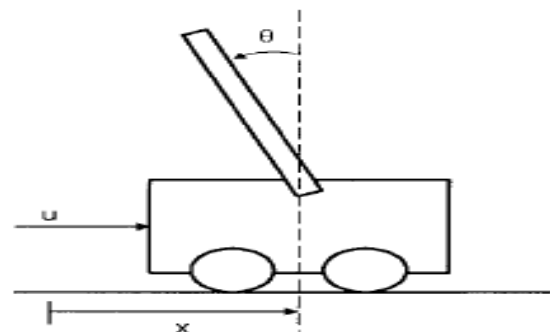
که  $m_c$  جرم گاری،  $m_p$  جرم لینک،  $L$  طول لینک و  $g$  شتاب جاذبه است. در معادلات فوق،  $x_1 = \theta$  زاویه پاندول،  $x_2 = \dot{\theta}$  سرعت زاویه‌ای پاندول،  $x_3 = x$  مسافت طی شده توسط گاری و  $x_4 = \dot{x}$  سرعت گاری هستند. پارامترهای سامانه که در این شبیه‌سازی‌ها مورد استفاده قرار گرفت، در جدول ۲ آمده است.

جدول (۲): پارامترهای سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی.

$m_p$	۰/۰۵ kg
$m_c$	۱ kg
$L$	۰/۵ m
$g$	۹/۸ m/s <sup>2</sup>

در این بخش از مقاله، برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی نشان داده شده در شکل ۴، پیاده‌سازی می‌شود.

برای بررسی عملکرد این سامانه، در ابتدا فرض بر آن است که زاویه پاندول مطابق شکل ۴ بزرگ‌تر از صفر است. برای اینکه پاندول به حالت عمود یا  $\theta = 0$  برود، باید گاری به سمت چپ رانده شده و سپس دوباره به موقعیت قبلی یعنی  $x = 0$  برگردد. در این صورت موقعیت مطلوب پاندول و گاری برابر با  $x = \theta = 0$  خواهد بود.

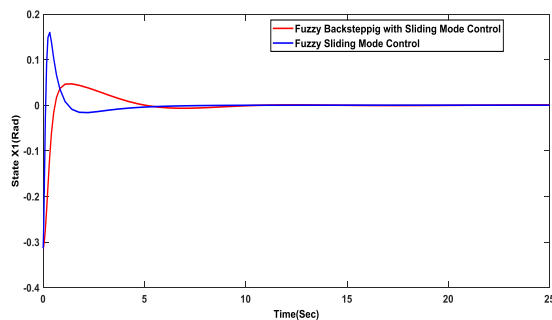


شکل (۴): سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی.

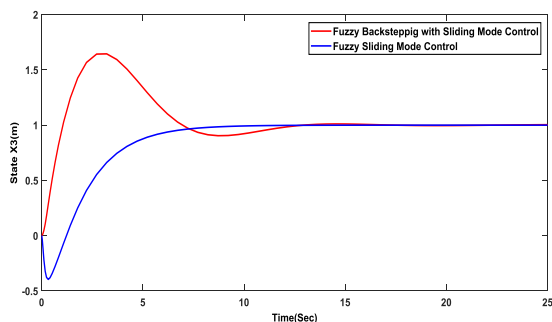
درحالی که بالازدگی موقعیت گاری با اعمال همین کنترل کننده بیشتر گردیده است. بنابراین عملکرد کنترل کننده های پیشنهادی، از نقطه نظر میزان بالازدگی متغیرهای حالت، در شرایط نسبتاً برابری قرار دارند.

اما مطابق شکل ۷، اندازه ی دامنه کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی بسیار کوچک تر از دامنه ورودی کنترل مد لغزشی فازی است. مطابق این شکل، اندازه بیشینه دامنه کنترل مد لغزشی فازی ۱۲ نیوتن است، درحالی که اندازه ی دامنه کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی ۸ نیوتن می باشد. بنابراین از نقطه نظر اندازه ی دامنه ورودی کنترل، عملکرد کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی قابل قبول تر است.

از شکل ۸ نتیجه می شود که کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی، به خوبی عمل نموده و متغیرهای  $\varepsilon$  و  $s$  را در ۱۵ ثانیه به سمت صفر همگرا نموده است. در شکل ۹ می بینیم که کنترل مد لغزشی فازی نیز سطوح لغزش  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  را در کمتر از ۵ ثانیه صفر نموده است. بنابراین کنترل مد لغزشی فازی در زمان کمتری توانسته است که زاویه پاندول و موقعیت گاری را به مقادیر مطلوب خود برساند.



شکل (۵): تغییرات زاویه پاندول معکوس تک لینکی با اعمال کنترل کننده های پیشنهادی.



شکل (۶): تغییرات موقعیت گاری با اعمال کنترل کننده های پیشنهادی.

### مرحله اول شبیه سازی:

در این مرحله برای اعمال اغتشاش خارجی یا دینامیک مدل نشده، فرض گردید که  $|d_1(t)| = |d_2(t)| \leq 0.05$  است. در طراحی پایگاه قواعد تقریبگر فازی  $g(s)$ ،  $\varepsilon_{max} = 0.9425$ ، توابع عضویت آن از نظر شکل، عنوان و مقدار مطابق با شکل ۱ انتخاب شد. در طراحی پایگاه قواعد کنترل کننده های پیشنهادی، توابع عضویتی عیناً نظیر تقریبگر فازی انتخاب نموده و برای لحاظ نمودن عدم قطعیت های ساختاری، فرض شد که پارامترهای  $f_1(X)$  و  $\hat{b}_1(X)$  برابر با ۸۵ درصد مقادیر جدول ۲ هستند و برای مواجهه شدن با اغتشاش متغیر با زمان خارجی از  $d_1(t) = d_2(t) = 0.05\sin(0.1t)$  استفاده گردید. بنابراین در این مرحله از شبیه سازی، کنترل کننده های پیشنهادی با عدم قطعیت های ساختاری و غیرساختاری روبرو هستند. مقادیر ضرایب کنترل ترکیبی پسگام با مد لغزشی فازی در جدول ۳ و ضرایب کنترل مد لغزشی فازی در جدول ۴ آمده اند.

جدول (۳): ضرایب کنترل کننده ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی.

$k_1$	۵
$k_2$	۱
$k_3$	۰.۵
$\rho_1$	۱۰

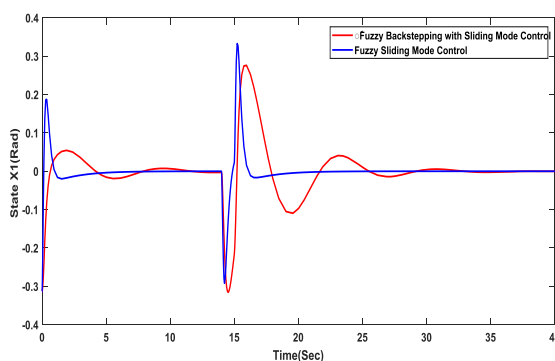
جدول (۴): ضرایب کنترل کننده مد لغزشی فازی.

$c_1$	۵
$c_2$	۰/۴۳
$\alpha$	۴
$\gamma$	۴
$k$	۲۲
$\rho$	۵

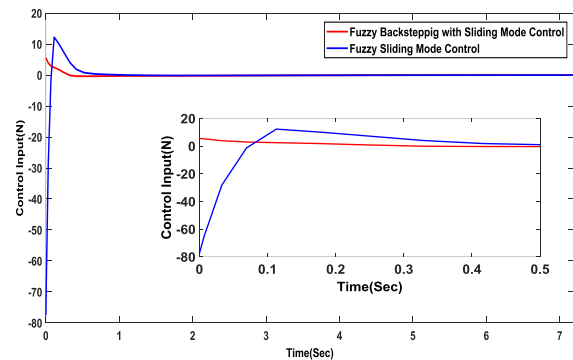
شرایط اولیه حالت های سامانه برابر با  $\theta = -0.1\pi$  و  $\dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$  تنظیم گردیده و مقادیر مطلوب برابر با  $x_a = 1$  و  $\theta_a = \dot{\theta}_a = \dot{x}_a = 0$  انتخاب شده اند. پس از اجرای شبیه سازی، از شکل های ۵ و ۶ نتیجه می شود که کنترل کننده های پیشنهادی به خوبی عمل نموده و در حضور تمامی عدم قطعیت های موجود، زاویه پاندول و موقعیت گاری را به سمت مقادیر مطلوب خود همگرا نموده اند. لازم به ذکر است که مطابق شکل ۵، بالازدگی زاویه پاندول با اعمال کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی کمتر است

مرحله اول انتخاب شد. پس از اجرای شبیه‌سازی، در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که پس از اعمال تلنگر، کنترل مد لغزشی فازی بهتر عمل می‌نماید و سریع‌تر و بدون هیچ‌گونه نوسانی، پاندول را به حالت قائم برمی‌گرداند. درحالی‌که پس از اعمال تلنگر، عملکرد کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی با نوسانات بالایی روبرو است و پس از ۱۵ ثانیه پاندول را به حالت قائم می‌رساند. از شکل ۱۱ نتیجه می‌شود که کنترل مد لغزشی فازی پس از اعمال تلنگر بلافاصله وارد عمل شده و در زمانی برابر با ۷ ثانیه موقعیت گاری را به حالت سابق برمی‌گرداند. اما کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی، این عمل را در زمانی برابر با ۲۰ ثانیه انجام می‌دهد. از طرف دیگر کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی، برای برگرداندن گاری به موقعیت سابق به ریلی با طول بیشتر از ۵ متر نیاز دارد.

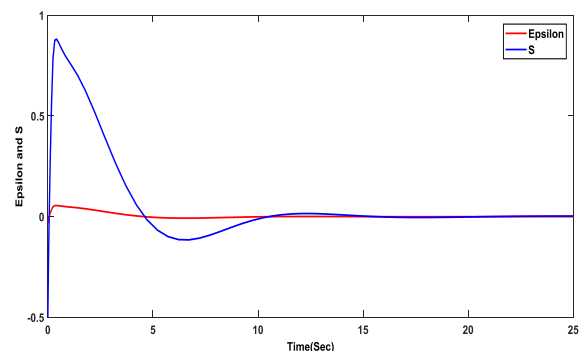
در شکل ۱۲ می‌بینیم که عملکرد مطلوب کنترل مد لغزشی فازی، با بیشینه دامنه‌ای برابر با ۵۰ نیوتن همراه است، درحالی‌که کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی دارای بیشینه دامنه‌ای برابر با ۸ نیوتن می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که کند بودن عملکرد کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی، به دامنه کوچک آن بر می‌گردد. در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که پس از اعمال تلنگر، کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی متغیرهای  $\epsilon$  و  $s$  را در زمانی برابر با ۲۰ ثانیه به سمت صفر همگرا نموده است. درحالی‌که مطابق شکل ۱۴، کنترل مد لغزشی فازی نیز سطوح لغزش  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $Q$  را در کمتر از ۷ ثانیه صفر نموده است. به عبارت دیگر شکل‌های ۱۳ و ۱۴، نتایج ارائه شده در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ را تأیید می‌نمایند.



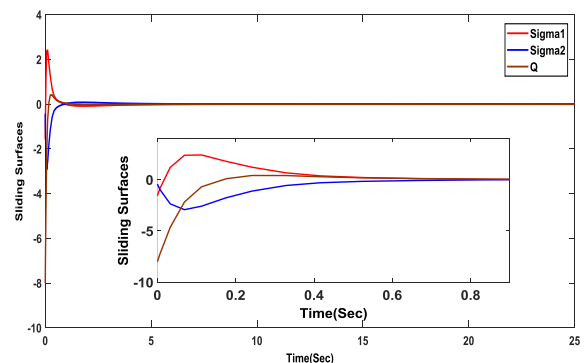
شکل (۱۰): تغییرات زاویه پاندول معکوس تک لینکی با اعمال تلنگر و در حضور کنترل‌کننده‌های پیشنهادی.



شکل (۷): دامنه‌های ورودی کنترل‌کننده‌های پیشنهادی.



شکل (۸): تغییرات  $\epsilon$  و  $s$  با اعمال کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی.



شکل (۹): تغییرات سطوح لغزش  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $Q$  با اعمال کنترل مد لغزشی فازی.

### مرحله دوم شبیه‌سازی:

در این بخش از شبیه‌سازی، برای ایجاد چالش بیشتر برای کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، یک انحرافی با زاویه ۰٫۳ رادیان بین ثانیه ۱۴ و ۱۵ به لینک پاندول اعمال می‌شود (به عبارت دیگر تلنگری بین ثانیه ۱۴ و ۱۵ به لینک پاندول وارد می‌گردد). لازم به ذکر است که شرایط حاکم بر این مرحله از شبیه‌سازی از لحاظ شرایط اولیه و حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری عیناً برابر با شبیه‌سازی



شکل (۱۴): تغییرات سطوح لغزش  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $Q$  با اعمال تلنگر و در حضور کنترل مد لغزشی فازی.

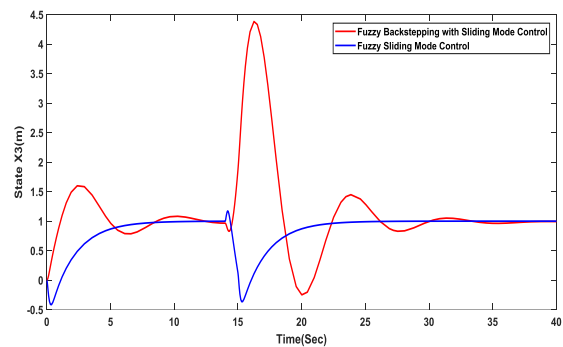
### مرحله سوم شبیه‌سازی:

این بخش از شبیه‌سازی از نظر شرایط اولیه، اعمال عدم قطعیت‌های ساختاری و اعمال تلنگر عیناً مطابق با مرحله دوم شبیه‌سازی است. با این تفاوت که برای اعمال عدم قطعیت‌های غیرساختاری و اغتشاشات خارجی از  $d_1(t)$  و  $d_2(t)$  با معادلات زیر استفاده شد:

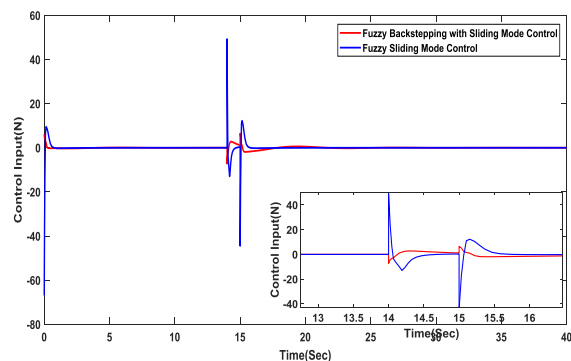
$$d_1(t) = d_2(t) = \begin{cases} 0.05 \sin(0.1t), & 0 < t \leq 10 \\ 0.06 \sin(0.2t), & 10 < t \leq 20 \\ 0.07 \sin(0.3t), & 20 < t \leq 40 \\ 0.08 \sin(0.4t), & 40 < t \leq 60 \end{cases} \quad (51)$$

از معادلات فوق نتیجه می‌گردد که دامنه و فرکانس اغتشاشات خارجی با گذشت زمان افزایش می‌یابد. پس از اجرای شبیه‌سازی، در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود که عملکرد کنترل مد لغزشی فازی، سریع‌تر از کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی است. اما با گذشت زمان و افزایش دامنه و فرکانس اغتشاشات خارجی، نتیجه می‌شود که کنترل مد لغزشی فازی نمی‌تواند از نوسانات زاویه پاندول جلوگیری نماید و دامنه نوسانات پاندول به ۰/۰۲ رادیان می‌رسد. درحالی‌که کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی در برابر اغتشاشات خارجی دارای عملکرد مطلوبی است و از بروز نوسانات زاویه پاندول جلوگیری می‌نماید. در شکل ۱۶ اثر اغتشاشات خارجی بر عملکرد کنترل مد لغزشی فازی مشهودتر است. از این شکل نتیجه می‌شود که عملکرد کنترل مد لغزشی فازی برای کنترل موقعیت گاری با نوسانی در حدود ۲۰ سانتی‌متر روبرو است، درحالی‌که کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی در کنترل موقعیت گاری به‌کندی عمل نموده است، ولی در نهایت از نوسانات موقعیت گاری جلوگیری نموده است.

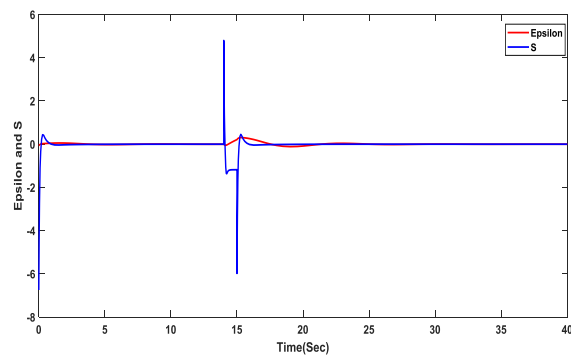
در شکل ۱۷ مشاهده می‌گردد که عملکرد مطلوب کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی در برابر اغتشاشات خارجی، با بیشینه دامنه کمتر از ۱۰ نیوتن همراه است. درحالی‌که کنترل مد لغزشی فازی با بیشینه دامنه ۵۰ نیوتن



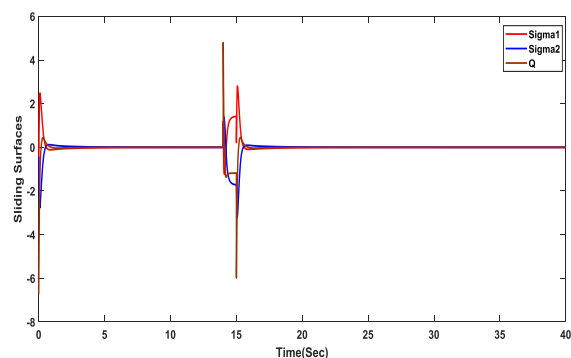
شکل (۱۱): تغییرات موقعیت گاری با اعمال تلنگر و در حضور کنترل کننده‌های پیشنهادی.

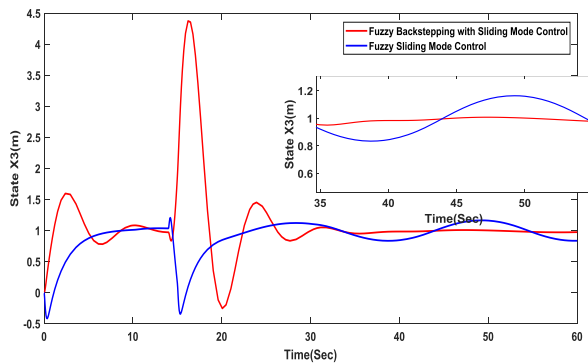


شکل (۱۲): دامنه‌های ورودی کنترل کننده‌های پیشنهادی با اعمال تلنگر.

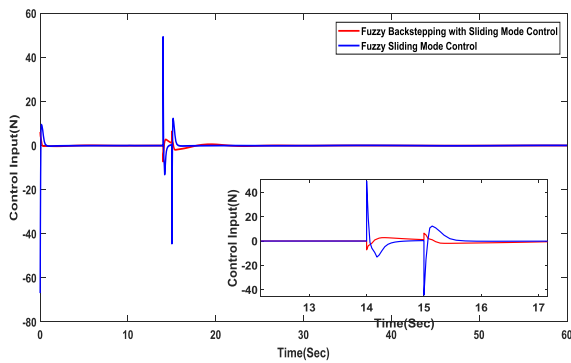


شکل (۱۳): تغییرات  $\epsilon$  و  $S$  با اعمال تلنگر و در حضور کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی.

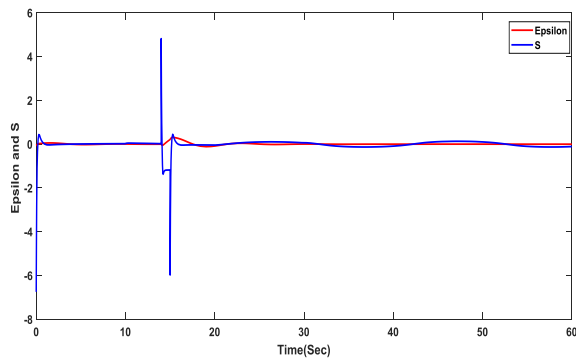




شکل (۱۶): تغییرات موقعیت گاری با اعمال تلنگر، اغتشاش خارجی با دامنه و فرکانس متغیر و در حضور کنترل کننده‌های پیشنهادی.



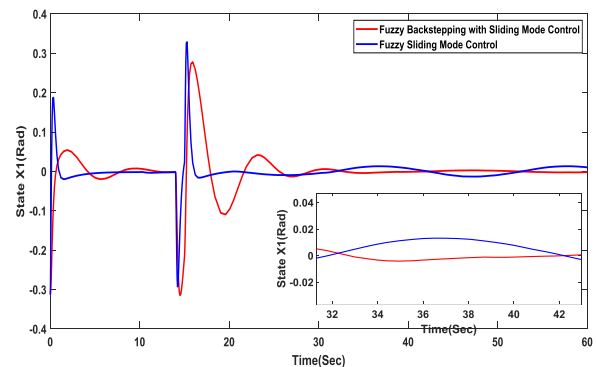
شکل (۱۷): دامنه‌های ورودی کنترل کننده‌های پیشنهادی با اعمال تلنگر و اغتشاش خارجی با دامنه و فرکانس متغیر.



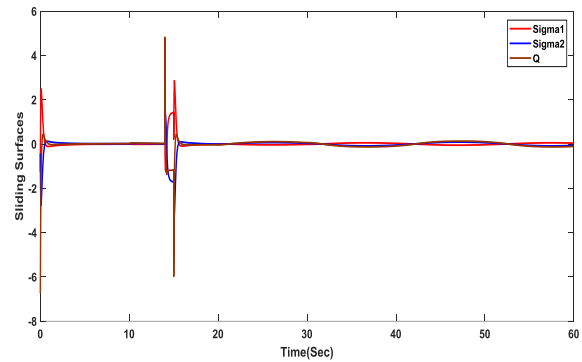
شکل (۱۸): تغییرات  $\epsilon$  و  $s$  با اعمال تلنگر، اغتشاش خارجی با دامنه و فرکانس متغیر و در حضور کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی.

قادر نیست که در برابر اغتشاشات خارجی، از بروز نوسانات متغیرهای حالت زاویه پاندول و موقعیت گاری جلوگیری نماید. در شکل ۱۸ مشاهده می‌شود که پس از اعمال تلنگر و اغتشاشات خارجی با دامنه و فرکانس متغیر، کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی به خوبی عمل نموده و متغیرهای  $\epsilon$  و  $s$  را به سمت صفر همگرا می‌نماید و میزان نوسانات این متغیرها را در محدوده بسیار کوچکی حفظ می‌نماید. مطابق شکل ۱۹، کنترل مد لغزشی فازی نیز پس از اعمال تلنگر و اغتشاشات خارجی، می‌تواند به خوبی سطوح لغزش  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $Q$  را به صفر هدایت نموده و نوسانات آن‌ها را بسیار محدود نماید.

با مقایسه شکل‌های ۱۸ و ۱۹ نتیجه می‌شود که عملکرد کنترل کننده‌های پیشنهادی در محدود نمودن دامنه نوسانات متغیرهای طراحی نظیر یکدیگر است، اما این نوسانات تأثیر زیادی بر عملکرد کنترل ترکیبی پسگام و مد لغزشی فازی نداشته است درحالی‌که همین نوسانات ناچیز، عملکرد کنترل مد لغزشی فازی را با چالش مواجه نموده و نوسانات زاویه پاندول و موقعیت گاری را با نوسانات زیادی همراه نموده است.



شکل (۱۵): تغییرات زاویه پاندول معکوس تک لینکی با اعمال تلنگر، اغتشاش خارجی با دامنه و فرکانس متغیر و در حضور کنترل کننده‌های پیشنهادی.



شکل (۱۹): تغییرات سطوح لغزش  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $Q$  با اعمال تلنگر، اغتشاش خارجی با دامنه و فرکانس متغیر و در حضور کنترل مد لغزشی فازی.

در جدول ۵ مقایسه نتایج عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی آورده شده است.

جدول (۵): مقایسه نتایج عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی

کنترل‌کننده‌های پیشنهادی	نتایج شبیه‌سازی مرحله اول				نتایج شبیه‌سازی مرحله دوم				نتایج شبیه‌سازی مرحله سوم			
	زمان نشست زاویه پاندول	زمان نشست موقعیت گاری	بیشینه دامنه ورودی کنترل	مقاوم در برابر اغتشاشات خارجی با بیشینه دامنه ۰/۰۵	زمان نشست زاویه پاندول	زمان نشست موقعیت گاری	بیشینه دامنه ورودی کنترل	مقاوم در برابر اغتشاشات خارجی با بیشینه دامنه ۰/۰۵ و تلنجر	زمان نشست زاویه پاندول	زمان نشست موقعیت گاری	بیشینه دامنه ورودی کنترل	مقاوم در برابر اغتشاشات خارجی با دامنه و متغیر و تلنجر
کنترل ترکیبی پسگام-مد لغزشی فازی	۱۰ ثانیه	۱۵ ثانیه	۸ نیوتن	مقاوم است	۱۵ ثانیه	۲۰ ثانیه	۸ نیوتن	مقاوم است	۱۵ ثانیه	۲۰ ثانیه	۸ نیوتن	مقاوم است
کنترل مد لغزشی فازی	۶ ثانیه	۸ ثانیه	۱۲ نیوتن	مقاوم است	۷ ثانیه	۷ ثانیه	۵۰ نیوتن	مقاوم است	دارای نوسان	دارای نوسان	۵۰ نیوتن	میزان مقاوم بودن آن کمتر است

## ۱۰- نتیجه گیری

ترکیبی پسگام و مد لغزشی پیشنهادی حفظ، اثبات پایداری سامانه حلقه بسته تضمین و دامنه ورودی کنترل در محدوده قابل قبولی باشد. در ادامه برای طراحی کنترل پیشنهادی دوم، تنها از روش کنترل مد لغزشی استفاده گردید. در راهکار پیشنهادی در ابتدا برای کنترل زیرسامانه‌های اول و دوم، سطوح لغزشی ارائه شد و سپس با ترکیب کنترل‌کننده‌های معادل و سطوح لغزش زیرسامانه‌ها، کنترل‌کننده‌ای برای پایداری سامانه حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های موجود، طراحی شد. در ادامه با بیان قضیه‌ای، پایداری مجانبی سراسری تمامی سطوح لغزش اثبات گردید. سپس برای بر طرف نمودن مشکل بروز لرزش در ورودی کنترل، با استفاده از منطق فازی، یک سامانه فازی طراحی شد تا مشکلات موجود را دفع و پایداری سامانه حلقه بسته را تضمین نماید. برای روشن‌تر شدن عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، مزایا و معایب هرکدام از راهکارهای پیشنهادی بیان گردید و بر اساس ملاک‌های که پیاده‌سازی عملی کنترل‌کننده‌ها را تضمین می‌نماید، مقایسه‌ای بین کنترل‌کننده‌های پیشنهادی ارائه شد. سرانجام برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی سامانه گاری با پاندول معکوس تک لینکی پیاده‌سازی گردید. نتایج این شبیه‌سازی‌ها، عملکرد راهکارهای پیشنهادی را به‌خوبی نشان می‌دهند.

در این مقاله، دو نوع کنترل‌کننده برای کنترل دسته خاصی از سامانه‌های فروتحریک با دو درجه آزادی ارائه شد. برای طراحی کنترل پیشنهادی اول، در ابتدا سامانه کلی به دو زیرسامانه اول و دوم تقسیم و برای هرکدام از آن‌ها، یک کنترل‌کننده ترکیبی پسگام و مد لغزشی طراحی گردید. کنترل‌کننده‌های ارائه شده تنها پایداری مجانبی سراسری این زیرسامانه‌ها را تضمین می‌نمایند، درحالی‌که هدف اصلی، تضمین پایداری سراسری کل سامانه حلقه بسته است. در ادامه برای تحقق این امر و ایجاد ارتباط بین زیرسامانه‌ها، یک تابع با ویژگی‌های خاصی ارائه شد که برای پیاده‌سازی آن از یک تقریبگر فازی استفاده گردید. در طراحی این تقریبگر فازی تلاش شد تا ویژگی‌های این تابع خاص، حداکثر با ۵ قاعده فازی یک ورودی- یک خروجی محقق شود تا حجم محاسبات آن بسیار پائین باشد. یکی از ویژگی‌های راهکار پیشنهادی این است که برای کنترل زیرسامانه‌های اول و دوم و در حالت کلی سامانه حلقه بسته، تنها اطلاعات مربوط به دینامیک‌های زیرسامانه اول لازم و کافی باشد. به همین دلیل کنترل پیشنهادی از حجم محاسباتی بسیار پائینی برخوردار است. در ادامه برای جلوگیری از بروز پدیده لرزش در ورودی کنترل و اجتناب از پدیده تشدید، با استفاده از نظریه فازی راهکاری ارائه شد. در طراحی این سامانه فازی تلاش گردید تا مزایای کنترل

## ۱۱- مراجع

11. Utkin, V., Sliding modes in control and optimization. Springer Science & Business Media, 2013.
12. Utkin, V., "Variable structure systems with sliding modes", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, No. 2, pp. 212-222, 1977.
13. Soltanpour, M.R., Zaare, S., Haghgoo, M. and Moattari, M., "Free-chattering fuzzy sliding mode control of robot manipulators with joints flexibility in presence of matched and mismatched uncertainties in model dynamic and actuators", Journal of Intelligent & Robotic Systems, Vol. 100, No. 1, pp. 47-69, 2020.
14. Soltanpour, M.R., Zolfaghari, B., Soltani, M. and Khooban, M.H., "Fuzzy sliding mode control design for a class of nonlinear systems with structured and unstructured uncertainties", International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol. 9, No. 7, pp. 2713-2726, 2013.
15. Soltanpour, M.R., Khooban, M.H. and Soltani, M., "Robust fuzzy sliding mode control for tracking the robot manipulator in joint space and in presence of uncertainties", Robotica, Vol. 32, No. 3, pp. 433-446, 2014.
16. Zaare, S. and Soltanpour, M.R., "Adaptive fuzzy global coupled nonsingular fast terminal sliding mode control of n-rigid-link elastic-joint robot manipulators in presence of uncertainties", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 163, pp. 108165, 2021.
17. Sankaranarayanan, V. and Mahindrakar, A.D., "Control of a class of underactuated mechanical systems using sliding modes", IEEE Transactions on Robotics, Vol. 25, No. 2, pp. 459-467, 2009.
18. Su, S.F., Hsueh, Y.C., Tseng, C.P., Chen, S.S. and Lin, Y.S., "Direct adaptive fuzzy sliding mode control for Under-actuated Uncertain Systems", International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, Vol. 15, No. 4, pp. 240-250, 2015.
19. Baklouti, F., Aloui, S. and Chaari, A., "Adaptive fuzzy sliding mode tracking control of uncertain underactuated nonlinear systems: a comparative study", Journal of Control Science and Engineering, Vol. 2016, No. 9283103, 2016.
20. Barbastegan, M., Bagheri, A., Yazdani, E. and Nezamivand Chegini, S., "Optimal Control of an Aircraft Pitch Angle using PID and Sliding Mode Control Based on PSO Algorithm",
1. Bandyopadhyay, S., Chung, S.J. and Hadaegh, F.Y., "Nonlinear Attitude Control of Spacecraft with a Large Captured Object", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 39, No. 4, pp. 754-769, 2016.
2. Choi, Y.C. and Ahn, H.S., "Nonlinear Control of Quadrotor for Point Tracking: Actual Implementation and Experimental Tests", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. Vol. 20, No. 3, pp. 1179-1192, 2015.
3. Alisher, K., Alexander, K. and Alexandr, B., "Control of the Mobile Robots with ROS in Robotics Courses", Procedia Engineering, Vol. 100, pp. 1475-1484, 2015.
4. Peza-Solis, J.F., Silva-Navarro, G. and Castro-Linares, N.R., "Trajectory Tracking Control in a Single Flexible-Link Robot using Finite Differences and Sliding Modes", Journal of Applied Research and Technology, Vol. 13, No. 1, pp. 70-78, 2015.
5. Zaare, S. and Soltanpour, M.R., "The position control of the ball and beam system using state-disturbance observe-based adaptive fuzzy sliding mode control in presence of matched and mismatched uncertainties", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 150, pp. 107243, 2021.
6. Chen, Y.F. and Huang, A.C., "Controller design for a class of underactuated mechanical systems", IET Control Theory & Applications, Vol. 6, No. 1, pp. 103-110, 2012.
7. Man, W.S. and Lin, J.S., "Nonlinear control design for a class of underactuated systems", In IEEE international conference on control applications (CCA), pp. 1439-44, 2010.
8. Soltanpour, M.R., "Fuzzy robust backstepping control design for control of underactuated mechanical systems with two degrees of freedom", AEROSPACE MECHANICS JOURNAL, Vol. 15, No. 1, pp. 123-135, 2019.
9. Reyhanoglu, M., van der Schaft, A., McClamroch, N.H. and Kolmanovskiy, I., "Nonlinear control of a class of underactuated systems", In Proceedings of the 35th IEEE conference on decision and control, Vol. 2, pp. 1682-1687, 1996.
10. Spong, M.W., "Underactuated mechanical systems", In: Control problems in robotics and automation, Springer-Verlag, pp. 135-150, 1998.

27. Din, S.U., Khan, Q., Rehman, F.U, and Akmeliawati, R., "Robust control of underactuated systems: Higher order integral sliding mode approach", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2016, No. 5641478, 2016.
28. Shah, I. and Rehman, F.U., "Smooth higher-order sliding mode control of a class of underactuated mechanical systems", *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 42, No. 12, pp. 5147-5164, 2017.
29. Din, S.U., Khan, Q., Rehman, F.U. and Akmeliawanti, R., "A Comparative Experimental Study of Robust Sliding Mode Control Strategies for Underactuated Systems", *IEEE Access*, Vol. 5, pp. 10068-10080, 2017.
30. Khalil, H.K., *Nonlinear systems third edition*. Patience Hall, 115, 2002.
31. Soltanpour, M.R., Khooban, M.H. and Niknam, T., "A robust and new simple control strategy for a class of nonlinear power systems: induction and servomotors", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 22, No. 6, pp. 1568-1592, 2016.
32. Ahmadnezhad, M. and Soltanpour, M., "Tracking performance evaluation of robust back-stepping control design for a nonlinear electrohydraulic servo system", *International Journal of Computer and Systems Engineering*, Vol. 9, No. 7, pp. 1224-1230, 2015.
- AEROSPACE MECHANICS JOURNAL, Vol. 15, No. 4, pp. 49-66, 2019.
21. Lo, J.C. and Kuo, Y.H., "Decoupled fuzzy sliding-mode control", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 3, pp. 426-435, 1998.
22. Márton, L., Hodel, A.S., Lantos, B. and Hung, J.Y., "Underactuated robot control: comparing LQR, subspace stabilization, and combined error metric approaches", *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 55, No. 10, pp. 3724-3730, 2008.
23. Park, M.S., Chwa, D. and Hong, S.K., "Decoupling control of a class of underactuated mechanical systems based on sliding mode control", In: *SICE-ICASE International Joint Conference*, Korea, October, pp. 806-810, 2006.
24. Lin, C.M. and Mon, Y.J., "Decoupling control by hierarchical fuzzy sliding-mode controller", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 13, No. 4, pp. 593-598, 2005.
25. Zaare, S. and Soltanpour, M.R., "Continuous fuzzy nonsingular terminal sliding mode control of flexible joints robot manipulators based on nonlinear finite time observer in the presence of matched and mismatched uncertainties", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 357, No. 11, pp. 6539-6570, 2020.
26. Hung, L.C. and Chung, H.Y., "Decoupled sliding-mode with fuzzy-neural network controller for nonlinear systems", *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 46, No. 1, pp. 74-97, 2007.

