

علمی- پژوهشی

ارائه مدل ریاضی استخراج ضرایب آیرودینامیکی در آزمایش آیروبالستیک مافوق صوت پرتابه

پیمان جعفری^۱، علی حقدل^۲، مبین حقدل^۳، معین حقدل^۴، مرتضی اسدپور^۵

مجموعه تحقیقاتی کاوشگر خورشید، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۷/۱۴)

چکیده

یکی از روش‌های دقیق اندازه‌گیری پارامترهای آیرودینامیکی، روش پرواز آزاد مدل در آزمایشگاه‌های آیروبالستیک می‌باشد. در این روش می‌توان مواردی از قبیل آزمایش مدل‌ها در محدوده وسیعی از سرعت‌های پروازی مادون، حدود، مافوق و ماوراء صوت، آزمایش مدل‌ها در ابعاد میلی‌متر تا آزمایش آن‌ها در ابعاد حدود متر، اندازه‌گیری پارامترهای مربوط به مسیر حرکت و پارامترهای آیرودینامیک و آیروالاستیک، بررسی عملکرد سامانه‌های کنترل وسیله طراحی شده، آزمایش تحمل دمایی مواد، بررسی تحمل سازه، بررسی مسائل برخورد با سرعت‌های بسیار بالا و بررسی مسائل بازگشت به جو زمین را بررسی نمود. در این آزمایشگاه ایستگاه‌هایی برای اندازه‌گیری داده‌های پروازی مدل در فواصل معین قرار گرفته است که با روش‌هایی از قبیل تصویربرداری و تله‌متری داده‌ها استخراج می‌شود. مسئله مطرح ارائه یک مدل ریاضی مناسب و با خطای کم به منظور استخراج ضرایب آیرودینامیکی از داده‌های خام اندازه‌گیری شده با توجه به تعداد ایستگاه‌های اندازه‌گیری و فواصل آن‌ها می‌باشد. لذا در این کار یک بررسی اجمالی استخراج ضرایب آیرودینامیکی در آزمایش آیروبالستیک برای استفاده از داده‌های تصویربرداری انجام شده و به‌عنوان یک ابزار و روش این کار ارائه گردیده است. با توجه به نتایج ارائه شده می‌توان گفت که استخراج ضرایب استاتیکی و دینامیکی مستقل از هم نیست و باید به‌طور هم‌زمان محاسبه شوند. در صورتی که ضرایب دینامیکی مقدار قابل توجهی داشته باشند نمی‌توان از آنها صرف‌نظر کرد. دقت مورد نیاز اندازه‌گیری در حالتی که ضرایب دینامیکی باعث استهلاک نوسانات شده‌اند، با ۲۰ ایستگاه حدود ۰/۱ درجه است؛ در حالی که با ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۱ درجه کفایت نمی‌کند و دقت بالاتر از آن نیاز است.

واژه‌های کلیدی: آزمایش آیروبالستیک، پرتابه مافوق صوت، ضرایب آیرودینامیکی، پرواز آزاد مدل

The Presentation of a Mathematical Model for Aerodynamic Coefficients Extraction in Supersonic Aeroballistics Projectile Test

Jafari, P., Haghdel, A., Haghdel, M., Haghdel, M., and Asadpour, M.

Kavoashgar Khorshid Research Center, Shiraz University

(Received: 19/June /2020 ; Accepted: 06/October/2021)

ABSTRACT

The precise method for aerodynamic parameters measurement in aeroballistics labs, is the free flight method. It can be used to test different models at a wide range of flight speeds including subsonic, transonic, supersonic and hypersonic speeds, and in the millimetric to metric range dimensions. It can be utilized to measure the path-equation related parameters and the aerodynamic and aeroelastic parameters. Moreover, it has the capability for checking the performance of designed control systems, testing material temperature tolerance, testing structural strength and addressing high-speed collision and re-entry problems. In this lab, stations for measuring flight model data are located at certain distances that extract data using imaging and telemetry techniques. The main goal is to provide a suitable mathematical model with precise accuracy in order to extract aerodynamic coefficients from raw data measured according to the number of measurement stations and their intervals. Therefore, for the purpose of using imaging data, an overview of aerodynamic coefficients extraction in the aeroballistics test is carried out. The results show that static and dynamic coefficients are not independent in extraction and should be calculated simultaneously. Dynamic coefficients cannot be ignored if the magnitudes are significant. The measurement accuracy required when the dynamic coefficients cause the damping of the oscillations is about 0.1 degree with 20 stations, while the accuracy of 0.1 degree with 10 stations is inadequate and higher than that is required.

Keywords: Aeroballistics Test, Supersonic Projectile, Aerodynamic Coefficients, Model Free Flight

۱- کارشناس ارشد: jafaritayeblo@gmail.com

۲- استادیار (نویسنده پاسخگو): haghdel@shirazu.ac.ir

۳- دکتری: mhaghdel@sums.ac.ir

۴- کارشناس ارشد: haghdelm@sums.ac.ir

۵- کارشناس ارشد: morteza.asadpoor@chmail.ir

۱- مقدمه

مورد نظر برای محاسبه، مسائل مختلف سازه‌ای و مقاومت مصالحی اجزا و ...، در جایگاه کاربری خود مورد استفاده قرار می‌گیرند [۴]. در بین روش‌های موجود برای آزمایش مدل، هزینه و زمان نیز نقش مهمی در انتخاب روش بازی می‌کند.

تونل‌های باد بر اساس محدوده‌های سرعت جریان به صورت تونل‌های باد مادون^۵، حدود^۶ و یا مافوق^۷ صوت دسته‌بندی می‌شوند. برای آزمایش مدل‌ها در تونل باد دو مشکل عمده وجود دارد. یکی آنکه تونل باد برای بعضی از محدوده مافوق و ماوراء^۸ صوت جوابگو نیست و ممکن است که نتوان در این محدوده سرعت جریان، آزمایشی را در تونل‌های باد انجام داد، دیگر آنکه برای محدوده مافوق صوت با ماخ‌های بالا (حدود ماخ ۲ به بالا) هزینه آزمایش‌های تونل باد زیاد می‌گردد و شاید آزمایش مدل در آن محدوده به صرفه نباشد.

به خاطر چنین مشکلاتی، روش‌های دیگری هم ارائه گردیده است که از جمله آن می‌توان به روش‌های پرتاب مدل و از جمله فن‌آوری آزمایش با پرتابگر گاز سبک^۹ اشاره کرد [۵]. در این روش، مدل را به وسیله گاز پرفشار پرتاب می‌کنند و پارامترهای مورد نظر را با روش‌های مختلفی از جمله اشعه ایکس^{۱۰}، تصویربرداری^{۱۱} و یا سامانه‌های راداری و تله‌متری اندازه‌گیری می‌کنند [۶-۸]. این روش به نام آزمایش آیرودینامیک نیز معرفی می‌گردد. حال بسته به نوع گاز مورد استفاده، نحوه فشردگی گاز، ابعاد مدل و سامانه پرتاب، عملکرد سامانه پرتابگر گاز سبک متفاوت می‌گردد و بر اساس همین موارد، این سامانه‌ها دسته‌بندی‌های مختلفی شده‌اند. از مزایا و قابلیت‌های سامانه‌های پرتابگر گاز سبک می‌توان به مواردی از قبیل آزمایش مدل‌ها در محدوده وسیعی از سرعت‌های پروازی از جمله مادون، حدود، مافوق و ماوراء صوت (که اکثراً در محدوده‌های مافوق صوت و ماوراء صوت از آن‌ها استفاده می‌شود)، آزمایش مدل‌ها در ابعاد میکرو متر^{۱۲} [۹] تا آزمایش آن‌ها در ابعاد حدود متر،

معمولاً در طراحی یک وسیله پروازی نیاز است که اجزای مختلف طراحی از نظر صحت عملکرد آزمایش شوند. روش‌های آزمایش متفاوتی وجود دارد که می‌توان آن‌ها را به دو دسته کلی تقسیم‌بندی کرد: یکی آنکه خود نمونه اصلی با ابعاد و اندازه واقعی ساخته شود و اجزاء مختلف آن تحت آزمایش قرار گیرد، دیگر آنکه مدلی کوچک‌تر از نمونه واقعی^۱ ساخته شود و آن را آزمایش کرده و از طریق قوانین تشابه مربوطه، اطلاعات نمونه اصلی تعیین گردد. معمولاً دسته اول بسیار پرهزینه، زمان‌بر و انرژی‌بر است و مقرون به صرفه نیست که از همان ابتدا نمونه اصلی ساخته و آزمایش‌ها روی آن انجام شود. در ضمن شاید در مراحل مختلف طراحی و آزمایش نیاز شود که اجزایی از طرح تغییر یابد و تغییر آن باعث تغییر کل ساختار می‌گردد و هزینه زیاد این کار ممکن است باعث تعطیلی کل پروژه گردد. البته گاهی اوقات ممکن است ساخت مدل از نمونه اصلی امکان‌پذیر نباشد و یا ساخت مدل تفاوت زیادی در هزینه ایجاد نکند، مثل طراحی‌هایی که ابعاد وسیله بزرگ نباشد و یا جاهایی که نتوان تشابه بین مدل و نمونه اصلی ایجاد کرد و در این صورت باید از همان آزمایش نمونه اصلی استفاده کرد [۱].

به غیر از موارد فوق، در اکثر موارد از آزمایش تجربی مدل‌های کوچک‌تر از نمونه اصلی برای بررسی صحت عملکرد و درستی طراحی استفاده می‌شود که این کار به شدت هزینه‌ها را کاهش می‌دهد و تغییرات در طراحی اجزای سامانه را راحت‌تر می‌کند.

بر همین اساس روش‌های مختلفی برای انجام آزمایش‌های آیرودینامیکی بر روی مدل وجود دارد که از جمله آن می‌توان به آزمایش‌های استاتیک و دینامیک در تونل باد^۲، آزمایش‌های پرواز آزاد مدل^۳، آزمایش‌های سقوط آزاد مدل^۴ و غیره اشاره کرد [۲ و ۳]. هر کدام از روش‌های آزمایش بسته به عواملی از قبیل نوع طراحی، نوع وسیله پروازی مورد طراحی، سرعت پروازی وسیله، پارامترهای

⁵ subsonic

⁶ transonic

⁷ supersonic

⁸ hypersonic

⁹ light gas gun testing

¹⁰ X-Ray

¹¹ photography

¹² micro scale

¹ Scaled model

² static and dynamic wind tunnel test

³ free flight testing models

⁴ drop model testing

- آزمایش‌های پروازی جهت تعیین خصوصیات آیرودینامیک حرارتی بر روی جسم و کاربرد عایق‌های مختلف

- آزمایش‌های پروازی جهت تعیین نیروها و گشتاورهای مختلف وارده به اجزای جسم پروازی مانند یال‌ها و بالک‌ها

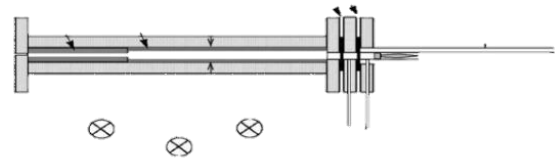
البته تمامی آزمایش‌های فوق را می‌توان در همه محدوده‌های سرعت (مادون، حدود، مافوق و ماوراء صوت) انجام داد و اطلاعات کلی از ضرایب نیروها و گشتاورها و خصوصیات پروازی و حرارتی استخراج نمود، اما به‌دست آوردن تمامی اطلاعات با دقت مورد نیاز به‌ویژه برای اجزاء کوچک‌تر مانند بالک‌ها منوط به در دست داشتن حسگرها و روش‌های مناسب برای این کار است که در عمل با توجه به هزینه و طراحی مدل و محدودیت‌های آن می‌بایست به‌صورت مجزا تصمیم‌گیری شود. با توجه به پیشرفت‌های اخیر در زمینه الکترونیک، پردازش اطلاعات و فیلم‌برداری سریع می‌توان امیدوار بود که هزینه روش‌های پروازی مدل به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یابد و در سطح وسیع‌تری به‌کار گرفته شود.

اصولا یک آزمایشگاه آیروبالستیک از سه قسمت عمده شامل: سامانه پرتابگر مدل و خود مدل، میدان پروازی و تجهیزات اندازه‌گیری تشکیل شده است [۱۵].

در این آزمایشگاه ایستگاه‌هایی برای اندازه‌گیری داده‌های پروازی مدل در فواصل معین قرار گرفته است که با روش‌هایی از قبیل تصویربرداری، پرتو ایکس و تله‌متری داده‌ها را استخراج می‌کنند. مسئله‌ای که مطرح است استخراج ضرایب ایرودینامیکی از این داده‌ها می‌باشد. البته کارهای عددی متعددی در زمینه شبیه‌سازی عددی پرواز آزاد پرتابه‌هایی با هندسه‌های خاص صورت گرفته است [۱۶-۱۹]. در بعضی از کارها از دینامیک سیالات محاسباتی و روش حجم محدود استفاده شده است. در شبیه‌سازی دینامیک سیالات محاسباتی^۳، معادلات دینامیکی سیال اساسی برای یک پیکربندی خاص عددی حل می‌شوند. این کدهای رایانه‌ای قادر به محاسبه دقیق با استفاده از معادلات ناویر استوکس هستند [۲۰ و ۲۱]. حال چیزی که اهمیت دارد استفاده درست و بجا از داده‌های پرواز و روابط ریاضی

اندازه‌گیری پارامترهای مربوط به مسیر حرکت و پارامترهای آیروبالستیک، بررسی عملکرد سامانه‌های کنترل وسیله طراحی شده، آزمایش تحمل دمایی مواد، بررسی تحمل سازه مدل و نمونه اصلی، بررسی مسائل برخورد با سرعت‌های بسیار بالا^۱ [۱۰]، بررسی مسائل بازگشت به جو زمین^۲ و خروج از جو زمین و مواردی از این قبیل اشاره کرد [۱۱ و ۱۲].

در شکل ۱ شمای یک سامانه گازی پرتابگر مدل نشان داده شده است. در این سامانه گاز پرفشار که می‌تواند از گازهای سبک با وزن مولکولی کم مثل هیدروژن یا هلیم و یا از گازهای معمولی مثل هوا و نیتروژن باشد، برای پرتاب مدل استفاده می‌شود. به این صورت که گاز پرفشار وارد مخزنی استوانه‌ای می‌گردد که به این مخزن لوله شتاب‌دهنده متصل است و درون لوله، مدل قرار دارد. در محل اتصال لوله به مخزن و به عبارتی پشت مدل یک شیر کنترلی یا یک دیافراگم واقع شده است [۱۳].



شکل (۱): شمای یک نمونه سامانه گازی تک‌مرحله‌ای

به‌طور کلی آزمایشاتی که به‌وسیله پرتاب مدل و آزمایشگاه آیروبالستیک می‌توان آن‌ها را انجام داد، به شرح زیر می‌باشند:

- آزمایش‌های پروازی جهت تعیین ضرایب استاتیکی مدل صلب [۶]

- آزمایش‌های پروازی جهت تعیین ضرایب دینامیکی مدل صلب [۷]

- آزمایش‌های پروازی جهت تعیین مودهای آیروبالستیک بدنه، فرکانس و استهلاک و سرعت فلاتر بدنه [۱۴]

³ Computational Fluid Dynamics

¹ hyper velocity impact
² entry , reentry

$$\frac{m}{q} \ddot{x} = C_{fx_0} + C_{fx_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) - C_{fz_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) \theta \quad (5)$$

$$\frac{m}{q} \ddot{z} = \left(C_{fx_0} + C_{fx_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) \right) \theta + C_{fz_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) + \frac{mg}{q} \quad (6)$$

$$\frac{I}{q} \ddot{\theta} = \left(C_{my_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) D \right) \quad (7)$$

حال اگر در معادله اول تنها ترم اول را نگه داریم و در معادله دوم از ترم اول که مربوط به اثرات ضرایب محوری بر حرکت عمود بر محور است صرف نظر کنیم، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{q}{m} C_{fx_0} \Rightarrow \dot{u} = \frac{\rho A C_{fx_0}}{2m} u^2 \quad (8) \\ \Rightarrow -\frac{1}{u} + \frac{1}{U_0} &= \frac{\rho A C_{fx_0}}{2m} t \Rightarrow u \\ &= \frac{-2mU_0}{\rho U_0 A C_{fx_0} t - 2m} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{m}{q} \ddot{z} = C_{fz_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) + \frac{mg}{q} \\ \frac{I}{q} \ddot{\theta} = \left(C_{my_\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) D \right) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{m}{C_{fz_\alpha}} (\ddot{z} - g) &= \frac{I \ddot{\theta}}{D C_{my_\alpha}} \\ \Rightarrow \frac{m D C_{my_\alpha}}{I C_{fz_\alpha}} (\ddot{z} - g) &= \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{m D C_{my_\alpha}}{I C_{fz_\alpha}} \left(z - g \frac{t^2}{2} \right) &= \theta - \theta_0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{\dot{z}}{u} = \frac{\dot{\theta} I C_{fz_\alpha}}{u m D C_{my_\alpha}} + \frac{gt}{u} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \frac{I}{q} \ddot{\theta} - \frac{I C_{fz_\alpha}}{u m} \dot{\theta} - C_{my_\alpha} D \theta = \frac{gt C_{my_\alpha} D}{u} \quad (12)$$

در این معادله q و u تابعی از زمان هستند که باعث می شود معادله از حالت ضریب ثابت خارج شود. برای حل این معادله می توان تابع سرعت بر حسب زمان را جای گذاری کرد و به معادله اوایلر-کوشی رسید. حل این معادله منجر به جوابی به شکل معادله ۱۳ می شود که با توجه به پیچیدگی آن برای انطباق منحنی مناسب نیست.

$$\theta = (t + \tau)^\xi \left(C_1 \cos(\xi \log(t + \tau)) + C_2 \sin(\xi \log(t + \tau)) \right) \quad (13)$$

حاکم که بتواند با دقت بالاتری ضرایب پروازی را از آن ها استخراج کرد. لذا در این کار یک بررسی اجمالی استفاده ضرایب آیرودینامیکی در آزمایش آیروبالستیک برای استفاده از داده های تصویربرداری انجام گردیده است و به عنوان یک ابزار و متد این کار در آینده ارائه می گردد.

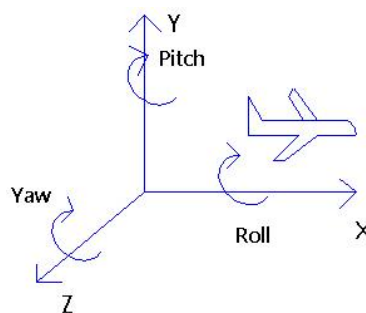
۲- روابط ریاضی حاکم و حل تحلیلی معادلات

در آزمایش آیروبالستیک پیچیدگی های زیادی می تواند ظاهر شود. برای سادگی کار روند به صورت پله پله از حالت ساده به حالت کامل ارائه می شود. در ابتدا فرض شده است پرتاب به صورت افقی و با زاویه پیچ اولیه و بدون سرعت زاویه ای شلیک شود. در شکل ۲ دستگاه مختصات نشان داده شده است. همچنین فرض شده است حرکت سه درجه آزادی باشد. در نتیجه معادلات سه درجه آزادی در دستگاه اینرسی به صورت زیر نوشته می شود [۲۲]:

$$\frac{m}{q} \ddot{x} = (C_{fx_0} + C_{fx_\alpha} \alpha) \cos(\theta) - C_{fz_\alpha} \alpha \sin(\theta) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{q} \ddot{z} &= (C_{fx_0} + C_{fx_\alpha} \alpha) \sin(\theta) + C_{fz_\alpha} \alpha \sin(\theta) \\ &+ \frac{mg}{q} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{I}{q} \ddot{\theta} = (C_{my_\alpha} \alpha D) \quad (3)$$



شکل (۲): دستگاه مختصات بدنی متصل به پرتابه (x جهت پرتاب است)

اگر فرض شود زاویه حمله و زاویه پیچ کوچک باشند، داریم:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \tan\left(\frac{dz}{dx}\right) + \theta \approx \frac{dz}{dx} + \theta \\ \cos(\theta) &\approx 1, \sin(\theta) \approx \theta \end{aligned} \quad (4)$$

و معادلات به صورت زیر در می آید:

برای حل عددی به جای استفاده از معادله دستگاه اینرسی از دستگاه بدنی استفاده شده است:

$$C_{fx_0} + C_{fx_\alpha} \alpha = \frac{m}{q} (\dot{u} + w\dot{\theta}) \quad (17)$$

$$C_{fz_\alpha} = \frac{m}{q} (\dot{w} - u\dot{\theta} - g) \quad (18)$$

$$C_{my_\alpha} \alpha q D = I \ddot{\theta} \quad (19)$$

۳- نتایج و بحث در نتایج

برای مقایسه جواب عددی و تحلیلی مقادیر اعداد ثابت از قرار زیر وارد شد:

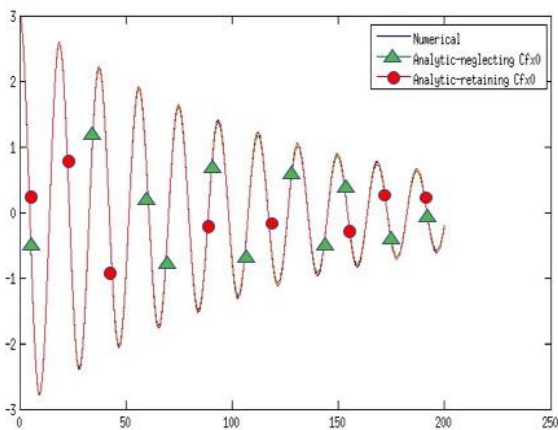
$$m = 0.3 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}, I = \frac{ml^2}{12} \quad (20)$$

$$\rho = 1.225 \text{ Kg/m}^3, g = 0 \text{ m/s}^2, D = 0.025 \text{ m}$$

$$C_{fx_0} = -0.55, C_{fx_\alpha} = -0.02, C_{fz_\alpha} = -0.23$$

$$C_{my_\alpha} = -1/16, U_0 = 700 \text{ m/s}, \theta_0 = 3 \text{ deg}$$

بر اساس فاصله مرکز جرم و مرکز فشار مدل ساخته شده، جسم ۵ کالیبر، پایداری دارد که مقدار زیادی است (کالیبر نسبت تفاضل فاصله مرکز جرم و مرکز فشار بر قطر مدل می باشد). نمودار زاویه بر حسب مکان برای سه حالت عددی، حل ضریب ثابت و حل معادله اوپلر به صورت زیر است (شکل ۳):



شکل (۳): نمودار زاویه بر حسب مکان برای ۵ کالیبر

پایداری

انطباق خوبی بین سه منحنی دیده می شود و می توان نتیجه گرفت که فرضیات اعمال شده مناسب هستند.

برای حل این مشکل می توان معادله را به جای اینکه بر حسب زمان بنویسیم، بر حسب مکان نوشت. در این صورت به معادله زیر می رسیم [۲۲]:

$$\frac{2I}{\rho A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left(\frac{-I}{m} C_{fz_\alpha} + \frac{2ul}{\rho u^2 A} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} - C_{my_\alpha} D \theta = \frac{gt C_{my_\alpha} D}{u} \quad (14)$$

این معادله هم هنوز یک ترم غیر ثابت دارد؛ اما با استفاده از معادله نیرو در جهت x می توان با در نظر داشتن فرض اعمال شده در مورد این معادله، ترم ضریب غیر ثابت را از بین برد:

$$\frac{2I}{\rho A} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{I}{m} (-C_{fz_\alpha} + C_{fx_0}) \frac{\partial \theta}{\partial x} - C_{my_\alpha} D \theta = \frac{gt C_{my_\alpha} D}{u} \quad (15)$$

این معادله کاملاً ضریب ثابت است و به نظر مطلوب می رسد. این معادله و معادله اوپلر-کوشی دقیقاً فرضیات یکسانی دارند و جواب های یکسانی هم خواهند داد؛ اما نکته قابل توجه این است که در ابتدا در معادله راستای Z از ضریب نیروی محوری در مقابل نیروی نرمال صرف نظر شد. اگر در پراتنز رابطه بالا از این ضریب صرف نظر نگردد، بدین معنا خواهد بود که در بخشی از حل از این ضریب صرف نظر کرده و در بخشی صرف نظر نشده که می تواند به جای افزایش دقت به کاهش دقت منجر شود (البته در ادامه در نمودارها نشان داده می شود که نتایج بهبود می یابد).

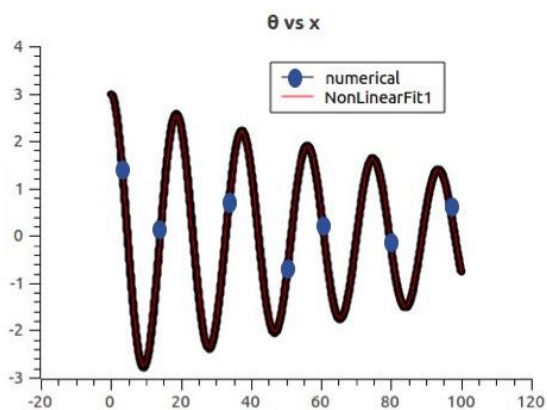
اگر همانند فرض اولیه، ترم نیروی محوری را صرف نظر کنیم، جواب همگن معادله ضریب ثابت به صورت زیر خواهد شد:

$$\theta = \theta_0 e^{\tau x} \left(\cos(\xi x) - \frac{\tau}{\xi} \sin(\xi x) \right) \quad (16)$$

$$\tau = \frac{C_{fz_\alpha} \rho A}{4m}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{\frac{-C_{fz_\alpha}^2}{m^2} - \frac{8C_{my_\alpha} D}{\rho A I}}}{\frac{4}{\rho A}}$$

این معادله برای انطباق منحنی معادله خوبی است. برای صحت سنجی فرضیات به کار رفته این معادله با جواب حل عددی معادله اصلی مقایسه شده است.



شکل (۵): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

نتایج انطباق، متغیرها را به صورت جدول ۱ به دست آورده است:

جدول (۱): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار بدست آمده | مقدار واقعی | |
|----------|-----------------|-------------|----------------|
| ۰/۰۷۸۸۹ | ۳/۰۰۲۳ | ۳ | θ_0 |
| -۳/۷۱۳۶ | -۰/۲۲۴۶ | -۰/۲۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| -۰/۳۸۸ | -۱/۱۶۲ | -۱/۱۶۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

اما از آنجا که کل داده‌ها با دقت کامل در دسترس نیست بایستی حالت داده برداری تصویری را شبیه سازی کرد. از آنجا که در این حالت تعداد داده‌ها بسیار کمتر از داده‌های اصلی (حالت بالا) خواهد بود، انطباق منحنی غیرخطی می‌تواند دارای جواب‌های مختلف به شکل معادله تعریف شده فوق‌الذکر باشد. در نتیجه حدس اولیه ورودی نرم افزار برای انطباق منحنی در جواب نهایی تأثیرگذار خواهد بود. در این مسأله جواب صحیح به شرح زیر است:

$$\theta_0=3, \quad \tau=0/084035, \quad \xi=0/33596 \quad (22)$$

در ادامه در ابتدا فرض می‌شود جواب مسأله با دقت خوبی وجود دارد و در نتیجه مقادیر نزدیک به جواب صحیح به عنوان داده اولیه به نرم افزار داده می‌شود. مقادیر داده شده در انطباق منحنی به شرح زیر است:

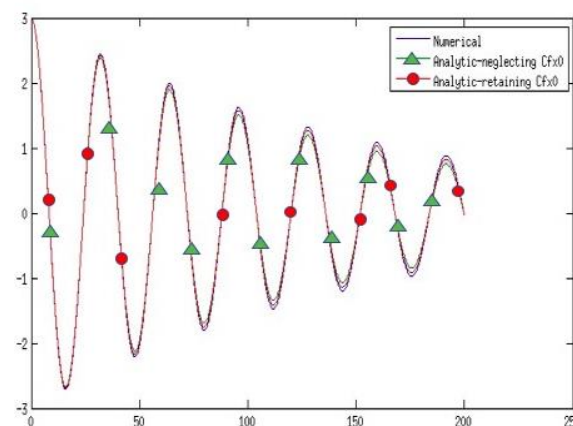
$$\theta_0=3, \quad \tau=0/08, \quad \xi=0/33 \quad (23)$$

همچنین ضرایب دیگری هم فرض شد که در آن میزان پایداری ۲ کالیبر و مقدار نیروی پسا حدود ۵۰ درصد افزایش داده شد که در شکل ۴ مشاهده می‌شود.

$$C_{fx_0} = -0/75, \quad C_{fx\alpha} = -0/003 \quad (21)$$

$$C_{fz\alpha} = -0/2, \quad C_{my\alpha} = -0/4$$

نتیجه:



شکل (۴): نمودار زاویه بر حسب مکان برای ۲ کالیبر پایداری

دیده می‌شود که در این حالت اختلاف بین منحنی‌ها بیشتر شده است اما هنوز به نظر قابل قبول می‌آید. همچنین در هر دو حالت صرف نظر نکردن از ضریب نیروی محوری باعث بهبود در نتایج شده است و بنابراین بهتر است در ادامه نگه داشته شود.

۳-۱- مشابه سازی داده برداری توسط عکس برداری

همان طور که در مقدمه اشاره گردید در آزمایشگاه آیروبالستیک از ایستگاه‌های تصویربرداری برای ثبت نتایج پرواز مدل استفاده می‌گردد که در هر ایستگاه که در فواصل مشخص در محدوده پرتاب قرار گرفته‌اند، تصاویر مدل پرتابی ثبت می‌گردد و یک سری از پارامترهای پروازی از قبیل سرعت، زوایای مدل، نرخ تغییرات و ... ثبت می‌گردد. حال در ادامه کل نتایج حل عددی به نرم افزار وارد شده تا منحنی مشابه با رابطه به دست آمده بر آن منطبق و میزان صحت ضرایب چک شود که در شکل ۵ مشاهده می‌شود.

و اگر دقت داده‌برداری ۰/۵ درجه باشد نتایج آن در جدول ۴ آورده شده است:

جدول (۴): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۲۰ ایستگاه

| ۲۰ ایستگاه دقت ۰/۵ | مقدار واقعی | مقدار به‌دست‌آمده | درصد خطا |
|-----------------------|-------------|-------------------|----------|
| θ_0 | ۳ | ۳/۰۶۲ | ۲/۰۷۵۱ |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۳۳ | -۰/۲۲۶ | -۲/۸۵۶۳ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۶۶ | -۱/۱۶۵ | -۰/۱۱۱ |

و اگر دقت داده‌برداری ۱ درجه باشد نتایج آن در جدول ۵ آورده شده است:

جدول (۵): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۲۰ ایستگاه

| ۲۰ ایستگاه دقت ۱ | مقدار واقعی | مقدار به‌دست‌آمده | درصد خطا |
|---------------------|-------------|-------------------|----------|
| θ_0 | ۳ | ۳/۱۳۶۲ | ۴/۵۴۳۰ |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۳۳۳۳ | -۰/۲۲۸۶۷ | -۱/۹۹۷۵ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۶۶ | -۱/۱۷۵۸ | ۰/۷۸۶۹۴ |

اگر در داده‌ها نویزی به مقدار ۰/۱ درجه و دقت داده‌برداری هم ۰/۱ درجه باشد نتایج آن در جدول ۶ آورده شده است:

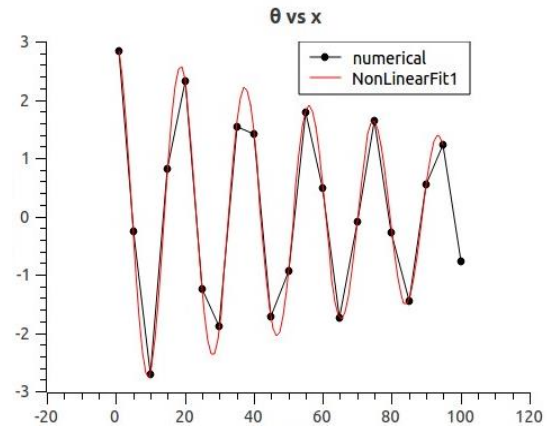
جدول (۶): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۲۰ ایستگاه

| ۲۰ ایستگاه دقت ۰/۱ نویز ۰/۱ | مقدار واقعی | مقدار به‌دست‌آمده | درصد خطا |
|-----------------------------------|-------------|-------------------|----------|
| θ_0 | ۳ | ۲/۹۷۸ | -۰/۷۱۶۲ |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۳۳۳ | -۰/۲۲۰۴۸ | -۵/۵۰۵۴۲ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۶۶۶ | -۱/۱۶۲۳۴ | -۰/۳۷۰۳۰ |

و اگر در داده‌ها نویز به مقدار ۰/۵ درجه و دقت داده‌برداری هم ۰/۵ درجه باشد نتایج آن در جدول ۷ آورده شده است:

۲-۳- داده‌برداری تصویری در ۲۰ ایستگاه با حدس اولیه مناسب

اگر داده‌ها را تنها در ۲۰ ایستگاه ولی با دقت کامل داشته باشیم نتایج به‌صورت شکل ۶ و جدول ۲ در می‌آید. (ایستگاه‌ها در فواصل ۵ متری از هم قرار گرفته‌اند به‌جز ایستگاه اول که در ۱ متری خروجی قرار دارد)



شکل (۶): مقایسه نتایج با داشتن ۲۰ ایستگاه داده‌برداری

جدول (۲): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۲۰ ایستگاه

| ۲۰ ایستگاه دقیق | مقدار واقعی | مقدار به‌دست‌آمده | درصد خطا |
|--------------------|-------------|-------------------|----------|
| θ_0 | ۳ | ۳/۰۰۷۸۰ | ۰/۲۶ |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۳۳ | -۰/۲۲۵۰۲ | -۳/۵۶ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۶۶ | -۱/۱۶۲ | -۰/۳۹ |

و اگر فرض شود داده‌های درست را می‌توان با دقت ۰/۱ درجه خواند، نتایج آن در جدول ۳ آورده شده است:

جدول (۳): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۲۰ ایستگاه

| ۲۰ ایستگاه دقت ۰/۱ | مقدار واقعی | مقدار به‌دست‌آمده | درصد خطا |
|-----------------------|-------------|-------------------|----------|
| θ_0 | ۳ | ۲/۹۷۲۸۵ | -۰/۹۰۴۸۶ |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۳۳۳۳ | -۰/۲۱۹۷۷ | -۵/۸۱۱۵ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۶۶ | -۱/۱۶۲۰ | -۰/۳۹۲۴۷ |

جدول (۷): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۲۰

ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۲۰ ایستگاه دقت ۰/۵ نويز ۰/۵ |
|----------------|-------------------|-------------|-----------------------------|
| θ_0 | ۳/۰۳۹۱ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۱۹۷۰ | -۰/۲۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۰ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

همان طور که دیده می شود در کل نتایج ضریب نیرو خطای بیشتری نسبت به ضریب ممان دارد؛ اما با این ۲۰ ایستگاه و حدس اولیه مناسب نتایج نسبتاً قابل قبول است.

۳-۳- داده برداری تصویری در ۱۰ ایستگاه با حدس اولیه مناسب

اما اگر داده ها تنها در ۱۰ ایستگاه باشد (همان ایستگاه های حالت قبل یک در میان!) با همان حدس های اولیه قبل به نتایج زیر می رسد که در جدول های ۸-۱۳ ذکر شده است:

جدول (۸): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۱۰

ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقیق |
|----------------|-------------------|-------------|-----------------|
| θ_0 | ۳/۰۳۵۹۰ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۲۱۱۰ | -۰/۲۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۳۰۷ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

جدول (۹): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۱۰

ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۱ |
|----------------|-------------------|-------------|--------------------|
| θ_0 | ۳/۰۰۸۳۲۶ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۱۷۳ | -۰/۲۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۳۱۵ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

جدول (۱۰): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۱۰

ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۵ |
|----------------|-------------------|-------------|--------------------|
| θ_0 | ۳/۰۵۱۹ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۱۸۰۰۰۹ | -۰/۲۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۶۱۵ | -۱/۱۶۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

جدول (۱۱): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۱۰

ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت ۱ |
|----------------|-------------------|-------------|------------------|
| θ_0 | ۳/۱۹۶۳ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۵۷۹۹ | -۰/۲۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۷۵۰۹ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

جدول (۱۲): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۱۰

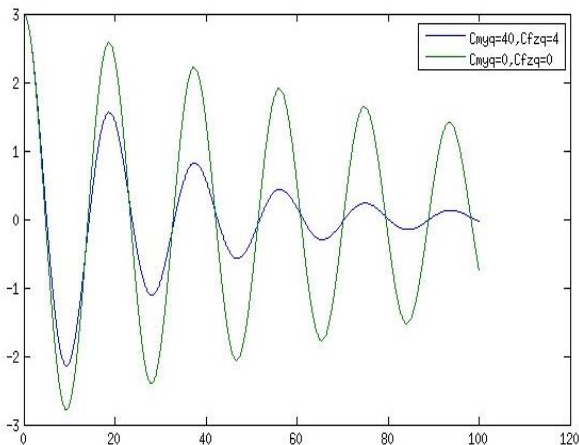
ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۱ نويز ۰/۱ |
|----------------|-------------------|-------------|-----------------------------|
| θ_0 | ۳/۱۰۷۴۵ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۴۶۰۳۳ | -۰/۲۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۳۹ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |

جدول (۱۳): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی برای ۱۰

ایستگاه

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۵ نويز ۰/۵ |
|----------------|-------------------|-------------|-----------------------------|
| θ_0 | ۳/۰۶۴۵۹ | ۳ | θ_0 |
| $C_{fz\alpha}$ | -۰/۲۴۷۰۳ | -۰/۲۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| $C_{my\alpha}$ | -۱/۱۶۳۳ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |



شکل (۸): اثر ضرایب دینامیکی

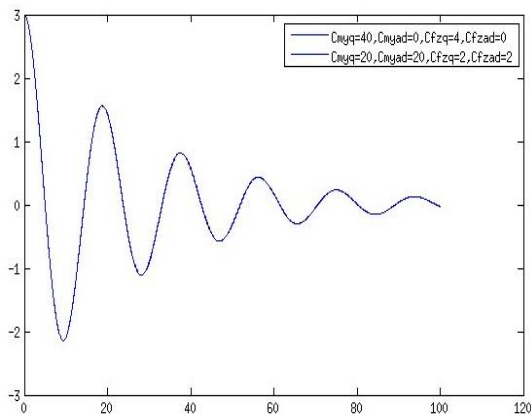
همان طور که دیده می شود میزان تأثیر ضرایب دینامیکی بسیار زیاد است؛ بنابراین نمی توان بدون در نظر گرفتن آنها مسأله را حل کرد؛ اما برای اینکه مشخص شود چه ضرایبی اهمیت دارند حالت زیر بررسی شد:

$$(۱): C_{myq} = 40, C_{my\dot{\alpha}} = 0, C_{fq} = 4, \quad (۲۴)$$

$$C_{fz\dot{\alpha}} = 0$$

$$(۲): C_{myq} = 20, C_{my\dot{\alpha}} = 20, C_{fq} = 2,$$

$$C_{fz\dot{\alpha}} = 2$$



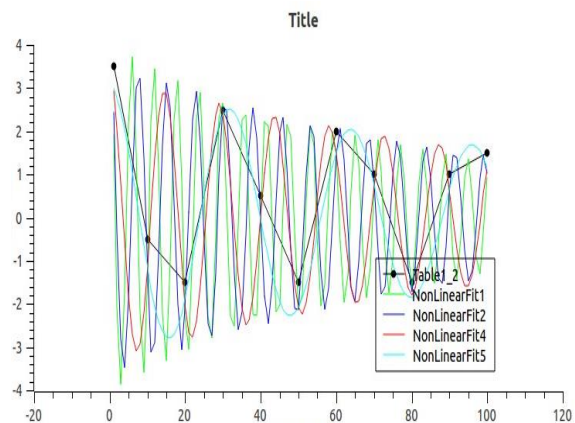
شکل (۹): اثر ضرایب دینامیکی در دو حالت ارائه شده

همان طور که در شکل ۹ دیده می شود هیچ تفاوتی بین دو نمودار مشخص نیست. در نتیجه ضرایب q و $\dot{\alpha}$ از هم قابل تفکیک نیستند. حال اگر ضریب دینامیکی نیرو کلاً صفر شود جواب به صورت شکل ۱۰ خواهد شد:

همان طور که دیده می شود تفاوت فاحشی بین نتایج ۲۰ ایستگاه و ۱۰ ایستگاه وجود ندارد.

۳-۴- اثر حدس اولیه

در مورد حدس اولیه می توان گفت احتمال اینکه نوسانات به گونه ای اتفاق بیافتد که ایستگاه ها جسم را در فازهای مشابهی رصد کنند کم است، احتمالاً از بین منحنی های قابل انطباق بر داده ها، منحنی با کمترین فرکانس جواب درست باشد. به طور مثال منحنی های مختلف قابل انطباق بر آخرین سری داده ها در شکل ۷ آورده شده است که منحنی با کمترین فرکانس جواب صحیح است. در نتیجه می توان گفت احتمالاً فرض اولیه فرکانس خیلی کم منتج به جواب صحیح خواهد شد.



شکل (۷): اثر حدس اولیه

۳-۵- بررسی اثرات ضرایب دینامیکی

تا به اینجای کار فرض شده بود تنها ضرایب استاتیکی در حرکت جسم مؤثر باشند. در این مرحله ضرایب دینامیکی هم فعال می شوند. در ابتدا با استفاده از حل عددی میزان تأثیر این ضرایب بر حرکت جسم بررسی می شود:

در ابتدا فرض می شود تنها ضریب C_{myq}, C_{fq} وجود داشته باشند و مقدار بی بعد آنها به ترتیب برابر با ۴ و ۴۰ قرار می گیرد. زاویه جسم بر حسب فاصله به صورت شکل ۸ در خواهد آمد:

$$\frac{m}{q} \ddot{z} = C_{fz\alpha} \left(\theta + \frac{\dot{z}}{u} \right) + \frac{mg}{q} + C_{fz\alpha} \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{z}}{u} \right) + C_{fzq} \dot{\theta} \quad (30)$$

$$\frac{I}{q} \ddot{\theta} = \left(C_{my\alpha} \left(\theta + \frac{\dot{z}}{u} \right) D + C_{my\alpha} \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{z}}{u} \right) + C_{myq} \dot{\theta} \right) \quad (31)$$

اما همان‌طور که دیده شد ضرایب $q, \alpha, \dot{\alpha}$ تفکیک‌ناپذیرند و ضریب نیرو هم قابل صرف‌نظر است. در نتیجه می‌توان حدس زد که تقریباً ضرایب دینامیکی کلاً زاویه حمله را نمی‌بینند بلکه زاویه پیچ را می‌بینند. با این فرض معادله ۳۱ به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{I}{q} \ddot{\theta} = \left(C_{my\alpha} \left(\theta + \frac{\dot{z}}{u} \right) D + (C_{my\alpha} + C_{myq}) \dot{\theta} \right) \quad (32)$$

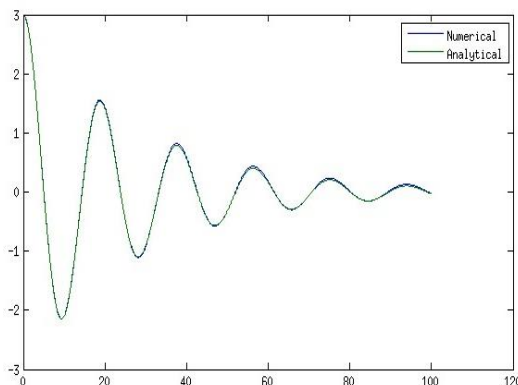
و با عملیاتی مشابه آنچه در حالت استاتیکی انجام شد می‌توان دید که شکل معادله به همان شکل است و تنها ضرایب تغییر کرده است و در نتیجه:

$$\theta = \theta_0 e^{\tau x} \left(\cos(\xi x) - \frac{\tau}{\xi} \sin(\xi x) \right) \quad (33)$$

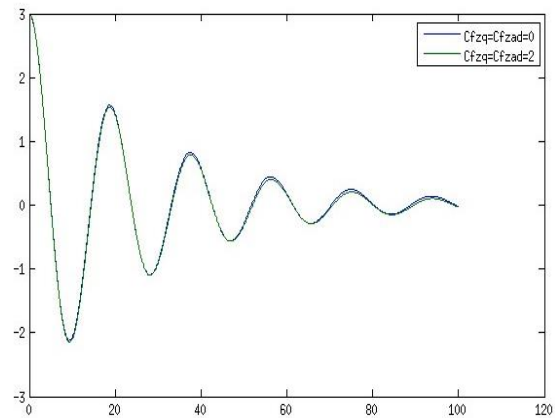
$$\tau = \frac{\left(C_{fz\alpha} + mDU_0 \frac{(C_{my\alpha} + C_{myq})}{I} \right) \rho A}{4m} \quad (34)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{-(C_{fz\alpha} + mDU_0 \frac{(C_{my\alpha} + C_{myq})}{I})^2 - \frac{8C_{my\alpha}D}{\rho A}}{\frac{4}{\rho A}}} \quad (35)$$

بدین ترتیب جواب تحلیل و عددی به صورت شکل ۱۱ با هم مقایسه می‌شوند:



شکل (۱۱): مقایسه جواب تحلیلی و عددی



شکل (۱۰): اثر ضرایب دینامیکی در دو حالت ارائه شده

و دیده می‌شود که ضریب دینامیکی نیرو هم‌روی نمودار زاویه تأثیری ندارد.

حال اگر معادلات حرکت با در نظر گرفتن ضرایب دینامیکی نوشته شود داریم:

$$\frac{m}{q} \ddot{x} = C_{fx_0} + C_{fx\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) \theta + C_{fz\alpha} \left(\dot{\theta} + \left(\frac{dz}{dx} \right) \right) \theta + C_{fzq} \dot{\theta} \quad (25)$$

$$\frac{m}{q} \ddot{z} = \left(C_{fx_0} + C_{fx\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) \right) \theta + C_{fz\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) + \frac{mg}{q} + C_{fz\alpha} \left(\dot{\theta} + \left(\frac{dz}{dx} \right) \right) + C_{fzq} \dot{\theta} \quad (26)$$

$$\frac{I}{q} \ddot{\theta} = \left(C_{my\alpha} \left(\theta + \frac{dz}{dx} \right) D + C_{my\alpha} \left(\dot{\theta} + \left(\frac{dz}{dx} \right) \right) + C_{myq} \dot{\theta} \right) \quad (27)$$

و با ساده‌سازی‌های مشابه قبل می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} - \frac{\dot{z}\dot{x}}{\dot{x}^2} \approx \frac{\dot{z}}{u} \quad (28)$$

$$\frac{m}{q} \ddot{x} = C_{fx_0} \quad (29)$$

نمود. اما در مورد ضرایب دینامیکی نیرو مشکل بزرگ تر است. اگر جسم را بدون تغییر شکل با مرکز جرم متفاوتی ساخته و شلیک کنیم، می توان گفت قاعدتاً ضرایب به صورت رابطه ۳۸ در خواهند آمد:

$$\begin{aligned} C_{fz\alpha_2} &= C_{fz\alpha_1}, \quad C_{my\alpha_2} = C_{my\alpha_1} + \frac{l}{D} C_{fz\alpha} \\ C_{fz\alpha_1} &= C_{fz\alpha_2}, \quad C_{my\alpha_2} = C_{my\alpha_1} + \frac{l}{D} C_{fz\alpha} \quad (38) \\ C_{myq_1} &= C_{myq_2}, \quad C_{fzq_2} = C_{fzq_1} + \\ &\frac{l}{D} C_{myq} \end{aligned}$$

که l میزان تغییر مرکز جرم است. در نتیجه می توان با تغییر مرکز جرم ضریب $C_{fz\alpha}$ را ظاهر کرد اما C_{fzq} ظاهر نخواهد شد.

۳-۶- مشابه سازی داده برداری توسط عکس برداری در حالت دینامیکی

همانند روندی که در حالت استاتیکی انجام شد، برای حالت دینامیکی هم داده برداری از روی عکس بررسی می شود. البته با توجه به نتایج حالت استاتیکی، تعداد حالت بررسی کاهش می یابد:

در صورت استفاده از کل داده ها نتایج در جدول ۴ نشان داده شده است.

جدول (۱۴): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار به دست آمده | مقدار واقعی | تمام داده ها دقیق |
|----------|-------------------|-------------|-------------------------------|
| -۰/۵۷ | ۲/۹۸۳۰ | ۳ | θ_0 |
| -۱۱/۳۰ | -۰/۲۰۶۹ | -۰/۲۳۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| -۰/۰۵ | -۱/۱۶۶۱ | -۱/۱۶۶۶۶ | $C_{my\alpha}$ |
| ۰/۴۱ | -۰/۰۰۰۸۰ | -۰/۰۰۰۸ | $C_{my\alpha}^+$ C_{myq} |

که باز هم بیشترین خطا مربوط به ضریب نیروی نرمال است. البته دقت شود که در این بررسی از ضریب نیروی محوری در مقابل ضریب نیروی نرمال صرف نظر شده است که در صورتی که سرعت سنج ها بتوانند با دقت خوبی سرعت را اندازه گیری کنند می توان ضریب نیروی محوری را هم در نظر گرفت.

که انطباق خوبی دیده می شود. اما می توان نشان داد که در صورتی که ضرایب دینامیکی خیلی بزرگ تر از ضرایب فوق باشند، فرضیات فوق مناسب نبوده و حل تحلیلی و عددی از هم فاصله خواهند گرفت. در این صورت بایستی معادلات (۱) را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کرد. در این حالت ابتدا فرض می شود سرعت ثابت است و تابعیت زمان ندارد؛ سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس معادلات دوم و سوم حل می شود که جواب آن در معادله ۳۶ می باشد:

$$\theta = B_1 e^{B_2 t} (\cos(B_3 t) - \frac{B_2}{B_3} \sin(B_3 t)) + B_5 \quad (36)$$

این حل با حل قبل شبیه هستند؛ البته این معادله زاویه را بر حسب زمان می دهد و معادله قبل بر حسب مکان؛ اما از آنجا که در اینجا سرعت ثابت فرض شده است، مکان و زمان با یک ضریب ثابت (سرعت) با هم ارتباط دارند. تنها نکته قابل توجه در معادله وجود یک مقدار ثابت در آن است که بدین معناست که جسم در انتها با زاویه صفر حرکت نخواهد کرد؛ بلکه بعد از نوسانات اولیه به زاویه ای غیر صفر میل می کند. این مقدار پس از حل معادلات توسط تبدیل لاپلاس به صورت زیر در آمده است:

$$B_5 = \frac{[C_{fz\alpha}(C_{myq} + C_{my\alpha}) - C_{my\alpha}(C_{fzq} + C_{fz\alpha})] q \theta_0}{C_{my\alpha} m u + (C_{fzq} C_{my\alpha} - C_{fz\alpha} C_{myq}) q} \quad (37)$$

حال اگر همین ضریب ثابت به معادله (۳۶) اضافه شود می توان حل تحلیلی را با دقت خوبی بر حل عددی برای حالت ضرایب دینامیکی بزرگ منطبق کرد.

نکته قابل ذکر این است که در حل تحلیلی فوق الذکر (۳۶) اولاً تنها ضرایب دینامیکی مربوط به ممان وجود دارد که بدین معنی است که با استفاده از اندازه گیری زاویه تنها می توان ضرایب دینامیکی ممان را استخراج کرد؛ ثانیاً ضرایب دینامیکی ممان و ضریب استاتیکی نیروی نرمال بر حسب زاویه حمله در هم پیچیده هستند و قابل تفکیک نخواهند بود. خوشبختانه این مشکل قابل حل است. برای تفکیک ضرایب دینامیکی از ضریب نیروی نرمال کافی است جسم را با دو سرعت مختلف (یا با دو جرم مختلف) شلیک کرد و با اندازه گیری ضریب استهلاک زاویه می توان ضریب نیروی نرمال و ضرایب دینامیکی را به تفکیک استخراج

جدول (۱۷): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار به‌دست‌آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت کامل |
|-------------|----------------------|-------------|-------------------------------|
| -۰/۲۱ | ۲/۹۹۳۵ | ۳ | θ_0 |
| -۱۳/۰۱ | -۰/۲۰۲۹۷ | -۰/۲۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| -۰/۱۳ | -۱/۱۶۵۱۱ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |
| ۲/۴۵ | -۰/۰۰۰۸۱ | -۰/۰۰۰۸ | $C_{my\alpha}^+$ C_{myq} |

و اگر دقت ۰/۱ درجه داشته باشد نتایج آن در جدول ۱۸ نشان داده شده است.

جدول (۱۸): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار به‌دست‌آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۱ درجه |
|-------------|----------------------|-------------|-------------------------------|
| -۱/۸۱ | ۲/۹۴۵۶ | ۳ | θ_0 |
| -۷۶/۲۸ | -۰/۰۵۵۳۵ | -۰/۲۳۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| -۲۰/۸۸ | -۰/۹۲۳۰۲ | -۱/۱۶۶۶ | $C_{my\alpha}$ |
| ۱۱/۴۰ | -۰/۰۰۰۸۹۱ | -۰/۰۰۰۸ | $C_{my\alpha}^+$ C_{myq} |

و به نظر می‌رسد در این حالت حتی دقت ۰/۱ درجه هم جواب نادرستی می‌دهد. اگر همین داده‌ها استفاده شود، اما در انطباق منحنی حدس اولیه کاملاً شبیه به جواب نهایی وارد شود، نتایج آن در جدول ۱۹ نشان داده شده است.

جدول (۱۹): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار به‌دست‌آمده | مقدار واقعی | ۱۰ ایستگاه-دقت ۰/۱ درجه-حدس خوب |
|----------|----------------------|-------------|------------------------------------|
| -۰/۶۵ | ۲/۹۸۰۵۴ | ۳ | θ_0 |
| ۲۰۹/۵۲ | -۰/۷۲۲۲ | -۰/۲۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| ۰/۳۴ | -۱/۱۷۰۶۸۸ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |
| -۱۰۰/۰۰ | -۲/۶۰۵۶E-۹ | -۰/۰۰۰۸ | $C_{my\alpha}^+$ C_{myq} |

که دقت ضریب استاتیکی ممان اصلاح شده است اما بقیه ضرایب به کلی خراب شده‌اند. در واقع در این حالت فرکانس نوسان اصلاح شده است اما میزان استهلاک آن نادرست است.

۷-۳- داده‌برداری تصویری در ۲۰ ایستگاه

در صورتی که در ۲۰ ایستگاه مشابه آنچه در حالت استاتیکی ذکر شد داده‌برداری صورت گیرد و دقت داده‌برداری ۰/۱ درجه باشد نتایج آن در جدول ۱۵ نشان داده شده است.

جدول (۱۵): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار به‌دست‌آمده | مقدار واقعی | ۲۰ ایستگاه دقت ۰/۱ درجه |
|-------------|----------------------|-------------|-------------------------------|
| -۱/۴۰ | ۲/۹۵۸۰ | ۳ | θ_0 |
| -۱۲/۸۵ | -۰/۲۰۳۳۵۴ | -۰/۲۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| ۰/۰۱ | -۱/۱۶۶۷ | -۱/۱۶۶ | $C_{my\alpha}$ |
| ۰/۶۷ | -۰/۰۰۰۸۰۵ | -۰/۰۰۰۸ | $C_{my\alpha}^+$ C_{myq} |

و اگر دقت داده‌برداری ۰/۵ درجه باشد نتایج آن در جدول ۱۶ نشان داده شده است.

جدول (۱۶): مقایسه نتایج عددی و تحلیلی

| درصد خطا | مقدار به‌دست‌آمده | مقدار واقعی | ۲۰ ایستگاه دقت ۰/۵ درجه |
|-------------|----------------------|-------------|-------------------------------|
| ۳/۴۸ | ۳/۱۰۴ | ۳ | θ_0 |
| ۹۷/۴۸ | -۰/۴۶۰۷۸ | -۰/۲۳۳۳۳ | $C_{fz\alpha}$ |
| ۱/۰۹ | -۱/۱۷ | -۱/۱۶۶۶۶ | $C_{my\alpha}$ |
| -۳۰/۰۸ | -۰/۰۰۰۵۵ | -۰/۰۰۰۸ | $C_{my\alpha}^+$ C_{myq} |

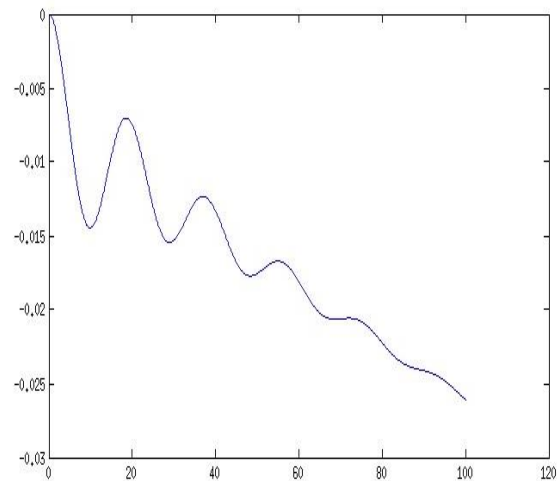
همان‌طور که دیده می‌شود، بر خلاف حالت استاتیکی که حتی با دقت ۱ درجه یا نویز ۰/۵ درجه هم دقت قابل قبولی به‌دست می‌آید، در این حالت دقت ۰/۵ درجه هم تنها ضریب استاتیکی ممان را با دقت خوب نتیجه می‌دهد و بقیه ضرایب به‌طور کلی نادرست به‌دست آمده‌اند.

۸-۳- داده‌برداری تصویری در ۱۰ ایستگاه

اگر داده‌ها در ۱۰ ایستگاه برداشته شود و دقت کامل داشته باشد نتایج آن در جدول ۱۷ نشان داده شده است.

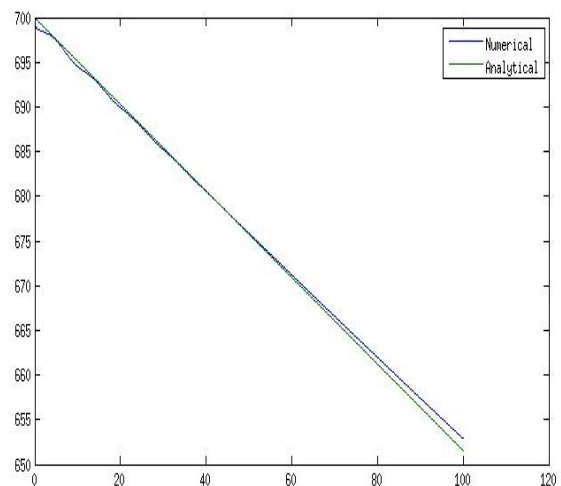
۹-۳- بررسی متغیرهای دیگر

در این آزمایشگاه قابلیت اندازه‌گیری سرعت و عکس‌برداری وجود دارد. از عکس‌برداری می‌توان موقعیت و زاویه جسم را اندازه‌گیری کرد که در مورد زاویه به‌طور مفصل صحبت شد. اما در مورد موقعیت جسم در راستای Z می‌توان از حل عددی دید که تغییر مکان جسم در این راستا بسیار کم است و در حدود ۲ تا ۳ سانتی‌متر است که بعید می‌رسد عکس‌برداری دقت کافی برای داده‌برداری را ارائه دهد (شکل ۱۲).



شکل (۱۲): جابجایی مدل در راستای Z

همچنین می‌توان سرعت را اندازه‌گیری کرد که اگر با دقت خوبی انجام شود، می‌توان Cf_{x0} را از روی آن تخمین زد. در شکل ۱۳ نتایج تحلیلی و عددی نشان داده شده است.



شکل (۱۳): مقایسه نتایج تحلیلی و عددی

۱۰-۳- اثر جاذبه زمین

در نتایجی که تا اینجا ارائه شد جاذبه در نظر گرفته نشده بود. اگر جاذبه زمین لحاظ شود، مقداری کمی در متغیرها تغییر به‌وجود می‌آید و در مورد حل تحلیلی هم جواب ناهمگن معادله به جواب همگن اضافه می‌شود. از حل عددی به نظر می‌رسد وجود و عدم وجود جاذبه زمین تأثیر چندانی روی حل ندارد.

۱۱-۳- از سه درجه آزادی به شش درجه آزادی

تا به اینجای کار فرض شد حرکت سه درجه آزادی باشد. اما در واقعیت جسم می‌تواند در هر شش درجه آزادی خود حرکت کند. اگر جسم حول خود رول کند به خاطر وجود بالکها در هر لحظه دارای ضرایب متفاوتی خواهد بود که مثل یک نویز قابل توجه حرکت جسم را از حرکت سه درجه آزادی متفاوت می‌کند. در این حالت دقت جواب‌ها هم کاهش پیدا خواهد کرد. در نتیجه بایستی تمام تمهیدات لازم برای جلوگیری از رول انجام شود. به‌طور خاص باید با استفاده از یک زائده و شکاف یا امثال آن، سرعت زاویه‌ای خروج جسم را صفر کرد. همچنین باید دقت ساخت در حدی بالا باشد که عدم تقارن بین بالکها ناشی از ساخت، قدرت چرخش جسم را نداشته باشد. البته ممان ناشی از عدم تقارن بالکها برای چرخاندن جسم به زمان نیاز دارد، اما با توجه به ممان اینرسی بسیار کم جسم در این محور، این مسأله به راحتی قابل چشم‌پوشی نیست. البته راه حل دیگر برای از بین رفتن اثر رول آن است که جسم به‌گونه‌ای ساخته شود که عامدانه با سرعت زاویه‌ای بالایی بچرخد. در این صورت حرکت جسم یکنواخت‌تر خواهد بود، اما ضرایب ایرودینامیکی در این حالت با حالت رول پایدار متفاوت است.

اگر جسم رول نکند اما به سمت بچرخد هم مقداری خطا ایجاد می‌کند که البته اگر مطمئن باشیم که در لحظه خروج جسم هیچ زاویه‌ای در راستای سمت ندارد، احتمالاً چرخش سمت آن چنانی هم به وجود نخواهد آمد.

۴- نتیجه گیری

با توجه به نتایج ارائه شده در بالا می توان گفت:

- استخراج ضرایب استاتیکی و دینامیکی مستقل از هم نیست و باید به طور هم زمان انجام شود.
- در صورتی که ضرایب دینامیکی مقدار قابل توجهی داشته باشند (همانند مقداری که در بالا آورده شده بود) نمی توان از ضرایب دینامیکی صرف نظر کرد.
- حضور ضرایب دینامیکی باعث کاهش شدید نوسانات می شود که در نتیجه نیاز به دقت بالاتر اندازه گیری وجود خواهد داشت.
- دقت مورد نیاز اندازه گیری در حالتی که ضرایب دینامیکی باعث استهلاک نوسانات شده اند، با ۲۰ ایستگاه حدود ۰/۱ درجه است؛ در حالی که با ۱۰ ایستگاه دقت ۰/۱ درجه کفایت نمی کند و دقت بالاتر از آن نیاز است.
- اندازه گیری سرعت با دقت مناسب می تواند مستقلاً ضریب نیروی محوری را نتیجه دهد.
- برای اندازه گیری ضرایب، با در نظر داشتن ضرایب دینامیکی، بایستی تست حداقل با ۲ سرعت مختلف انجام شود تا بتوان داده ها را از هم تفکیک کرد.
- ضریب دینامیکی نیرو نسبت به تغییرات زاویه حمله با تکرار تست با شکل جسم ثابت و جابه جایی مرکز جرم آن قابل اندازه گیری است، اما ضریب دینامیکی نیرو نسبت به چرخش به نظر غیر قابل اندازه گیری می رسد.
- ضریب استاتیکی نیروی محوری بر حسب زاویه حمله تأثیر چندانی بر حرکت ندارد و قابل اندازه گیری نیست.
- هر چه تعداد داده ها (تعداد ایستگاه های اندازه گیری) کمتر باشد، وابستگی جواب به حدس اولیه بیشتر می شود.
- واضح است که هر چه زاویه اولیه پرتاب بیشتر باشد، می توان با دقت کمتر اندازه گیری به جواب های مناسب رسید. اما زاویه اولیه بالای جسم به معنای کاهش طول آن است (به خاطر جادهی در لوله شتاب دهنده).

۵- قدردانی

نویسندگان از جناب آقای دکتر محمد مهدی علیشاهی چهره ماندگار مهندسی مکانیک به خاطر راهنمایی و کمک هایشان و مجموعه تحقیقاتی کاوشگر خورشید به خاطر در اختیار گذاشتن امکانات قدردانی می کنند.

۶- مراجع

1. Gershenson, J. "Capstone Design Course for NASA ESMD", 2009.
2. Chambers, J. "Modeling Flight NASA Latest Version: The Role of Dynamically Scale Free Flight Models in Support of NASA Aerospace Programs", Vol. 3, 2015.
3. Khristenko, Y.F., Zelepugin, S.A., and Gerasimov, A.V. "New Light-Gas Guns for the High-Velocity Throwing of Mechanical Particles", Vol. 12, No.22, pp. 6606-6610, 2017.
4. Russell, J.J.T.A.J. "Aircraft Performance and Design", JD Anderson. McGraw-Hill Publishing Company, Shoppenhangers Road, Maidenhead, Berks SL6 2QL, UK. 1999. 580pp. Illustrated. £ 25.99. 0-07-116010-8. Vol. 104, No. 1036, p. 297, 2000.
5. Seiler, F. and Igra, O. "Hypervelocity Launchers", Springer, 2016.
6. Davis, B.S., Guidos, B.J., and Harkins, T.E. "Complementary Roles of Spark Range and Onboard Free-Flight Measurements for Projectile Development", Army Research Lab Aberdeen Proving Ground Md Weapons And Materials Research, 2009.
7. Topper, B., Brown, T.G., Bukowski, E., Davis, B.S., Hall, R.A., Muller, P.C., Vong, T.T. and Brandon, F.J., "Feasibility of Determining Aerodynamic Coefficients for a NASA Apollo Body with the Use of Telemetry Data from Free Flight Range Testing", Army Research Lab Aberdeen Proving Ground Md Weapons And Materials Research, 2007.
8. West, I.T. "Hypersonic Aerodynamic Flight Coefficients Determined from Free Flight", The UNSW Canberra at ADFA Journal of Undergraduate Engineering Research, Vol.1, No. 2, p. 36, 2009.
9. Chhabildas, L.C. and Knudson, M.D. "Techniques to Launch Projectile Plates to Very High Velocities, in High-Pressure Shock Compression of Solids VIII", Springer, pp. 143-199, 2005.

16. Bhagwandin, V.A., Sahu, J. "Numerical Prediction of Pitch Damping Stability Derivatives for Finned Projectiles", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 51, No. 5, pp. 1603-1618, 2014.
17. Dupuis, A. and Hathaway, W. "Flight Dynamics of a Projectile with High Drag Retarder Devices at Subsonic Velocities", 19th Symposium of Ballistics. 2011.
18. Kokes, J., Costello, M., and Sahu, J. "Generating an Aerodynamic Model for Projectile Flight Simulation Using Unsteady Time Accurate Computational Fluid Dynamic Results", Vol. 45, p. 11131, 2007.
19. Oosterom, W. "Flying-V Family Design", 2021.
20. Klatt, D., Proff, M., and Hruschka, R. "Investigation of the Flight Behavior of a Flare-Stabilized Projectile Using 6DoF Simulations Coupled with CFD", 2019.
21. Sun, S. and de Visser, C. "Aerodynamic Model Identification of a Quadrotor Subjected to Rotor Failures in the High-Speed Flight Regime", Vol. 4, No. 4, pp. 3868-3875, 2019.
22. Sung, C.-h. and Kwon, J. "Aerodynamic Design Optimization Using the Navier-Stokes and Adjoint Equations", 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 2001.
10. Carmona-Reyes, J., Cook, M., Schmoke, J., Harper, K., Reay, J., Matthews, L. and Hyde, T. "Impact Studies Using a One Stage Light Gas Gun", *Lunar and Planetary Science Conference*. 2004.
11. Grinstead, J.H., Wilder, M.C., Reda, D.C., Cornelison, C.J., Cruden, B.A., and Bogdanoff, D.W. "Shock Tube and Ballistic Range Facilities at NASA Ames Research Center", *National Aeronautics and Space Administration Moffett Field Ca Ames Research*, 2010.
12. Van Donkelaar, F. "Development of an Expedient Two-Stage Gas Gun", *University of Washington*, 2021.
13. Swift, H.F. "Light-Gas Gun Technology: a Historical Perspective, in *High-Pressure Shock Compression of Solids VIII*", Springer, pp. 1-35. 2005.
14. Abdelkefi, A., Vasconcellos, R., Nayfeh, A.H., and Hajj, M.R. "An Analytical and Experimental Investigation into Limit-Cycle Oscillations of an Aeroelastic System", Vol. 71, No. 1, pp. 159-173, 2013.
15. Haya, R., Kerr, M. and Bonetti, D. "Entry, Descent, and Landing Systems Short Course", 2013.

