علمی- پژوهشی

تحلیل آیروالاستیک پانل‌های انحنادار تقویت‌شده با نانو صفحات گرافنی

علیرضا پورموید[۱]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران

کرامت ملک زاده فرد[۲*]
مجتمع دانشگاهی هوافضا
دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

رضا بهاءالدینی[۳]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید باهنر کرمان

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۳)

چکیده

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات و پایداری پانل هدفمند ساندویچی چندلایه تقویت‌شده با نانوصفحات گرافن و محصورشده با لایه‌های پیزوالکتریک تحت‌تأثیر نیروی آیروالاستیک مطالعه شده است. پانل ساندویچی چندلایه دو جهت انحنادار از مواد متخلخل که با نانو صفحات گرافنی تقویت شده‌اند، در نظر گرفته می‌شود. نانوصفحات گرافن به صورت‌های یکنواخت و غیریکنواخت و همچنین سه نوع توزیع تخلخل هدفمند که به‌صورت لایه و پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند فرض شده است. این سازه همواره تحت تأثیر جریان خارجی سیال که با تئوری پیستون مدل‌سازی می‌شود در نظر گرفته شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت به همراه شرایط مرزی از اصل توسعه یافته همیلتون با در نظر گرفتن تئوری مرتبه بالا استفاده شده است. برای گسسته‌سازی معادلات با مشتقات جزئی به معادلات با مشتقات معمولی، از روش گلرکین استفاده می‌شود. تأثیر مواد پیشرفته شامل الگوهای مختلف توزیع تخلخل، ضرایب تخلخل، توزیع یا پراکندگی نانو صفحات گرافن، مقدار کسر وزنی آن‌ها و همچنین، تأثیر ابعاد هندسی سازه بر روی ارتعاشات و ناپایداری‌های دینامیکی سازه‌ها مطالعه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات و پایداری، پانل ساندویچی، جریان سیال مافوق صوت، لایه‌های پیزوالکتریک

Aeroelastic Analysis of Reinforced Curved Panels by Nano-Graphene Plates

A. R. Pourmoayed[1]
Mechanical Engineering Department,
Khatamul-Anbiya Air Defense University, Tehran, Iran

K. Malekzadeh Fard[2*]
Aerospace Research Institute,
Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

R. Bahaadini[3]
Mechanical Engineering Department,
Shahid Bahonar University of Kerman, Iran

(Received: 10/April/2020; Accepted: 14/ October/2020)

ABSTRACT

In this study, the vibration and stability analysis of functionally graded (FG) doubly curved panels reinforced with nano-graphene platelets (NGPLs) embedded by piezoelectric layers under the influence of aeroelastic force are investigated. Multilayer sandwich doubly curved panel makes of porous materials reinforced with nano-graphene platelets are considered. The NGPLs are assumed to be uniform and non-uniform distribution, as well as three types of targeted porosity distribution that change continuously along the thickness in each layer. This structure is always under influence of external fluid flow and modeled by the piston theory. Based on the higher-order shear deformation theory, the governing equations of motion of doubly curved panels reinforced with NGPL are obtained using extended Hamilton's principle. Galerkin method is employed to transform the partial differential equations of motion into the ordinary equations. The effect of advanced materials including various patterns of porosity distribution, porosity coefficients, distribution or dispersion of nano graphene platelets, NGPL weight fraction, as well as the effect of structural geometric dimensions on vibrations and dynamic instabilities of structures are studied.

Keywords Vibration and Stability, Sandwich Panel, Supersonic Fluid Flow, Piezoelectric Layers.

[۱] - استادیار، pourmoayed@mut.ac.ir
[۲] - استاد (نویسنده پاسخگو): kmalekzadeh@mut.ac.ir
[۳] - استادیار، rezabaha67@gmail.com

۱- مقدمه

امروزه استفاده از سازه‌های سبک و مقاوم که دارای نسبت سفتی به وزن و استحکام به وزن بالایی هستند، در مصارف مهندسی بسیار رایج و متداول شده است. از جمله کاربرد این نوع سازه‌ها می‌توان به بدنه اجسام پرنده مانند هواپیماها، موشک‌ها و فضاپیماها، بدنه کشتی‌ها، قطارها و خودروها و مصارف عمده دیگر نام برد. از جدیدترین و رایج‌ترین سازه‌های مستحکم و سبک مهندسی، پانل‌های ساندویچی انحنادار هستند. تحلیل ارتعاشات و آیروالاستیک پانل‌ها تحت جریان سیال از موضوعات مهم در بین محققان در زمینه اندرکنش بین سیال و سازه بوده است. از این رو در ادامه به مرور کارهای انجام شده پرداخته خواهد شد. ویژگی‌های ارتعاشی نانولوله‌های کربنی تقویت‌کننده با استفاده از یک مدل پیوسته معادل بر اساس روش ایشلبای- موری- تاناکا[1]، توسط فورمیکا و همکارانش[2] [۱] مطالعه شده است. همچنین، رفتار ارتعاشی استوانه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی که دارای توزیع غیریکنواخت هستند، با به‌کار بردن رویکرد میکرو- مکانیک، توسط امیدی و همکارانش [۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. هدایتی و آراگ [۳] اثرات نانو لوله‌های هدفمند را بر روی رفتار ارتعاشات آزاد صفحه‌های قطاعی حلقوی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند، واقع بر بستر الاستیک را با استفاده از حل الاستیسیته سه‌بعدی بررسی کردند. مشخصه‌های فرکانس‌های طبیعی پانل‌های استوانه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند، بر مبنای رویکرد ایشلبای- موری- تاناکا، توسط آراگ و همکارانش [۴] ارائه شده است. مرادی دستجردی و همکارانش [۵] اثرات جهت‌گیری و تراکم نانولوله‌های کربنی را بر روی رفتار ارتعاشی سیلندرهای نانوکامپوزیتی هدفمند با استفاده از روش بدون المان تحلیل کردند. یاس و همکارانش [۶] مطالعه‌ای بر روی خواص ارتعاشی پانل‌های استوانه‌های نانوکامپوزیتی هدفمند که با نانولوله‌های کربنی تک جداره تقویت شده‌اند، بر اساس تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، انجام دادند. علی‌بیگلو [۷] رفتار ارتعاشات آزاد پانل‌های استوانه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند که با لایه‌های پیزوالکتریک محصور شده‌اند را با شرایط مرزی ساده و با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بررسی کرد. همچنین، اثرات نیروهای سانتریفیوژ و کریولیس بر روی رفتار ارتعاشات آزاد پوسته‌های چرخان مخروطی ناقص تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، توسط حیدرپور و همکارانش [۸] بررسی شده است. ملک‌زاده و زارعی [۹] ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک تا نسبتاً ضخیم چندلایه مربعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با به کار بردن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. مطالعه رفتار خمشی و ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا، توسط ناتارجان و همکارانش[3] [۱۰] صورت پذیرفته است. رفیعی و همکارانش [۱۱] پایداری دینامیکی غیرخطی ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند پیزوالکتریک را تحت بارگذاری ترکیبی حرارتی و الکتریکی و واکنش پارامتری و تشدید خارجی، مطالعه کردند. وانگ و همکارانش[4] یک روش تحلیلی را به‌منظور مطالعه مشخصه‌های پایداری دینامیکی کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی چند جداره بر مبنای تئوری پوسته دانل[5]، ارائه کردند. رفتار ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی توسط انصاری و همکارانش [۱۲] بر اساس یک روش عددی، مورد تحلیل قرار گرفته است. ژانگ و همکارانش[6] مشخصه‌های ارتعاشات آزاد ورق‌های سه وجهی نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، بررسی کردند. واتاناساکولپانگ و چایکیتیراتانا[7] [۱۳] به مطالعه رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی قرار گرفته بر روی بستر الاستیک پاسترناک شامل لایه برشی و فنرهای وینکلر، پرداختند. همچنین، مطالعه استاتیک و ارتعاشات آزاد ورق‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش مربع دیفرانسیلی، توسط علی‌بیگلو و امتحانی [۱۴] انجام گرفته است. ستوده و شجاعی [۱۵] از روش مربع دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق‌های چهار وجهی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، استفاده کردند. علاوه بر این، ارتعاشات آزاد غیرخطی و رفتار پس از

[1] Eshlebay-Murray-Tanaka method
[2] Formica et al.
[3] Natarajan et al.
[4] Wang et al.
[5] Donnell-shell theory
[6] Zhang et al.
[7] Wattanasakulpong and Chaikittiratana

کمانش تیرهای تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند واقع بر بستر الاستیک غیرخطی، توسط شفیعی و ستوده [۱۶] مطالعه شده است. اخیراً، شجاعی و همکارانش [۱۷]، رفتار ارتعاشات آزاد پانل‌های استوانه‌های مورب نسبتاً ضخیم تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته، بررسی کردند. در ادامه به کارهای انجام شده بر روی پانل‌ها برای مطالعه بیشتر اشاره می‌شود [۲۳-۱۸]. حرکت پوسته‌های نانو کامپوزیتی در سیال خارجی سبب فشار آیرودینامیکی می‌گردد. بنابراین، نیروهای آیرودینامیکی به پانل‌ها اعمال می‌شوند و نوسانات شدید را می‌توان در این سازه‌ها مشاهده کرد. این حرکت نوسانی ممکن است موجب ناپایداری‌های آیروالاستیک گردد. در همین راستا، در نظر گرفتن اثر پایداری‌های آیروالاستیکی در طراحی سازه‌های هواپیمایی و هوافضایی، امری مهم و ضروری به‌شمار می‌رود. برای اولین بار، آشلی[1] [۲۴] فشار آیرودینامیکی اعمال شده به یک پانل مسطح را تحت جریان مافوق صوت و در شکل خطی آن را ارائه دادند. این تقریب از فشار آیرودینامیکی تحت عنوان تئوری پیستون شناخته می‌شود و به‌طور گسترده‌ای در پژوهش‌های مختلف به کار می‌رود. فانگ[2] [۲۵] ناپایداری فلاتر پانل‌های مسطح و پوسته‌های استوانه را به‌طور تئوری و تجربی با استفاده از تئوری پیستون، مطالعه کرد. کرومهار[3] [۲۶] دقت تئوری پیستون را بر روی پوسته‌ها استوانه مورد تحلیل و بررسی قرار داد. دوول[4] [۲۷] نوسانات غیرخطی ورق‌های تحت جریان مافوق صوت را با استفاده از تئوری پیستون مطالعه کرد. همچنین، بررسی فلاتر غیرخطی پانل‌های انحنادار توسط کرنش‌های غیرخطی ون-کارمن و تئوری آیرودینامیکی پیستون توسط دوول [۲۸] انجام شده است. در یک مطالعه دیگر، دوول پایداری آیروالاستیک غیرخطی پانل‌های انحنادار سه‌بعدی را مطالعه کرد. السن[5] [۲۹] رفتار فلاتر مافوق صوت پوسته‌های استوانه‌ای را بررسی کرد. در این پژوهش، خواص مواد متناظر، وابسته به دما فرض شده‌اند و دما پوسته استوانه‌ها در راستای طول پوسته تغییر می‌کند. مشخصه‌های فلاتر پانل‌های ساندویچی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی بر مبنای تئوری برشی مرتبه بالا، توسط سانکار و همکارانش[6] [۳۰] بررسی شده است. در پژوهشی دیگر، سانکار و همکارانش [۳۱]، مشخصه‌های فلاتر مافوق صوت پانل‌های پوسته‌ای ساندویچی انحنادار تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی را با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر، بررسی کردند. اخیراً، یک تحلیل آیروترموالاستیکی و کنترل فلاتر فعال از پانل‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند در جریان هوا مافوق صوت، توسط ژانگ و همکارانش [۳۲] انجام شده است. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی برای استخراج معادله‌های دیفرانسیلی حاکم بر حرکت در این پژوهش به‌کار رفته است و کنترل فلاتر فعال با استفاده از عملگر و سنسور پیزوالکتریک انجام شده است.

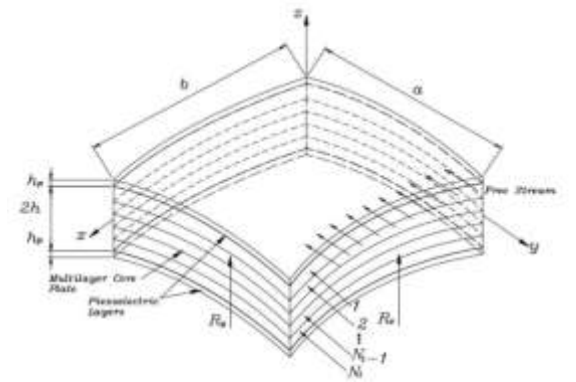
در سال‌های اخیر، به دلیل خواص مهم و کاربردی نانو صفحات گرافن، کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن معرفی شده‌اند. با به‌کار بردن مفهوم مواد هدفمند، توزیع غیریکنواخت نانو صفحات گرافن در ماتریس‌های پایه فلزی در نظر گرفته شد، به‌طوری‌که کسر حجمی نانو صفحات گرافن به‌صورت پیوسته در طول ضخامت کامپوزیت‌های تقویت‌شده با این مواد، تغییر می‌کند. به دلیل نسبت مقاومت به وزن بالا ماتریس‌ها تقویت‌شده با نانو صفحات گرافنی هدفمند، نانو کامپوزیت‌های هدفمند، نمایندگان مناسبی در صنایع هوانوردی و فضانوردی به‌شمار می‌روند. با توجه به اهمیت تحلیل پایداری آیروالاستیک پانل‌های نانوکامپوزیتی، مطالعه بر روی این سازه‌ها انجام نشده است. بنابراین، در این پژوهش، آیروالاستیسیته دینامیکی پانل‌ها از دو جهت انحنادار محصور به لایه‌های پیزوالکتریک تحت تأثیر جریان سیال مافوق صوت، مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. همچنین از آنجایی که بررسی جامعی بر روی رفتار مکانیکی این نوع سازه صورت نگرفته است، تحلیل پانل‌های لایه‌ای تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن به‌منظور بررسی فرکانس طبیعی و فشار دینامیکی بحرانی آن‌ها نیز در این مطالعه حائز اهمیت است. به کمک اصل همیلتون و معادله ماکسول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم در دو حالت الکتریکی مدار بسته و مدار باز به‌دست آمده‌اند. معادله حاکم بر حرکت و شرایط مرزی از اصل توسعه یافته همیلتون با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم برای سینماتیک پانل‌ها، معادله ماکسول برای لایه‌های پیزوالکتریک به همراه تئوری پیستون برای جریان مافوق صوت سیال استفاده می‌شود.

---
[1] Ashley
[2] Fung
[3] Krumhaar
[4] Dowell
[5] Olsson
[6] Sankar et al.

برای گسسته‌سازی معادلات با مشتقات جزئی به معادلات با مشتقات معمولی از روش گلرکین[۱] استفاده می‌شود. سپس، بعد از به دست آوردن مقادیر ویژه به تحلیل ارتعاشات و ناپایداری این پانل ساندویچی پرداخته می‌شود. در نهایت، تأثیر پارامترهای فیزیکی شامل اثر الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک، شرایط مرزی الکتریکی و مکانیکی مختلف و ابعاد هندسی بر روی ارتعاشات و فشار آیروالاستیک فلاتر این سیستم‌ها تحلیل می‌شوند.

۲- معادلات حاکم بر حرکت

در این قسمت، با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، تحلیل آیروالاستیسیته پانل‌های ساخته شده از فلزات متخلخل تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن با در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. به کمک اصل توسعه یافته همیلتون و معادله ماکسول، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله در دو وضعیت الکتریکی مدار باز و مدار بسته به دست می‌آیند. برای این منظور یک پانل با هندسه و دستگاه مختصات نشان داده مطابق شکل **۱** در نظر گرفته شده است.



شکل (۱): شماتیک پانل ساندویچی تحت جریان آیروالاستیک و دستگاه مختصات انتخاب‌شده

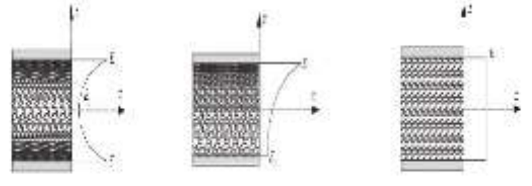
طبق تئوری برشی مرتبه بالای پانل، میدان جابجایی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۳]:

$$u_x(x,y,z,t)=\left(1+\frac{z}{R_x}\right)u(x,y,t)+z\psi_x(x,y,t)-cz^3\left(\psi_x(x,y,t)+\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}\right) \quad (۱)$$

$$u_y(x,y,z,t)=\left(1+\frac{z}{R_y}\right)v(x,y,t)+z\psi_y(x,y,t)-cz^3\left(\psi_y(x,y,t)+\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y}\right)$$

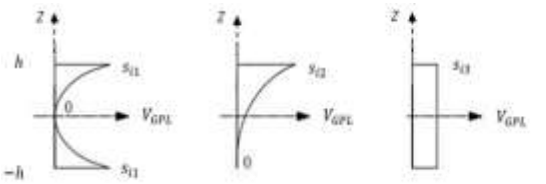
$$u_z(x,y,z,t)=w(x,y,t)$$

در رابطه (۱)، R_x و R_y شعاع‌های انحنا می‌باشند. علاوه بر این، c ثابتی است که مقدار آن برابر $\left(\frac{4}{3(2h+2h_p)^2}\right)$ در نظر گرفته شده است. در شکل **۲** توزیع‌های مدول الاستیسیته ماده در راستای ضخامت سازه نشان داده شده است. به عنوان مثال، همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، توزیع مدول الاستیسیته ماده نسبت به صفحه میانی هسته سازه به‌صورت نامتقارن، به‌طوری است که این خاصیت در سطح بالایی و پایینی هسته سازه به ترتیب دارای بیشترین و کمترین مقدار خود است.



(الف) (ب) (ج)

شکل (۲): توزیع‌های تخلخل در سازه‌ها متخلخل، الف) توزیع تخلخل متقارن، ب) توزیع تخلخل نامتقارن، ج) توزیع تخلخل یکنواخت [۳۳]



الگو متقارن (A) الگو نامتقارن (**B**) الگو یکنواخت (C)

شکل (۳): پراکندگی نانو صفحات گرافن در هر هسته متخلخل بر اساس سه الگو A، B و C [۳۳]

در این پژوهش اندرکنش بین سازه و سیال به شکل بررسی اثرات سیال روی پانل با استفاده از تئوری پیستون مدل‌سازی می‌شود. این تئوری اثرات سیال را به‌صورت یک نوع بارگذاری فشاری روی سطح جسم جامد در نظر می‌گیرد.

معادلات حرکت و شرایط مرزی استخراج شده با استفاده از اصل همیلتون، به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

[۱] Galerkin Method

$$
\begin{aligned}
&\delta u:\quad ab_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ab_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ab_3 u\\
&+ab_4\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+ab_5\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+ab_6\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}\\
&+ab_7\psi_x+ab_8\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+ab_9\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\
&+ab_{10}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+ab_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\\
&+T_2(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{R_x\partial x}\right)\\
&+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{R_y\partial x}\right))+\frac{1}{R_x}(T_5\frac{\partial\phi}{\partial x}\\
&+T_7\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+T_8(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\
&-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y})\\
&-\beta(T_{5z2}\frac{\partial\phi}{\partial x}+T_{7z2}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)\\
&+T_{8z2}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y})))+\frac{\eta}{R_x}(T_{1z3}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\
&+T_{3z3}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+T_{4z3}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\
&-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y}))\\
&=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+J_1\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}-\eta I_3\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta v:\quad ac_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+ac_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+ac_3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+ac_4 v\\
&\quad+ac_5\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+ac_6\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+ac_7\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+ac_8\psi_y\\
&+ac_9\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+ac_{10}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+ac_{11}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&+T_2\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{R_x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{R_y\partial y}\right)\right)\\
&+\frac{1}{R_y}(T_5\frac{\partial\phi}{\partial y}+T_7\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)\\
&+T_8(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2})-\beta(T_{5z2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\\
&+T_{7z2}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)+T_{8z2}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\\
&-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2})))+\frac{\eta}{R_y}(T_{1z3}\frac{\partial\phi}{\partial y}\\
&+T_{3z3}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)+T_{4z3}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\\
&\quad-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2}))=I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+J_1\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}-\eta I_3\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\psi_x:\quad ad_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+ad_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ad_3 u\\
&+ad_4\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+ad_5\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+ad_6\psi_x\\
&+ad_7\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+ad_8\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+ad_9\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\
&+ad_{10}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+ad_{11}\frac{\partial w}{\partial x}+(T_{1z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\
&+T_{3z}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+T_{4z}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\
&-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y})\\
&-(T_5\frac{\partial\phi}{\partial x}+T_7\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+T_8(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\\
&-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y})))-\beta(T_{5z2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\\
&+T_{7z2}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+T_{8z2}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\\
&-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y}))\\
&-\eta(T_{1z3}\frac{\partial\phi}{\partial x}+T_{3z3}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)\\
&+T_{4z3}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial x\partial y}))\\
&\qquad=J_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+K_1\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}-\eta J_4\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\psi_y:\quad af_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+af_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+af_3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\
&\quad+af_4 v+af_5\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+af_6\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+af_7\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\\
&\quad+af_8\psi_y+af_9\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+af_{10}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+af_{11}\frac{\partial w}{\partial y}\\
&+(T_{1z}\frac{\partial\phi}{\partial y}+T_{3z}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)\\
&+T_{4z}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2})-\eta(T_{1z3}\frac{\partial\phi}{\partial y}\\
&+T_{3z3}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)+T_{4z3}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\\
&-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2})))-(T_5\frac{\partial\phi}{\partial y}+T_7\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)\\
&+T_8(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2}))-\beta(T_{5z2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\\
&+T_{7z2}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\right)+T_{8z2}(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\\
&+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^2 u}{R_x\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\\
&\quad-\frac{\partial^2 v}{R_y\partial y^2}))=J_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+K_1\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}-\eta J_4\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

$$\begin{aligned}
\delta w:\quad & ag_1\frac{\partial u}{\partial x}+ag_2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+ag_3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\\
&+ag_4\frac{\partial v}{\partial y}+ag_5\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+ag_6\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}+ag_7\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\\
&+ag_8\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}+ag_9\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^2\partial y}+ag_{10}\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\\
&+ag_{11}\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}+ag_{12}\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+ag_{13}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\
&+ag_{17}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+ag_{18}w+T_5\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\\
&+T_7\left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}\right)+T_8(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\
&-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial x^2\partial y})\\
&-\beta(T_{5z2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+T_{7z2}\left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}\right)\\
&+T_{8z2}(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x^3}\\
&+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial x^2\partial y}))\\
&+T_5\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+T_7\left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}\right)\\
&+T_8(\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial y^3}+\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}\\
&+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x\partial y^2})-\beta(T_{5z2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\\
&+T_{7z2}\left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}\right)\\
&+T_{8z2}(\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial y^3}+\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}\\
&+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x\partial y^2}))\\
&+\eta(T_{1z3}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)+T_{3z3}(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}\\
&+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3})+T_{4z3}(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}\\
&+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\\
&-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial x^2\partial y}\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial y^3}\\
&+\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x\partial y^2}))\\
&-\frac{T_2}{R_x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_y}\right)\right)\\
&-\frac{T_2}{R_y}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_y}\right)\right)+\Delta P\\
&=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\eta(I_3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y\partial t^2}\right)\\
&+J_4\left(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y\partial t^2}\right))\\
&\qquad-\eta^2 I_6\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial t^2}\right)
\end{aligned}\tag{۶}$$

معادله ماکسول به‌عنوان ششمین معادله حاکم بر مسئله به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&S_1(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{R_x\partial x}+\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\
&-\frac{\partial v}{R_y\partial y})-S_2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)-S_6(\frac{u}{\partial x^3}\\
&+\frac{\partial^2 w}{R_x\partial x^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 w}{R_y\partial x^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\\
&+\frac{\partial^2 w}{R_x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}+\frac{\partial^2 w}{R_y\partial y^2})+S_7(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}\\
&+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3})+S_8(\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x^3}\\
&+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\\
&-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 \psi_x}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\\
&-\frac{\partial^3 u}{R_x\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 \psi_y}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\partial^3 v}{R_y\partial y^3})\\
&+S_3\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right)-S_4(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\
&\quad-\frac{\partial u}{R_x\partial x}+\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{R_y\partial y})-S_5\phi=0
\end{aligned}\tag{۷}$$

در این بخش به بررسی و ارائه شرایط مرزی الکتریکی در هر دو حالت مدار باز و مدار بسته و همین‌طور شرایط مرزی مکانیکی موجود در لبه‌های پانل در حالت‌های تکیه‌گاهی مختلف، پرداخته می‌شود.

شرایط مرزی الکتریکی: با توجه به تابع پتانسیل الکتریکی در نظر گرفته شده، واضح است که مقدار این تابع در لبه‌ها ($x=0$ و $x=a$) مساوی صفر در نظر گرفته شده است، به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned}
&\phi(at\ \ x=0)=0\\
&\phi(at\ \ x=a)=0
\end{aligned}\tag{۸}$$

علاوه بر این، با در نظر گرفتن شرایط مرزی الکتریکی در لبه‌ها ($y=\pm b/2$) به‌صورت عایق، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{-h-h_p}^{-h} D_y\,dz+\int_{h}^{h+h_p} D_y\,dz=0\tag{۹}$$

شرایط مرزی مکانیکی:

۱- تکیه‌گاه ساده

$$\begin{aligned}
&N_{yy}=0\,,u=0\,,\psi_x=0\\
&M_{yy}-\alpha P_{yy}=0\,,w=0\,,P_{yy}=0
\end{aligned}\tag{۱۰}$$

۲- تکیه‌گاه گیردار

$$\begin{aligned}
&u=0\,,v=0\,,\psi_x=0\\
&\psi_y=0\,,w=0\,,\frac{\partial w}{\partial y}=0
\end{aligned}\tag{۱۱}$$

۳- روش حل

روش گلرکین به منظور حل معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی و همچنین به دست آوردن مقادیر ویژه سیستم، به‌کار برده شده است. همان‌گونه که در بخش قبل مشاهده شد معادله حرکت حاکم بر مسئله مورد نظر، معادله دیفرانسیلی جزئی می‌باشد. این روش در مقایسه با سایر روش‌های عددی درک فیزیکی بالاتری را فراهم می‌کند. روش گلرکین برای تقریب زدن معادلات دیفرانسیلی جزئی و شرایط مرزی متناظر با آن‌ها به‌وسیله یک مجموعه از معادلات دیفرانسیلی معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش مذکور دامنه پرکاربردی داشته و دقت و صحت آن در مسائل گوناگونی مورد آزمایش قرارگرفته است.

به‌منظور حل معادلات حاکم، عبارت‌های زیر در روش گلرکین مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \Phi_u^T q_u = \sum_{n=1}^{n'}\sum_{m=1}^{m'} q_{umn}(t)\varphi_{um}(x)\psi_{un}(y)\\
v(x,y,t) &= \Phi_v^T q_v = \sum_{n=1}^{n'}\sum_{m=1}^{m'} q_{vmn}(t)\varphi_{vm}(x)\psi_{vn}(y)\\
\psi_x(x,y,t) &= \Phi_{\psi_x}^T q_{\psi_x} = \sum_{n=1}^{n'}\sum_{m=1}^{m'} q_{xmn}(t)\varphi_{xm}(x)\psi_{xn}(y)\\
\psi_y(x,y,t) &= \Phi_{\psi_y}^T q_{\psi_y} = \sum_{n=1}^{n'}\sum_{m=1}^{m'} q_{ymn}(t)\varphi_{ym}(x)\psi_{yn}(y)\\
w(x,y,t) &= \Phi_w^T q_w = \sum_{n=1}^{n'}\sum_{m=1}^{m'} q_{wmn}(t)\varphi_{wm}(x)\psi_{wn}(y)\\
\phi(x,y,t) &= \Phi_\phi^T q_\phi = \sum_{n=1}^{n'}\sum_{m=1}^{m'} q_{\phi mn}(t)\varphi_{\phi m}(x)\psi_{\phi n}(y)
\end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در رابطه‌ی بالا Φ_u، Φ_w، Φ_{ψ_y}، Φ_{ψ_x}، Φ_v و Φ_ϕ توابع شکلی هستند که شرایط مرزی را ارضاء می‌کنند. همچنین، q_u، q_w، q_{ψ_y}، q_{ψ_x}، q_v و q_ϕ مختصات تعمیم‌یافته می‌باشند. همچنین، در هر کدام از راستاهای x و y از روش گلرکین با در نظر گرفتن شش جمله استفاده شده است. توابع شکل برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

۱- تکیه‌گاه ساده

$$\varphi_{rs}(x,y) = sin(r\frac{\pi x}{L})sin(s\frac{\pi y}{L}) \quad (۱۳)$$

۲- تکیه‌گاه گیردار

$$\begin{aligned}
&\varphi_{rs}(x,y) = (cosh(k_r x) - cos(k_r x)) - D_i(sinh(k_r x) - sin(k_r x))(cosh(k_s y) - cos(k_s y)) - D_s(sinh(k_s y) - sin(k_s y))\\
&D_r = \frac{sinh(k_r) - sin(k_r)}{cosh(k_r) - cos(k_r)}\\
&k_1 = 4.7300,\ k_2 = 7.8532,\ k_3 = 10.9956,\\
&k_4 = 14.1316, k_5 = 17.2887,\ r > 5 \Rightarrow k_r = (2r+1)\frac{\pi}{2}
\end{aligned} \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴) D_r و D_i ثوابتی هستند که برای ساده نوشتن به‌کار رفته‌اند. با جایگذاری توابع بالا در معادلات حاکم و اعمال روش گلرکین، شکل ماتریسی معادلات حاکم به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (۱۵)$$

در معادله (۱۵)، $q = \left[q_u^T\ q_v^T\ q_{\psi_x}^T q_{\psi_y}^T q_w^T\ q_\phi^T\right]^T$ بردار کلی مختصات تعمیم یافته است.

۴- نتایج و بحث

همان‌طور که قبلاً گفته شد، از روش گلرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات با مشتقات معمولی استفاده می‌شود. برای تئوری برشی مرتبه سوم، نتایج مقادیر ویژه و فشار آیرودینامیک بحرانی فلاتر پانل‌های انحنادار ساخته‌شده از مواد پیشرفته در نظر گرفته می‌شود. این پانل‌های انحنادار با لایه‌های پیزوالکتریک پوشانده شده‌اند که تحت تأثیر جریان مافوق صوت سیال قرار گرفته‌اند. بعد از حل معادلات دیفرانسیل معمولی، مقادیر ویژه پانل به دست می‌آید و سپس با تحلیل پایداری که در بخش پیش ذکر شد، فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر حاصل می‌شود. به منظور انجام این کار، برای تئوری برشی مرتبه سوم، یک برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار متلب نوشته شد که خروجی آن، مقادیر ویژه و فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر می‌باشد. سپس، به منظور بررسی صحت روابط و جواب‌های به دست آمده، نتایج عددی ارائه شده توسط تئوری برشی مرتبه سوم با نتایج ارائه شده در مراجع معتبر مقایسه گردید. مقایسه‌ها نشان داد که نتایج، دارای مطابقت بسیار خوبی با جواب‌های

موجود در مقالات هستند. پس از اعتبارسنجی نتایج به دست آمده، با در نظر گرفتن مقادیر متفاوتی برای ابعاد هندسی پوسته، ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک، شرایط مرزی الکتریکی مدار بسته و مدار باز، ضریب تخلخل، الگوهای توزیع تخلخل، الگوهای توزیع نانو صفحات گرافن، درصد وزنی و همچنین ابعاد هندسی آن‌ها نتایج جدیدی در قالب جداول و نمودارهایی در شرایط مرزی مکانیکی مختلف ارائه می‌گردد. جنس لایه میانی ورق درنظرگرفته شده در تحلیل حاضر، از فلزات متخلخل است که خواص برخی از آن‌ها (آلومینیوم سلولی و فوم فلزی) بر طبق مرجع [۳۴] در جدول **۱** آمده است. همچنین در این جدول، خواص برخی از مواد پیزوالکتریک بر طبق مرجع [۳۴] نیز آورده شده است.

همچنین خواص مکانیکی نانو صفحات گرافن به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند [۳۵]:

$$E_{GPL} = 1.01TPa,$$
$$\rho_{GPL} = 1062.5kg.m^{-3},$$
$$v_{GPL} = 0.186,\ b_{GPL} = 1.5\mu m,$$
$$l_{GPL} = 2.5\mu m,\ t_{GPL} = 1.5nm$$

جدول (۱): خواص مواد اپوکسی فلز و لایه پیزوالکتریک [۳۴]

ویژگی‌های مواد	هسته ورق (cellular aluminum)	لایه پیزوالکتریک (PZT-4)
E (GPa)	۷۰	–
v	۰/۳	–
$c_{11}(GPa)$	–	۱۳۲
$c_{12}(GPa)$	–	۷۱
$c_{33}(GPa)$	–	۱۱۵
$c_{13}(GPa)$	–	۷۳
$c_{55}(GPa)$	–	۲۶
$e_{31}(cm^{-2})$	–	-۴/۱
$e_{33}(cm^{-2})$	–	۱۴/۱
$e_{15}(cm^{-2})$	–	۱۰/۵
$\Xi_{11}(nFm^{-1})$	–	۷/۱۲۴
$\Xi_{33}(nFm^{-1})$	–	۵/۸۴۱
$\rho\ (kgm^{-3})$	۲۷۰۷	۷۵۰۰

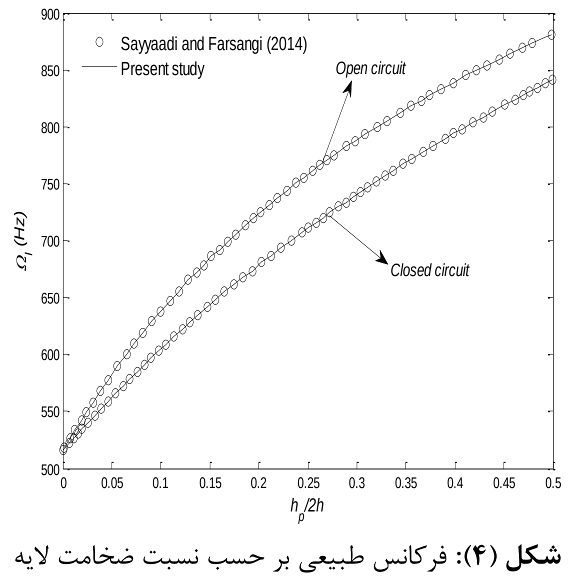
در این مقاله، به منظور خلاصه‌نویسی، از نمادهای S و C برای نشان دادن شرایط تکیه‌گاهی استفاده شده است که به ترتیب نشان‌دهنده تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار هستند. به‌عنوان مثال عبارت SCSC، معرف شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو لبه موازی هم ($x_1 = 0, x_1 = a$)، تکیه‌گاه گیردار در دو لبه موازی دیگر ($x_2 = -b/2,\ x_2 = b/2$) می‌باشد. از طرف دیگر در کل این بخش، طول و عرض پانل مربعی مساوی واحد در نظر گرفته شده است.

در ضمن برای تحلیل ارتعاشات و پایداری سیستم از معادله زیر جهت بدون بعدسازی مقادیر ویژه استفاده شده است.

$$\Omega = \omega\sqrt{\frac{D_m}{2\rho_m h a^4}}$$

به‌منظور اعتبارسنجی نتایج به دست آمده از این پژوهش، از منابع معتبر بهره گرفته شده است که در ادامه به تفسیر نتایج آن‌ها پرداخته می‌شود.

در شکل **۴**، فرکانس طبیعی پانل بر حسب نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت پانل برای دو حالت مدار الکتریکی باز و بسته ترسیم شده است. در این شکل پارامترهای $a/R = 0.2$، $2h/a = 0.2$ و $b/a = 1$ و شرایط مرزی SSSS در نظر گرفته شده‌اند.



شکل (۴): فرکانس طبیعی بر حسب نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت پانل برای دو حالت مدار الکتریکی باز و بسته و شرایط مرزی SSSS و سایر پارامترها $a/R = 0.2$، $2h/a = 0.2$ و $b/a = 1$.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت پانل، فرکانس طبیعی پانل افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر این نمودار نشان می‌دهد که هر چه نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به

ضخامت پانل بیشتر باشد یا به عبارتی ضخامت لایه پیزو بزرگ‌تر باشد، استحکام پانل بیشتر می‌شود و فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. علاوه بر این، فرکانس‌های طبیعی مستخرج از مطالعه حاضر با نتایج مقاله صیادی و فرسنگی [۲۳] تطابق بسیار خوبی دارند. لازم به ذکر است در مطالعه حاضر از روش گلرکین با در نظر گرفتن شش جمله استفاده شده است. در این بخش، همچنین نتایج حاصل از تحقیق حاضر در قالب جدول‌ها و نمودارهایی ارائه می‌شود. گفتنی است که در تمامی نتایج ارائه شده در این بخش، هسته متخلخل پوسته از جنس آلومینیوم متخلخل، و لایه‌های پیزوالکتریک نیز از جنس ماده (PZT-4) در نظر گرفته شده‌اند که خواص الکتریکی و مکانیکی آن‌ها در جدول **۱** موجود است. از طرفی، از آنجایی که با تغییرات در مقادیر R_x و R_y می‌توان سازه‌های مختلفی را بررسی نمود. برای مثال در ذیل به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود:

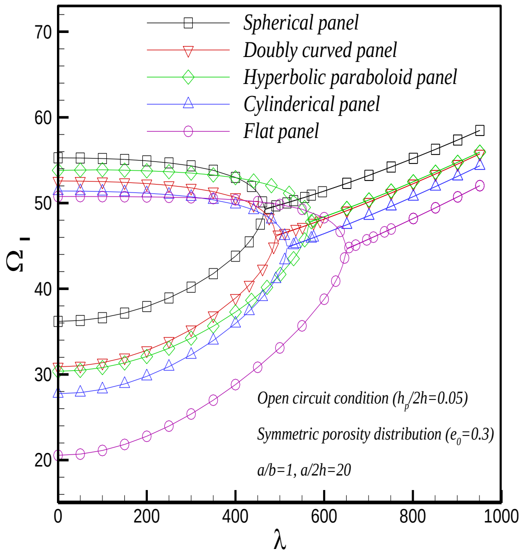
۱- پوسته استوانه[۱]: با فرض $R_x = R$ و به سمت بی‌نهایت میل دادن مقدار R_y

۲- پوسته کروی[۲]: با فرض $R_x = R_y = R$

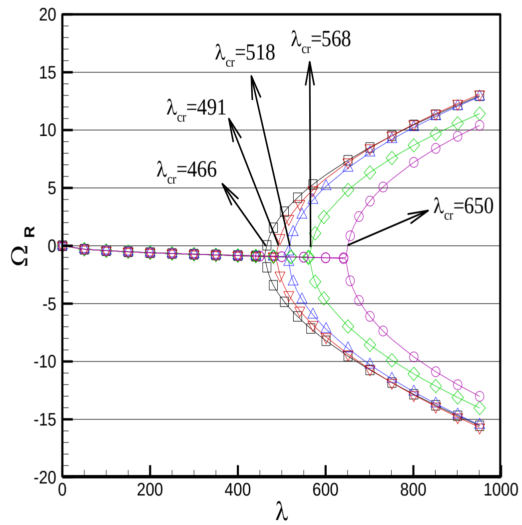
۳- پوسته از دو طرف انحنادار[۳]: با فرض $R_y = 2R_x$

۴- پوسته هایپربولیک[۴]: با فرض $R_x = -R_y$

۵- پوسته تخت[۵]: با فرض به سمت بی‌نهایت میل دادن مقادیر R_y و R_x. تغییرات مقادیر ویژه برای انواع حالات ممکن از پوسته‌ها در شکل **۵** رسم شده است. این نمودار برای مقادیر $a/2h = 20$، $a = 1m$، $h_p/2h = 0.05$ و $e_0 = 0.3$ و الگوی توزیع متقارن تخلخل به همراه شرایط الکتریکی مدار باز و شرط مرزی چهار طرف تکیه ساده ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل **۵** مشخص است، پوسته تخت یا ورق،



(الف)- قسمت موهومی



(ب)- قسمت حقیقی

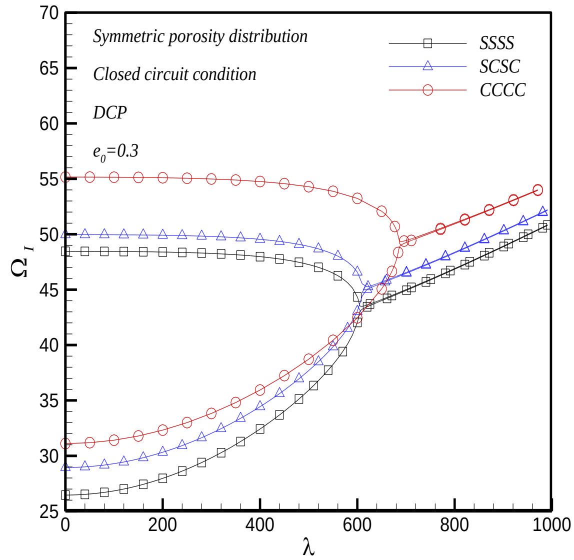
شکل (۵): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای انواع پوسته‌ها، حالت مدار بسته، توزیع تخلخل متقارن

فلاتر بیشتری نسبت به سایر پوسته‌ها پیش‌بینی می‌کند. بیشترین مقدار فرکانس طبیعی و کمترین فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر را پوسته کروی پیش‌بینی می‌کند.

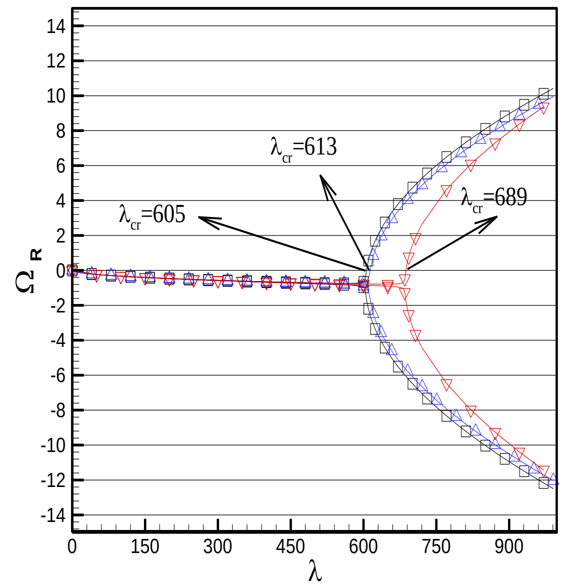
در شکل **۶** همان‌طور که انتظار می‌رود، افزودن قید بر تکیه‌گاه‌های پانل، سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود. لذا می‌توان شرایط تکیه‌گاهی را به ترتیب افزایش فرکانس‌های طبیعی، به‌صورت (CCCC)، (SCSC) و (SSSS) مرتب نمود. دلیل این تغییرات را می‌توان به این صورت بیان کرد که زمانی‌که یک لبه پانل دارای تکیه‌گاه

[1] Cylindrical panel
[2] Spherical panel
[3] Doubly curved panel
[4] Hyperbolic paraboloidal panel
[5] Flat panel

گیردار باشد، فرکانس طبیعی و فشار آیرودینامیکی بحرانی فلاتر آن به دلیل زیاد شدن سفتی خمشی پانل در مقایسه با سایر شرایط تکیه‌گاهی، کاهش می‌یابد.



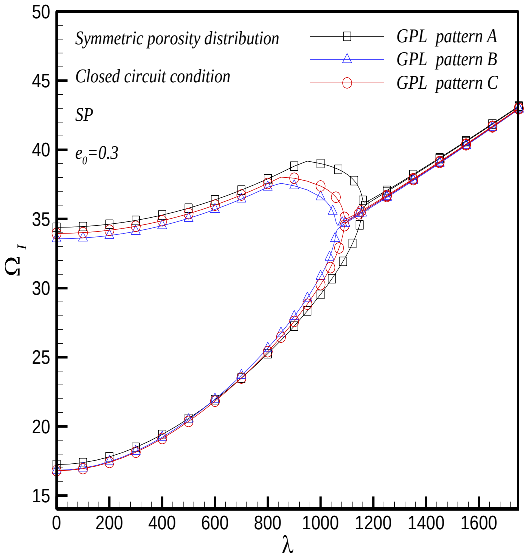
(الف)- قسمت موهومی



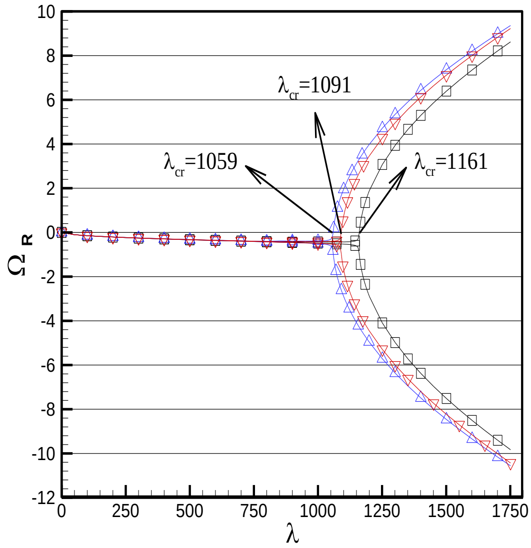
(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۶): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای انواع شرایط مرزی مکانیکی، حالت مدار بسته، توزیع تخلخل متقارن

تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیکی برای پانل متخلخل تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن با توزیع تخلخل متقارن و نامتقارن به ترتیب، در شکل‌های **۷** و **۸** ترسیم شده است. در این شکل‌ها مقادیر $e_0 = 0.3$، $2h/a = 0.2$، $b/a = 1$، $h_p/2h = 0.1$ و $w_{GPL} = 0.5\%$ در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، از تئوری برشی مرتبه سوم پانل برای استخراج نتایج استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش فشار آیرودینامیکی، فرکانس طبیعی اول و دوم به یکدیگر نزدیک می‌شوند تا اینکه در فشار آیرودینامیک خاصی به یکدیگر برخورد می‌کنند. لازم به ذکراست در محل برخورد این دو فرکانس با یکدیگر، بخش حقیقی متناظر نیز صفر خواهد شد، در این فشار آیرودینامیکی سیستم پایداری خود را از طریق فلاتر از دست می‌دهد. به عبارت دیگر، در فشارهای آیرودینامیکی بیشتر از فشار آیرودینامیکی فلاتر (λ_{cr})، ایجاد هرگونه اغتشاش در سیستم منجر به ایجاد دامنه بزرگ نوسانات خواهد شد. همچنین در فشارهای آیرودینامیکی کمتر از فشار آیرودینامیکی فلاتر، ایجاد هرگونه اغتشاش در سیستم منجر به کاهش دامنه نوسانات می‌شود. در این شکل‌ها، تأثیر الگوهای مختلف نانو صفحات گرافن در پانل با لایه‌های پیزوالکتریک در حالت مدار الکتریکی بسته بررسی شده است. مشاهده می‌شود که نانو صفحات گرافن با الگو A، فرکانس‌ها و فشار آیرودینامیکی فلاتر بیشتری نسبت به سایر الگوها پیش‌بینی می‌کنند که این خود بیانگر افزایش ناحیه پایدار سیستم می‌باشد. زیرا توزیع نانو صفحات گرافن با الگو A، به دلیل تراکم نانو صفحات گرافن در فواصل دورتر از تار خنثی منجر به افزایش سفتی پانل نسبت به سایر الگوها می‌شود. شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب، توزیع تخلخل متقارن و نامتقارن در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشخص است توزیع تخلخل متقارن، فرکانس و فشار آیرودینامیکی فلاتر بیشتری را پیش‌بینی می‌کند. از مقایسه این شکل‌ها با یکدیگر، این نتیجه حاصل می‌شود که برای افزایش ناحیه پایدار سیستم مذکور، استفاده از توزیع تخلخل متقارن که بر طبق الگو A با نانو صفحات گرافن تقویت‌شده است، پیشنهاد می‌شود.



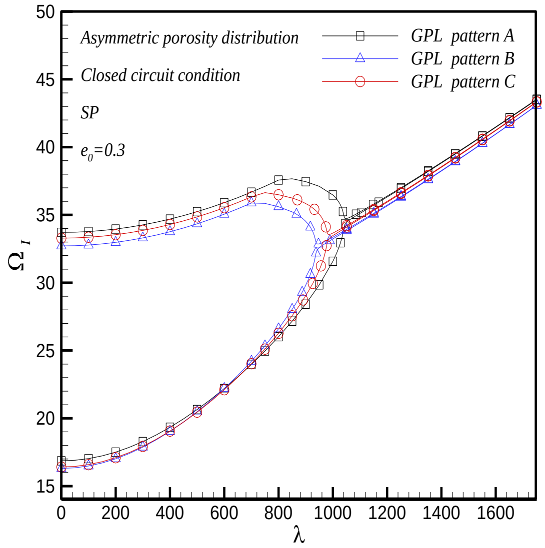
(الف)- قسمت موهومی



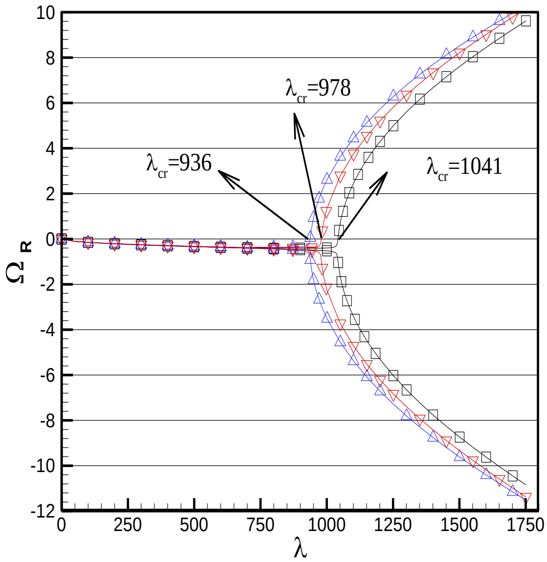
(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۷): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای انواع توزیع نانو صفحات گرافن، حالت مدار بسته، توزیع تخلخل متقارن $a/2h = 5$، $a = 1m$، $h_p/2h = 0.1$ و $e_0 = 0.3$

در شکل‌های **۹**، **۱۰** و **۱۱**، تغییرات مقادیر ویژه بر حسب فشار آیرودینامیک برای توزیع‌های تخلخل مختلف از پانل متخلخل با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده ترسیم شده است. در این شکل‌ها پارامترهای $2h/a = 0.1$،



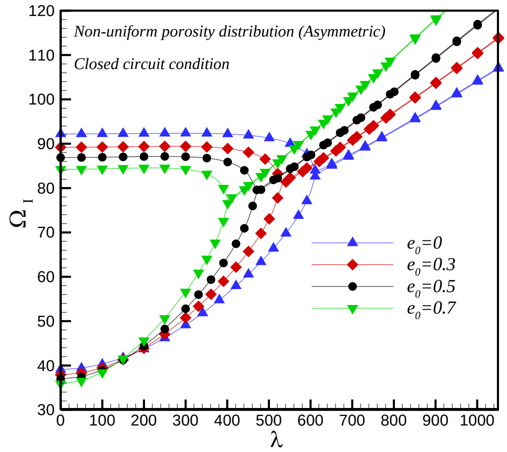
(الف)- قسمت موهومی



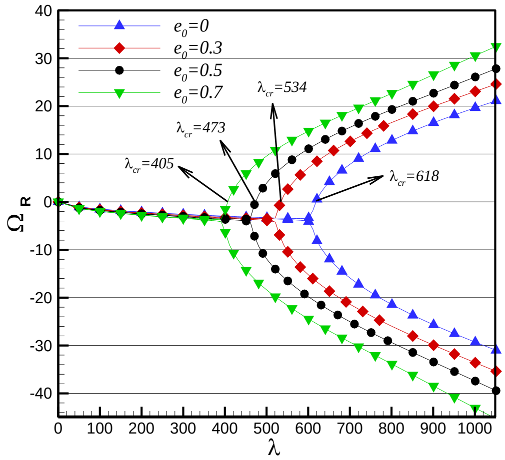
(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۸): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک برای انواع توزیع نانو صفحات گرافن، حالت مدار بسته، توزیع تخلخل نامتقارن $a/2h = 5$، $a = 1\mathrm{m}$، $h_p/2h =$ 0.1 و $e_0 = 0.3$

$h_p = 0$ و $b/a = 1$ در نظر گرفته شده‌اند. همان‌طور که مشخص می‌شود، با افزایش ضریب تخلخل، پانل نرم‌تر شده و فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر آن کاهش می‌یابند.

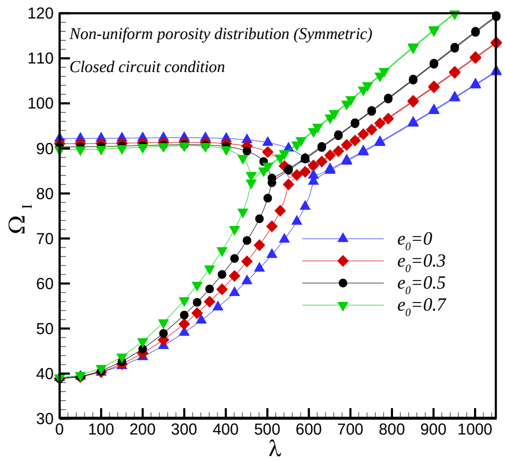


(الف)- قسمت موهومی

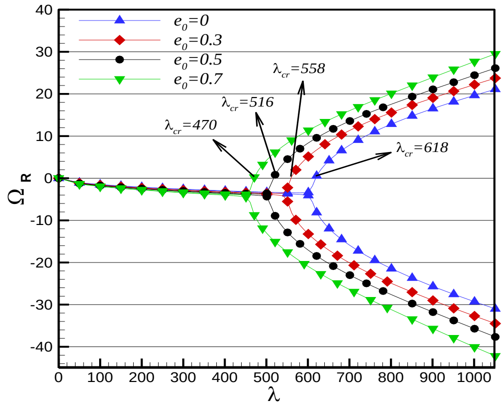


(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۹): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک بهازای توزیع تخلخل نامتقارن، $2h/a = 0.1$، $h_p = 0$ و $b/a = 1$

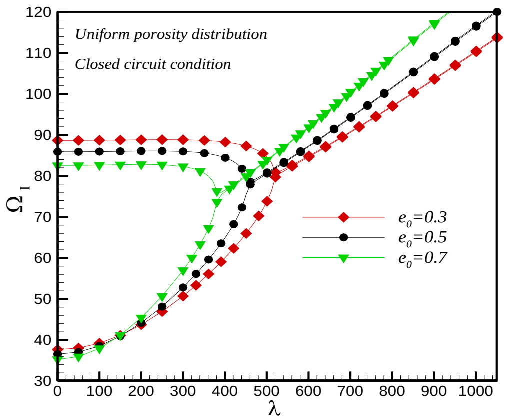


(الف)- قسمت موهومی

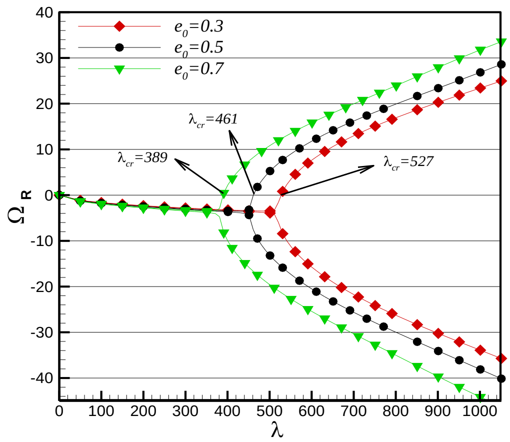


(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۱۰): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک بهازای توزیع تخلخل متقارن، $2h/a = 0.1$، $h_p = 0$ و $b/a = 1$



(الف)- قسمت موهومی

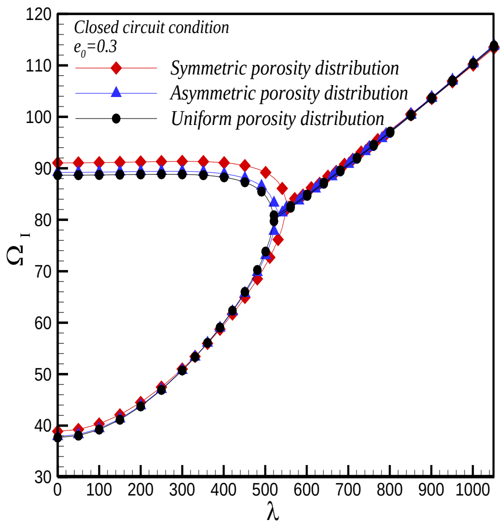


(ب)- قسمت حقیقی

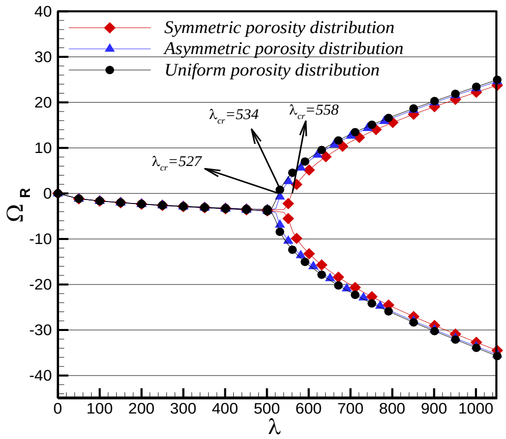
شکل (۱۱): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک بهازای توزیع تخلخل یکنواخت، $2h/a = 0.1$، $h_p = 0$ و $b/a = 1$

به عبارت دیگر این نمودارها نشان می‌دهند که هر چه ضریب تخلخل بیشتر باشد یا به عبارتی حفره‌های موجود در ساختار ماده متخلخل بزرگ‌تر باشند، استحکام پانل کمتر می‌شود و فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر کاهش می‌یابند، بنابراین، پایداری سیستم نیز کمتر می‌شود. این بدان معناست که پانل متخلخل با ضریب تخلخل بزرگ‌تر، پایداری خود را زودتر از دست می‌دهد. نکته قابل‌توجه دیگر این است که کاهش فرکانس‌های طبیعی برای پانل با توزیع تخلخل متقارن نسبت به سایر توزیع‌ها، کمتر می‌باشد. به بیان دیگر، افزایش ضریب تخلخل روی فرکانس‌های طبیعی پانل با توزیع تخلخل نامتقارن و یکنواخت تأثیر بیشتری دارد. علاوه بر این، همان‌طور که مشخص می‌شود، پانل با توزیع تخلخل متقارن، فرکانس‌ها و فشار آیرودینامیک فلاتر بیشتری را پیش‌بینی می‌کند.

شکل‌های **۱۲** و **۱۳**، تأثیر حالت‌های الکتریکی مدار باز و مدار بسته لایه‌های پیزوالکتریک را روی مقادیر ویژه و پایداری پانل متخلخل نشان می‌دهند. در این شکل‌ها پارامترهای $2h/a = 0.1$، $h_p/2h = 0.05$، $e_0 = 0.3$ و $b/a = 1$ در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، هر کدام از شکل‌ها برای توزیع‌های تخلخل مختلف ترسیم شده است. افزودن لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین پانل، بسته به شدت اثر هر یک از مواردی که قبلاً اشاره شد، مقدار فرکانس‌های طبیعی پانل را کم یا زیاد می‌کند.

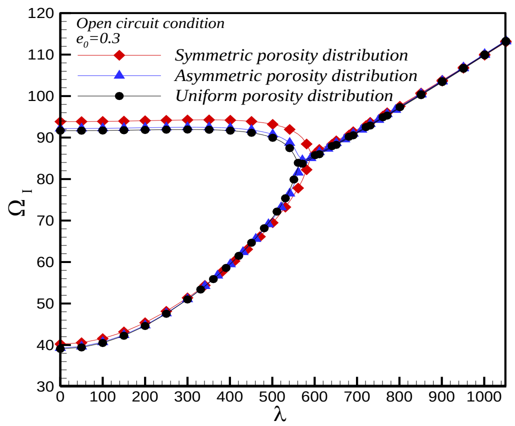


(الف)- قسمت موهومی

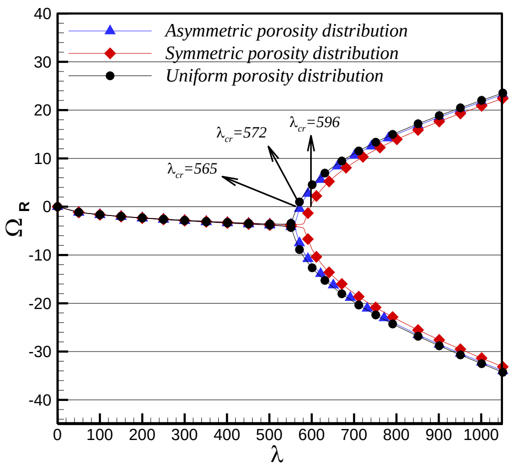


(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۱۲): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک به‌ازای توزیع تخلخل‌های مختلف، حالت مدار بسته، $2h/a = 0.1$، $h_p/2h = 0.05$، $e_0 = 0.3$ و $b/a = 1$



(الف)- قسمت موهومی

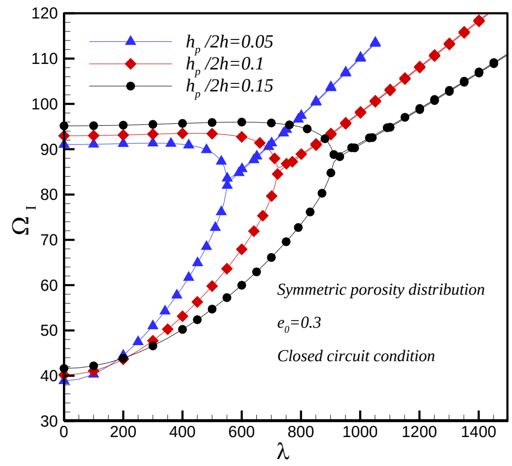


(ب)- قسمت حقیقی

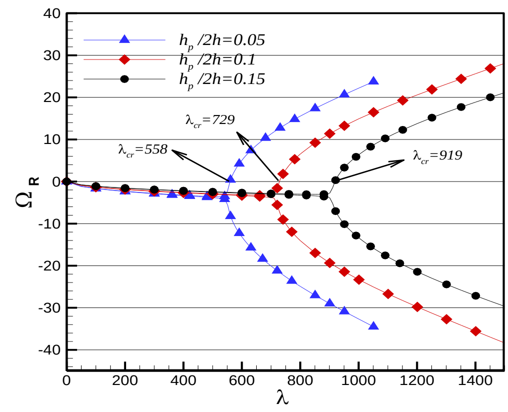
شکل (۱۳): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک به‌ازای توزیع تخلخل‌های مختلف، حالت مدار باز، $2h/a = 0.1$، $h_p/2h = 0.05$، $e_0 = 0.3$ و $b/a = 1$

همان‌طور که از شکل‌های **۱۲** و **۱۳** مشخص است، فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر برای حالت مدار باز از حالت مدار بسته بیشتر می‌باشند. این موضوع به این نکته اشاره دارد که همواره اثر مکانیکی مواد پیزوالکتریک موسوم به اثر سفتی همراه با اثر الکتریکی این مواد که به اثر پیزو نیز موسوم است، باعث تغییر در فرکانس‌های طبیعی و پایداری پانل می‌شود. این در حالی است که در حالت مدار بسته، تغییر فرکانس عمدتاً ناشی از اثر سفتی ماده پیزوالکتریک است و اثر پیزو بسیار ناچیز می‌باشد. این تفاوت رفتاری ناشی از نحوه توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت پانل است. در واقع دلیل این امر این است که در شرایط الکتریکی مدار باز، پتانسیل الکتریکی در سطح داخلی لایه پیزوالکتریک صفر بوده و به‌طور پیوسته افزایش می‌یابد تا اینکه در سطح خارجی به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در حالی‌که در حالت مدار بسته، مقدار پتانسیل الکتریکی روی سطوح داخلی و خارجی به علت قرار گرفتن الکترودها در وضعیت اتصال کوتاه، دارای مقدار صفر و در صفحه میانی لایه پیزوالکتریک به بیشترین مقدار خود می‌رسد. می‌توان دلیل اختلاف بیشتر فرکانس‌ها در حالت مدار باز را به‌طور واضح‌تر این‌گونه نیز بیان کرد که پتانسیل لایه‌های پیزوالکتریک در حالت مدار باز، به دلیل اثر الکتریکی(اثر پیزو) تبدیل به انرژی مکانیکی شده و این افزایش انرژی مکانیکی موجب افزایش بیشتر فرکانس نسبت به حالت مدار بسته می‌شود. بنابراین، اگرچه اثر پیزو برای حالت مدار بسته کوچک باقی می‌ماند ولی در حالت مدار باز، این اثر نقش کلیدی را در تعیین فرکانس‌های طبیعی و پایداری پانل بازی می‌کند. علاوه بر این، می‌توان توزیع‌های مختلف تخلخل را به ترتیب افزایش فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر، به‌صورت توزیع متقارن، نامتقارن و یکنواخت مرتب نمود.

در شکل‌های **۱۴** تا **۱۵**، اثر تغییرات پارامترهای مختلف ازجمله نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت هسته $(h_p/2h)$، ضخامت هسته به طول $(2h/a)$ و ابعاد هندسی (b/a) در هر دو حالت الکتریکی مدار بسته و مدار باز بر روی فرکانس‌های طبیعی و پایداری پانل متخلخل با لایه‌های پیزوالکتریک نشان داده شده است. افزودن لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین پانل، می‌تواند در حالت‌های مختلف هندسی و شرایط تکیه‌گاهی، باعث کاهش و یا افزایش مقادیر فرکانس‌های طبیعی شود. در واقع در هر دو حالت الکتریکی مدار بسته و مدار باز، هنگامی که لایه پیزوالکتریک اضافه می‌شود، از سه جهت روی فرکانس‌های طبیعی پانل تأثیر می‌گذارد. از یک طرف افزودن این لایه‌ها باعث افزایش سفتی پانل و در نتیجه افزایش مقدار فرکانس‌ها شده و از طرف دیگر با افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک، مقادیر اینرسی‌های جرم، زیاد شده و خود کاهش مقدار فرکانس‌های طبیعی پانل را به دنبال خواهد داشت. بنابراین، با افزودن لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین پانل، بسته به شدت اثر هر یک از موارد بالا، مقدار فرکانس‌های طبیعی پانل کم و یا زیاد می‌گردد. در شکل‌های **۱۴** و **۱۵**، اثرات ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک، $(h_p/2h)$، بر فرکانس طبیعی و فشار



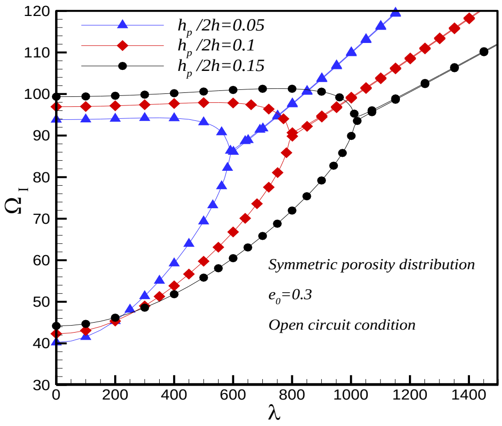
(الف)- قسمت موهومی



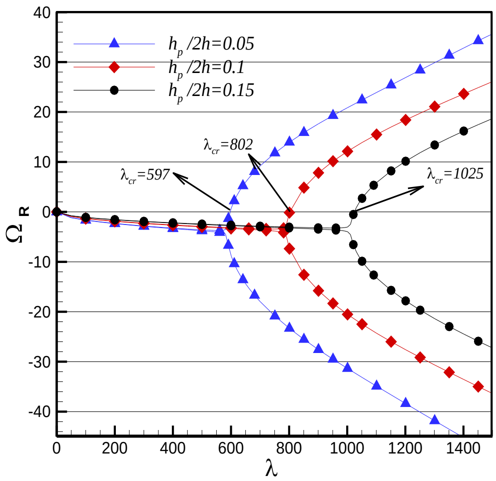
(ب)

شکل (۱۴): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک به‌ازای توزیع تخلخل متقارن ، حالت مدار بسته، نسبت ضخامت‌های مختلف $e_0 = 0.3$ ،$2h/a = 0.1$ و $b/a = 1$

آیرودینامیک فلاتر در دو حالت مدار بسته و مدار باز برای یک پانل متخلخل در دو شرط مرزی متفاوت الکتریکی نشان داده شده است. در این شکل‌ها مقادیر $e_0 = 0.3$، $b/a = 1$ و $2h/a = 0.1$ فرض شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک منجر به افزایش پایداری سیستم، برای هر دو حالت الکتریکی مدار باز و بسته می‌شود. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است، فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر در حالت مدار باز بیشتر از حالت مدار بسته است.



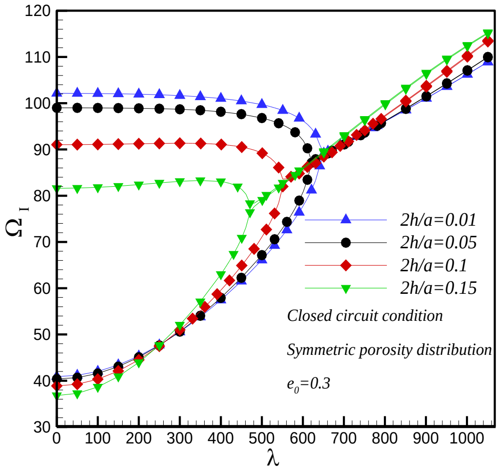
(الف)- قسمت موهومی



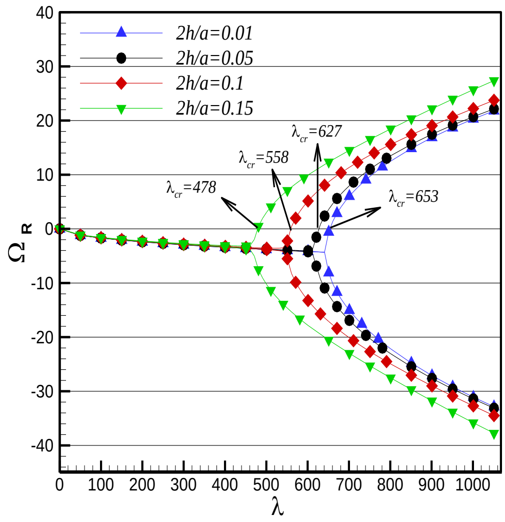
(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۱۵): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک به‌ازای توزیع تخلخل یکنواخت ، حالت مدار باز، نسبت ضخامت‌های مختلف $2h/a = 0.1$، $e_0 = 0.3$ و $b/a = 1$

تأثیر ابعاد پانل بر روی مقادیر ویژه و فشار آیرودینامیکی فلاتر برای پانل متخلخل با توزیع متقارن، در شکل‌های **۱۶** و **۱۷** مشاهده می‌شود. تأثیر ضخامت هسته پانل روی فشار آیرودینامیکی فلاتر و فرکانس‌های طبیعی در حالت الکتریکی مدار بسته برای مقادیر $a = 1m$، $h_p/2h = 0.05$ و $e_0 = 0.3$ در شکل **۱۶** ترسیم شده است. با افزایش نسبت ضخامت هسته پانل به طول آن، مقادیر کمتری برای فرکانس طبیعی پانل و فشار آیرودینامیکی فلاتر به دست می‌آید. همچنین، در شکل **۱۷** به وضوح می‌توان دریافت که افزایش نسبت ابعادی (b/a)، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیکی فلاتر می‌شود.

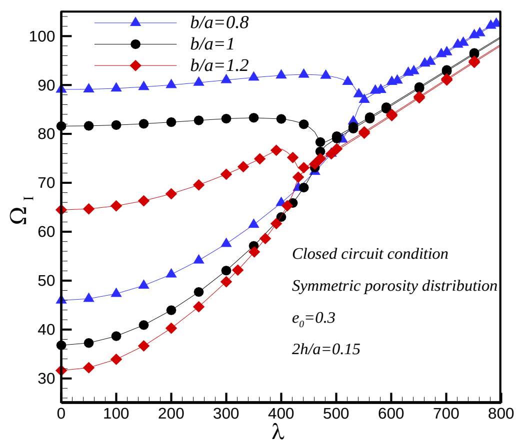


(الف)- قسمت موهومی

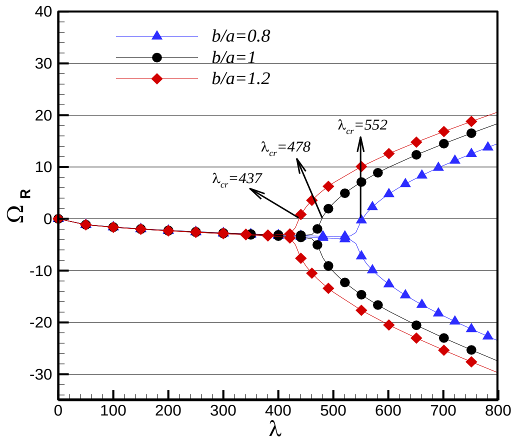


(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۱۶): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک به‌ازای نسبت ابعاد مختلف، حالت مدار بسته، توزیع تخلخل متقارن $a = 1m$، $h_p/2h = 0.05$ و $e_0 = 0.3$.



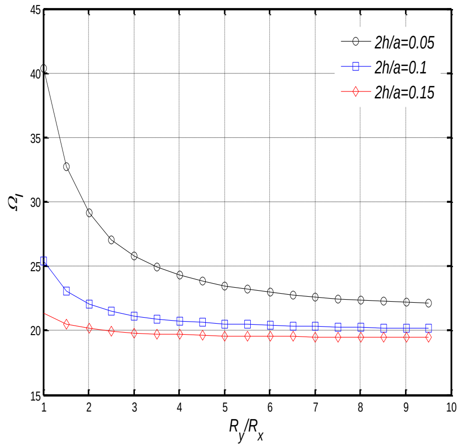
(الف)- قسمت موهومی



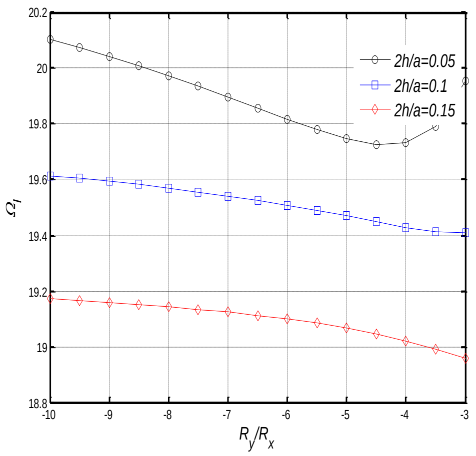
(ب)- قسمت حقیقی

شکل (۱۷): تغییرات مقادیر ویژه برحسب فشار آیرودینامیک به‌ازای مقادیر مختلف b/a، حالت مدار بسته، توزیع تخلخل متقارن $2h/a = 0.15$، $a = 1m$، $h_p/2h = 0.05$ و $e_0 = 0.3$

تأثیر ابعاد هندسی اعم از شعاع‌های انحنا و نسبت ضخامت پانل به طول آن در شکل‌های ۱۸- الف و ۱۸- ب نشان داده شده است. در این شکل‌ها، پارامترها $a/R_x = 0.2$، $2h/a = 0.1$، $b/a = 1$، $\lambda = 100$ با توزیع تخلخل متقارن و ضریب تخلخل $e_0 = 0.3$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت هسته پانل به طول آن، مقادیر کمتری برای فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل حاصل شده است. همچنین، با افزایش نسبت شعاع‌های R_y/R_x، و در نظر گرفتن مقادیر مثبت (پانل به‌صورت مقعر)، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پانل کاهش می‌یابد. اما با در نظر گرفتن پانل به‌صورت محدب (نسبت شعاع‌های R_y/R_x منفی)، افزایش این نسبت منجر به افزایش فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل می‌شود.



(الف)- پانل مقعر



(ب)- پانل محدب

شکل (۱۸): فرکانس طبیعی بر حسب نسبت شعاع‌ها برای نسبت ضخامت به طول مختلف و سایر پارامترها $a/R_x = 0.2$، $b/a = 1$، $\lambda = 100$، با توزیع تخلخل متقارن و ضریب تخلخل $e_0 = 0.3$

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق از سه نوع توزیع متقارن، نامتقارن و یکنواخت هسته متخلخل در راستای ضخامت پانل استفاده شد. این پانل‌ها محصور به لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین و تحت تأثیر جریان مافوق صوت سیال قرار دارند. برای استخراج معادلات حاکم، از اصل همیلتون و معادله ماکسول با استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه سوم پوسته به همراه تئوری مرتبه اول پیستون استفاده شده است. سپس با روش گلرکین، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند. با حل معادلات دیفرانسیل معمولی، مقادیر ویژه سیستم در قالب

نمودارهایی ارائه شدند. همان‌طور که مشاهده شد با افزایش نسبت شعاع انحنا به طول پانل، فرکانس‌های طبیعی کاهش پیدا می‌کنند. افزایش نسبت شعاع‌های انحنا به طول و عرض پانل، به معنای تخت در نظر گرفتن طول و عرض پانل می‌باشند و نکته جالب، نزدیک شدن فرکانس‌های طبیعی پانل‌های انحنادار به فرکانس‌های طبیعی پانل تخت (ورق) می‌باشند. از نتایج دیگر گزارش شده می‌توان به افزودن لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین پانل‌ها اشاره نمود که باعث کاهش و یا افزایش مقادیر فرکانس‌های طبیعی می‌شود. همان‌طور که مشاهده شد با افزایش ضریب تخلخل یا به عبارتی بزرگ‌تر بودن حفره‌های موجود در ساختار ماده متخلخل، کاهش فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر پانل در شرایط مرزی الکتریکی و مکانیکی مختلف پیش‌بینی می‌کند. از میان سه الگوی متفاوت توزیع تخلخل در راستای ضخامت، پانل با توزیع تخلخل متقارن و یکنواخت، به ترتیب، بیشترین و کمترین مقدار فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر را پیش‌بینی می‌کنند. در تحلیل آیروالاستیک پانل‌ها بر مبنای تئوری برشی مرتبه سوم، یکی از بهترین روش‌ها برای افزایش پایداری سیستم در نظر گرفتن هسته متخلخل متقارن با شرایط الکتریکی مدار باز لایه‌های پیزوالکتریک است. قید بیشتر بر شرایط مرزی همواره باعث افزایش سفتی و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر پانل می‌گردد بدین معنی که شرایط مرزی SSSS و CCCC به ترتیب دارای کمترین و بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر می‌باشد. افزایش نسبت ابعادی (a/b)، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر پانل می‌شود. با افزایش نسبت ضخامت هسته به طول پانل، در صورت ثابت بودن سایر پارامترهای مؤثر در فرکانس، کاهش فشار آیرودینامیک فلاتر اتفاق می‌افتد. اثر الکتریکی ماده پیزوالکتریک، همانند اثر سختی آن همواره باعث افزایش فرکانس طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر پانل می‌شود و این افزایش فرکانس و فشار آیرودینامیک فلاتر، همواره در تمامی ابعاد، شرایط مرزی، ضرایب تخلخل متفاوت برای پانل، در حالت الکتریکی مدار باز بیشتر از حالت مدار بسته متناظر است. در حالت مدار باز، اثر مکانیکی لایه پیزوالکتریک موسوم به اثر سختی، همراه با اثر الکتریکی این مواد که به اثر پیزو نیز موسوم است باعث تغییر در فرکانس‌های طبیعی و فشار آیرودینامیک فلاتر پانل می‌شوند. حال آن‌که در حالت مدار بسته، تغییر فرکانس عمدتاً ناشی از اثر سختی ماده پیزوالکتریک بوده و اثر پیزو بسیار ناچیز است.

۶- مراجع

1. Formica, G., Lacarbonara, W. and Alessi, R. “Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, No. 10, pp. 1875-1889, 2010.
2. Omidi, M., Alaie, S. and Rousta, A. “Analysis of the vibrational behavior of the composite cylinders reinforced with non-uniform distributed carbon nanotubes using micro-mechanical approach”, Meccanica, Vol. 47, No. 4, pp. 817-833, 2012.
3. Hedayati, H. and Aragh, B. S. “Influence of graded agglomerated CNTs on vibration of CNT-reinforced annular sectorial plates resting on Pasternak foundation”, Applied Mathematics and Computation, Vol. 218, No. 17, pp. 8715-8735, 2012.
4. Aragh, B. S., Barati, A. N. and Hedayati, H. “Eshelby–Mori–Tanaka approach for vibrational behavior of continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical panels”, Composites Part B: Engineering, Vol. 43, No. 4, pp. 1943-1954, 2012.
5. Moradi-Dastjerdi, R., Foroutan, M. and Pourasghar, A. “Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method”, Materials & Design, Vol. 44, pp. 256-266, 2013.
6. Yas, M., Pourasghar, A., Kamarian, S. and Heshmati, M. “Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube”, Materials & Design, Vol. 49, pp. 583-590, 2013.
7. Alibeigloo, A. “Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity”, European Journal of Mechanics-A/Solids, Vol. 44, pp. 104-115, 2014.
8. Heydarpour, Y., Aghdam, M. and Malekzadeh, P. “Free vibration analysis of rotating functionally graded carbon nanotube-reinforced composite truncated conical shells”, Composite Structures, Vol. 117, pp. 187-200, 2014.
9. Malekzadeh, P. and Zarei, A. “Free vibration of quadrilateral laminated plates with carbon nanotube reinforced composite layers”, Thin-Walled Structures, Vol. 82, pp. 221-232, 2014.

functionally graded doubly curved shells using higher order shear deformation theory", Composite Structures, Vol. 93, No. 10, pp. 2541-2553, 2011.
22. Kiani, Y., Shakeri, M. and Eslami, M. "Thermoelastic free vibration and dynamic behaviour of an FGM doubly curved panel via the analytical hybrid Laplace–Fourier transformation", Acta Mechanica, Vol. 223, No. 6, pp. 1199-1218, 2012.
23. Sayyaadi, H. and Farsangi, M. A. A. "An analytical solution for dynamic behavior of thick doubly curved functionally graded smart panels", Composite Structures, Vol. 107, pp. 88-102, 2014.
24. Ashley, H. "Piston theory-a new aerodynamic tool for the aeroelastician", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 12, pp. 1109-1118, 1956.
25. Fung, Y. "Some recent contributions to panel flutter research", AIAA Journal, Vol. 1, No. 4, pp. 898-909, 1963.
26. Krumhaar, H. "The accuracy of linear piston theory when applied to cylindrical shells", AIAA Journal, Vol. 1, No. 6, pp. 1448-1449, 1963.
27. Dowell, E. H. "Nonlinear oscillations of a fluttering plate", AIAA journal, Vol. 4, No. 7, pp. 1267-1275, 1966.
28. Dowell, E. "Nonlinear flutter of curved plates", AIAA Journal, Vol. 7, No. 3, pp. 424-431, 1969.
29. Olsson, U. "Supersonic flutter of heated circular cylindrical shells with temperature-dependent material properties", AIAA Journal, Vol. 16, No. 4, pp. 360-362, 1978.
30. Sankar, A., Natarajan, S., Haboussi, M., Ramajeyathilagam, K. and Ganapathi, M. "Panel flutter characteristics of sandwich plates with CNT reinforced facesheets using an accurate higher-order theory", Journal of Fluids and Structures, Vol. 50, pp. 376-391, 2014.
31. Sankar, A., Natarajan, S., Zineb, T. B. and Ganapathi, M. "Investigation of supersonic flutter of thick doubly curved sandwich panels with CNT reinforced facesheets using higher-order structural theory", Composite Structures, Vol. 127, pp. 340-355, 2015.
32. Zhang, L. W., Song, Z. G. and Liew, K. M. "Computation of aerothermoelastic properties and active flutter control of CNT reinforced functionally graded composite panels in supersonic airflow", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 300, pp. 427-441, 2016.
33. Kitipornchai, S., Chen, D. and Yang, J. "Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets", Materials & Design, Vol. 116, pp. 656-665, 2017.
10. Natarajan, S., Haboussi, M. and Manickam, G. "Application of higher-order structural theory to bending and free vibration analysis of sandwich plates with CNT reinforced composite facesheets", Composite Structures, Vol. 113, pp. 197-207, 2014.
11. Rafiee, M., He, X. and Liew, K. M. "Non-linear dynamic stability of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates with initial geometric imperfection", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 59, pp. 37-51, 2014.
12. Ansari, R., Hasrati, E., Shojaei, M. F., Gholami R. and Shahabodini A. "Forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using a numerical strategy", Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Vol. 69, pp. 294-305, 2015.
13. Wattanasakulpong, N. and Chaikittiratana, A. "Exact solutions for static and dynamic analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates with Pasternak elastic foundation", Applied Mathematical Modelling, Vol. 39, No. 18, pp. 5459-5472, 2015.
14. Alibeigloo, A. and Emtehani, A. "Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plate using differential quadrature method", Meccanica, Vol. 50, No. 1, pp. 61-76, 2015.
15. Setoodeh, A. R. and Shojaee, M. "Application of TW-DQ method to nonlinear free vibration analysis of FG carbon nanotube-reinforced composite quadrilateral plates", Thin-Walled Structures, Vol. 108, pp. 1-11, 2016.
16. Shafiei H. and Setoodeh A. R. "Nonlinear free vibration and post-buckling of FG-CNTRC beams on nonlinear foundation", Steel Compos Struct, Vol. 24, pp. 65-77, 2017.
17. Shojaee, M., Setoodeh, A. and Malekzadeh, P. "Vibration of functionally graded CNTs-reinforced skewed cylindrical panels using a transformed differential quadrature method", Acta Mech, Vol. 228, No. 7, pp. 2691-2711, 2017.
18. Liew, K. M. and Lim, C. W. "Vibration of doubly-curved shallow shells", Acta mechanica, Vol. 114, No. 1-4, pp. 95-119, 1996.
19. Matsunaga, H. "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory", Composite Structures, Vol. 84, No. 2, pp. 132-146, 2008.
20. Chorfi, S. and Houmat, A. "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form", Composite Structures, Vol. 92, No. 10, pp. 2573-2581, 2010.
21. Alijani, F., Amabili, M. and Bakhtiari-Nejad, F. "Thermal effects on nonlinear vibrations of

34. Askari, M., Saidi, A. and Rezaei, A. “On natural frequencies of Levy-type thick porous-cellular plates surrounded by piezoelectric layers”, Composite Structures, Vol. 179, pp. 340-354, 2017.
35. Song, M., Kitipornchai, S. and Yang, J. “Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets”, Composite Structures, Vol. 159, pp. 579-588, 2017.

پیوست ها:

پیوست-۱: مؤلفه‌های تانسور کرنش

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_x}\right)+z\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
&-cz^3\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{R_x\partial x}\right) \\
\varepsilon_{yy} &= \left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_y}\right)+z\frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\
&-cz^3\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{R_y\partial y}\right) \\
\varepsilon_{zz} &= 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&+z\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right) \\
&-cz^3\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right. \\
&\left.-\frac{\partial u}{R_x\partial x}-\frac{\partial v}{R_y\partial y}\right) \\
\gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = (1-\beta z^2)\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{u}{R_x}\right) \\
\gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = (1-\beta z^2)\left(\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{v}{R_y}\right)
\end{aligned} \qquad (\text{پ}-1)$$

که همواره $\beta = 3c = \frac{4}{(2h+2h_p)^2}$ خواهیم داشت.

اکنون با در نظر گرفتن فرض ($\sigma_{zz} = 0$) و همچنین، با استفاده از قانون هوک برای مواد الاستیک خطی و همسانگرد، می‌توان ارتباط بین مؤلفه‌های تانسور تنش و کرنش را برای هسته متخلخل پانل به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\\ 2\varepsilon_{xz}\\ 2\varepsilon_{yz}\end{Bmatrix} \qquad (\text{پ}-2)$$

که در رابطه (پ-۲) همواره داریم:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\upsilon^2} \\
Q_{12} &= Q_{21} = \frac{\upsilon E(z)}{1-\upsilon^2} \\
Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{1}{2}(Q_{11}-Q_{12}) \\
&= \frac{E(z)}{2(1+\upsilon)}
\end{aligned} \qquad (\text{پ}-3)$$

پیوست-۲: روابط ساختاری در لایه‌های پیزوالکتریک

تابع پتانسیل الکتریکی برای دو حالت مدار باز و بسته به ترتیب در معادلات زیر آورده شده است:

$$\Phi(x,y,z,t) = \begin{cases} \phi(x,y,t)\left[1-\left(\dfrac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right] \\ \phi(x,y,t)\left[1-\left(\dfrac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right]\end{cases} \qquad (\text{پ}-4)$$

$$\Phi(x,y,z,t) = \begin{cases} \phi(x,y,t)\left[1-\left(\dfrac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right] +Az+B \\ \phi(x,y,t)\left[1-\left(\dfrac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2\right] +A'z+B'\end{cases} \qquad (\text{پ}-5)$$

مؤلفه‌های میدان الکتریکی به‌صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
E_x(x,y,z,t) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, E_y(x,y,z,t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\
E_z(x,y,z,t) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (\text{پ}-6)$$

با توجه به عدم یکنواختی توزیع تخلخل در ساختار مواد متخلخل، می‌توان مدل‌های متفاوتی را برای تغییرات خواص مکانیکی این مواد ارائه کرد. از آنجایی که به‌طور معمول در سازه‌ها خواص در راستای ضخامت متغیر و در دیگر راستاها ثابت در نظر گرفته می‌شود. لذا، در این پژوهش، هسته سازه‌ها با توزیع‌های یکنواخت، متقارن و نامتقارن تخلخل در راستای ضخامت همان طور که در شکل **۲** مشاهده می‌شود، بررسی شده است. هسته سازه‌ها از فلزات متخلخل یا نانوکامپوزیت‌های پایه فلزی متخلخل که با نانو صفحات گرافن تقویت‌شده، در نظر گرفته می‌شود. الگوهای پراکندگی نانو صفحات گرافن در سه الگو توزیعی متقارن (A)، نامتقارن (B) و یکنواخت (C) در راستای ضخامت متغیر می‌باشند که در شکل ۳ دیده می‌شوند. خواص ماده متخلخل در راستای ضخامت سازه به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است [۳۳]:

$$E(z) = E_1(1 - e_0\lambda(z))$$
$$\rho(z) = \rho_1(1 - e_m\lambda(z)) \qquad (\text{پ-۷})$$

که در روابط (پ-۷)، $E(z)$ و $\rho(z)$ به ترتیب نشان‌دهنده مدول الاستیسیته و چگالی سازه‌ها، و همچنین، پارامتر بدون بعد e_0 بیانگر ضریب تخلخل هسته سازه است که مقدار آن همواره در بازه ($0 < e_0 < 1$) قرار دارد.

توزیع‌های مختلف تخلخل به‌صورت زیر در نظر گرفتـه می‌شوند:

$$\lambda(z) = \cos(\frac{\pi z}{2h}) \quad \text{توزیع متقارن}$$
$$\lambda(z) = \cos(\frac{\pi z}{4h} + \frac{\pi}{4}) \quad \text{توزیع نامتقارن} \qquad (\text{پ-۸})$$
$$\lambda(z) = \alpha \quad \text{توزیع یکنواخت}$$

با توجه به شکل **۲** برای سازه با هسته متخلخل با توزیع متقارن، در بالا و پایین هسته، بیشترین مقدار مدول الاستیسیته و چگالی مشاهده می‌شود ولی در وسط آن کمترین مقدار آن‌ها دیده می‌شود. در توزیع نامتقارن تخلخل در هسته پانل، مدول الاستیسیته و چگالی به‌صورت پیوسته از بیشترین مقدار در سطح بالایی هسته پانل تا کمترین مقدار در سطح پایینی تغییر می‌کنند. علاوه بر این، e_0 و e_m به ترتیب بیانگر ضرایب تخلخل و چگالی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_0 = 1 - \frac{E_2}{E_1}$$
$$e_m = \frac{1.121(1 - \sqrt[2.3]{1 - e_0\lambda(z)})}{\lambda(z)} \qquad (\text{پ-۹})$$

در معادله (پ-۹) E_2 کمترین مقدار مدول الاستیسیته را نشان می‌دهد و ضریب پواسون که تابعی از مختصات می‌باشد به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$v(z) = 0.221\tilde{p} + v_1(0.342\tilde{p}^2 - 1.21\tilde{p} + 1) \qquad (\text{پ-۱۰})$$

در (پ-۱۰) v_1 ضریب پواسون و

$$\tilde{p} = 1.121\left(1 - \sqrt[2.3]{1 - e_0\lambda(z)}\right) \qquad (\text{پ-۱۱})$$

کسر حجمی نانو صفحات گرافن که با سه توزیع مختلف که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است [۳۳]:

$$V_{GPL} = s_{i1}\left[1 - cos(\frac{\pi z}{2h})\right] \qquad (\text{پ-۱۲})$$
نانو صفحات گرافن با الگوA

$$V_{GPL} = s_{i2}\left[1 - cos(\frac{\pi z}{4h} + \frac{\pi}{4})\right] \qquad (\text{پ-۱۳})$$
نانو صفحات گرافن با الگوB

$$V_{GPL} = s_{i3} \qquad (\text{پ-۱۴})$$
نانو صفحات گرافن با الگو C

علاوه بر این، کسر وزنی نانو صفحات گرافن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{w_{GPL}}{w_{GPL} + (\rho_{GPL}/\rho_m)(1 - w_{GPL})} \times \int_{-h}^{h}(1 - e_m\lambda(z))dz = \int_{-h}^{h}V_{GPL}(1 - e_m\lambda(z))dz \qquad (\text{پ-۱۵})$$

که ρ_{GPL} و ρ_m به ترتیب، چگالی نانو صفحه گرافن و ماتریس را نشان می‌دهند.

با استفاده از مدل میکرومکانیکی هالپین- تسای، مدول یانگ سازه متخلخل تقویت‌شده با نانو صفحات گرافن به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳۳]:

$$E_1 = \frac{3}{8}\left(\frac{1 + \xi_L\eta_L V_{GPL}}{1 - \eta_L V_{GPL}}\right)E_m + \frac{5}{8}\left(\frac{1 + \xi_T\eta_T V_{GPL}}{1 - \eta_T V_{GPL}}\right)E_m \qquad (\text{پ-۱۶})$$

در معادله (پ-۱۶)، ضرایب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta_L = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_L}$$
$$\eta_T = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_T} \qquad (\text{پ-۱۷})$$
$$\xi_L = 2\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \xi_T = 2\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}}$$

در معادله‌های بالا، میانگین طول، عرض و ضخامت نانو صفحه گرافن به ترتیب با a_{GPL}، b_{GPL} و t_{GPL} نشان داده شده است. علاوه بر این، بر اساس قانون مخلوط، چگالی ρ_1 و ضریب پواسون v_1 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_1 = V_{GPL}\rho_{GPL} + V_m\rho_m \qquad (\text{پ-۱۸})$$

$$v_1 = V_{GPL}v_{GPL} + V_m v_m \qquad (\text{پ-۱۹})$$

در این معادله‌ها v_{GPL} و v_m به ترتیب، ضرایب پواسون وابسته به نانو صفحات گرافن و ماتریس می‌باشند. علاوه بر این، V_m نسبت حجمی ماتریس است که در قانون مخلوط زیر صدق می‌کند:

$$V_m = 1 - V_{GPL} \qquad (\text{پ-۲۰})$$

پیوست-۳: بارگذاری آیرودینامیکی

پانل ساندویچی متخلخل احاطه شده توسط لایه‌های پیزوالکتریک تحت یک جریان سیال مافوق صوت قرار دارد. با استفاده از تئوری مرتبه اول پیستون، اختلاف فشار آیرودینامیکی در سرعت‌های مافوق صوت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta P = -\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1}\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} - \frac{w(x,y,t)}{2R_y\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right) \tag{پ-۲۱}$$

در رابطه (پ-۲۱)، U_∞، M_∞ و ρ_∞ به ترتیب، سرعت، عدد ماخ و چگالی جریان هوا را نشان می‌دهند.

ماتریس‌های جرم، میرایی و الاستیک به ترتیب با M، C و K نشان داده می‌شوند. ماتریس‌های مذکور به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{uu} & M_{uv} & M_{uw} & M_{uy} & M_{ux} & M_{u\varphi} \\ M_{vu} & M_{vv} & M_{vw} & M_{vy} & M_{vx} & M_{v\varphi} \\ M_{wu} & M_{wv} & M_{ww} & M_{wy} & M_{wx} & M_{w\varphi} \\ M_{yu} & M_{yv} & M_{yw} & M_{yy} & M_{yx} & M_{y\varphi} \\ M_{xu} & M_{xv} & M_{xw} & M_{xy} & M_{xx} & M_{x\varphi} \\ M_{\varphi u} & M_{\varphi v} & M_{\varphi w} & M_{\varphi y} & M_{\varphi x} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{uv} & C_{uw} & C_{uy} & C_{ux} & C_{u\varphi} \\ C_{vu} & C_{vv} & C_{vw} & C_{vy} & C_{vx} & C_{v\varphi} \\ C_{wu} & C_{wv} & C_{ww} & C_{wy} & C_{wx} & C_{w\varphi} \\ C_{yu} & C_{yv} & C_{yw} & C_{yy} & C_{yx} & C_{y\varphi} \\ C_{xu} & C_{xv} & C_{xw} & C_{xy} & C_{xx} & C_{x\varphi} \\ C_{\varphi u} & C_{\varphi v} & C_{\varphi w} & C_{\varphi y} & C_{\varphi x} & C_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \tag{پ-۲۲}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & K_{uw} & K_{uy} & K_{ux} & K_{u\varphi} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vw} & K_{vy} & K_{vx} & K_{v\varphi} \\ K_{wu} & K_{wv} & K_{ww} & K_{wy} & K_{wx} & K_{w\varphi} \\ K_{yu} & K_{yv} & K_{yw} & K_{yy} & K_{yx} & K_{y\varphi} \\ K_{xu} & K_{xv} & K_{xw} & K_{xy} & K_{xx} & K_{x\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi v} & K_{\varphi w} & K_{\varphi y} & K_{\varphi x} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

پیوست-۴: تعدادی از ثوابت موجود در معادلات حاکم

$$ab_1 = A_{11} + 2\eta\frac{F_{11}}{R_x} + \eta^2\frac{H_{11}}{R_x^2} + T_2 - \frac{T_8}{R_x^2} + \beta\frac{T_{8z2}}{R_x^2} - \eta\frac{T_{4z3}}{R_x^2}$$

$$ab_6 = B_{66} - \eta\left(F_{66} - \frac{G_{66}}{R_x}\right) - \eta^2\frac{H_{66}}{R_x}$$

$$ab_7 = \frac{1}{R_x}(A_{55} - \beta D_{55})$$

$$ab_8 = B_{12} + B_{66} - \eta(F_{12} + F_{66}) + \frac{\eta}{R_x}(G_{12} + G_{66}) - \frac{\eta^2}{R_x}(H_{12} + H_{66}) + \frac{1}{R_x}(T_7 + T_8) - \frac{\beta}{R_x}(T_{7z2} + T_{8z2}) + \frac{\eta}{R_x}(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$ab_9 = -\eta\left(F_{11} + \frac{\eta}{R_x}H_{11}\right) + \frac{1}{R_x}(T_8 - \beta T_{8z2} + \eta T_{4z3})$$

$$ab_{10} = -\eta\left(F_{12} + 2F_{66} + \frac{\eta}{R_x}(H_{12} + 2H_{66})\right) + \frac{1}{R_x}(T_8 - \beta T_{8z2} + \eta T_{4z3})$$

$$ac_1 = A_{21} + A_{66} + \frac{\eta}{R_x}(F_{21} + F_{66}) + \frac{\eta}{R_y}(F_{21} + F_{66}) + \frac{\eta^2}{R_x R_y}(H_{21} + H_{66}) + T_2 + \frac{1}{R_x R_y}(-T_8 + \beta T_{8z2} - \eta T_{4z3})$$

$$ac_5 = B_{21} + B_{66} - \eta(F_{21} + F_{66}) + \frac{\eta}{R_y}(G_{21} + G_{66}) + \frac{1}{R_y}(T_7 + T_8) - \frac{\eta^2}{R_y}(H_{21} + H_{66}) + \frac{1}{R_y}\left(-\beta(T_{8z2} + T_{7z2}) + \eta(T_{4z3} + T_{3z3})\right)$$

$$ac_6 = B_{66} - \eta F_{66} + \eta\frac{G_{66}}{R_y} - \eta^2\frac{H_{66}}{R_y}$$

$$ac_7 = B_{22} - \eta F_{22} + \eta\frac{G_{22}}{R_y} - \eta^2\frac{H_{22}}{R_y} + \frac{1}{R_y}(T_7 + T_8) + \frac{1}{R_y}\left(-\beta(T_{8z2} + T_{7z2}) + \eta(T_{4z3} + T_{3z3})\right)$$

$$ac_{11} = \frac{1}{R_y}\left(A_{21}\frac{R_y}{R_x} + A_{22} + A_{44} - \beta D_{44} + \frac{\eta F_{21}}{R_x} + \frac{\eta F_{22}}{R_y}\right) + T_2\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)$$

$$ad_1 = B_{11} + \frac{\eta}{R_x}G_{11} - \eta F_{11} - \frac{\eta^2}{R_x}H_{11} + \frac{1}{R_x}(-T_8 + \beta T_{8z2} - \eta T_{4z3})A_{66} + 2\eta\frac{F_{11}}{R_x} + \eta^2\frac{H_{11}}{R_x^2} + T_2 - \frac{T_8}{R_x^2} + \beta\frac{T_{8z2}}{R_x^2} - \eta\frac{T_{4z3}}{R_x^2}$$

$$ad_5 = B_{11} - \eta F_{11} + \eta\frac{G_{11}}{R_x} - \eta^2\frac{H_{11}}{R_x} + \frac{1}{R_x}(T_7 + T_8) - \frac{\beta}{R_x}(T_{7z2} + T_{8z2}) + \frac{\eta}{R_x}(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$ad_6 = B_{66} - \eta\left(F_{66} - \frac{G_{66}}{R_x}\right) - \eta^2 \frac{H_{66}}{R_x}$$

$$ad_7 = \frac{1}{R_x}(A_{55} - \beta D_{55})$$

$$ad_8 = B_{12} + B_{66} - \eta(F_{12} + F_{66}) + \frac{\eta}{R_x}(G_{12} + G_{66})$$
$$- \frac{\eta^2}{R_x}(H_{12} + H_{66})$$
$$+ \frac{1}{R_x}(T_7 + T_8) - \frac{\beta}{R_x}(T_{7z2} + T_{8z2}) + \frac{\eta}{R_x}(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$ad_{11} = \frac{1}{R_x}\left(A_{11} + A_{55} - \beta D_{55} + \frac{\eta F_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}R_x}{R_y}\right.$$
$$\left. + \frac{\eta F_{12}}{R_y}\right) + T_2\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)$$

$$af_1 = A_{21} + A_{66} + \frac{\eta}{R_x}(F_{21} + F_{66}) + \frac{\eta}{R_y}(F_{12} + F_{66})$$
$$+ \frac{\eta^2}{R_x R_y}(H_{12} + H_{66}) + T_2$$
$$+ \frac{1}{R_x R_y}(-T_8 + \beta T_{8z2} - \eta T_{4z3})A_{66}$$
$$+2\eta \frac{F_{11}}{R_x} + \eta^2 \frac{H_{11}}{R_x^2} + T_2 - \frac{T_8}{R_x^2} + \beta \frac{T_{8z2}}{R_x^2} - \eta \frac{T_{4z3}}{R_x^2}$$

$$af_5 = B_{11} - \eta F_{11} + \eta \frac{G_{11}}{R_x} - \eta^2 \frac{H_{11}}{R_x} + \frac{1}{R_x}(T_7 + T_8)$$
$$- \frac{\beta}{R_x}(T_{7z2} + T_{8z2}) + \frac{\eta}{R_x}(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$af_8 = B_{12} + B_{66} - \eta(F_{12} + F_{66})$$
$$+ \frac{\eta}{R_x}(G_{12} + G_{66})$$
$$- \frac{\eta^2}{R_x}(H_{12} + H_{66}) + \frac{1}{R_x}(T_7 + T_8)$$
$$- \frac{\beta}{R_x}(T_{7z2} + T_{8z2}) + \frac{\eta}{R_x}(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$af_9 = -\eta\left(F_{11} + \frac{\eta}{R_x}H_{11}\right)$$
$$+ \frac{1}{R_x}(T_8 - \beta T_{8z2} + \eta T_{4z3})$$

$$af_{10} = -\eta\left(F_{12} + 2F_{66}\right.$$
$$\left. + \frac{\eta}{R_x}(H_{12} + 2H_{66})\right)$$
$$+ \frac{1}{R_x}(T_8 - \beta T_{8z2} + \eta T_{4z3})$$

$$af_{11} = \frac{1}{R_x}\left(A_{11} + A_{55} - \beta D_{55} + \frac{\eta F_{11}}{R_x}\right.$$
$$\left. + \frac{A_{12}R_x}{R_y} + \frac{\eta F_{12}}{R_y}\right)$$

$$+T_2\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)$$

$$ag_1 = \frac{1}{R_x}\left(-A_{55} + \beta D_{55} - A_{11} - \frac{\eta}{R_x}F_{11}\right.$$
$$\left. - \frac{R_x}{R_y}A_{21} - \frac{\eta}{R_y}F_{21}\right)$$
$$-T_2\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)$$

$$ag_2 = \eta\left(F_{11} + \frac{\eta}{R_x}H_{11}\right)$$
$$+ \frac{1}{R_x}(-T_8 + \beta T_{8z2} - \eta T_{4z3})$$

$$ag_3 = \eta\left(2F_{66} + 2\frac{\eta}{R_x}H_{66} + F_{21}\right.$$
$$\left. + \frac{\eta}{R_x}H_{21}\right)$$
$$+ \frac{1}{R_x}(-T_8 + \beta T_{8z2} - \eta T_{4z3})$$

$$ag_7 = A_{55} - \beta D_{55} - \frac{B_{11}}{R_x} + \frac{\eta}{R_x}F_{11} - \frac{B_{21}}{R_y}$$
$$+ \frac{\eta}{R_y}F_{21}$$

(پ-۲۳)

$$ag_8 = \eta(G_{12} - \eta H_{11}) + T_7 + T_8$$
$$-\beta(T_{8z2} + T_{7z2}) + \eta(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$ag_9 = \eta(2G_{66} - 2\eta H_{66} + G_{21} - \eta H_{21})$$
$$+T_7 + T_8 - \beta(T_{8z2} + T_{7z2})$$
$$+ \eta(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$ag_{10} = A_{44} - \beta D_{44} - \frac{B_{12}}{R_x} + \frac{\eta}{R_x}F_{12} - \frac{B_{22}}{R_y}$$
$$+ \frac{\eta}{R_y}F_{22}$$

$$ag_{11} = \eta(G_{22} - \eta H_{22}) + T_7 + T_8$$
$$-\beta(T_{8z2} + T_{7z2}) + \eta(T_{3z3} + T_{4z3})$$

$$ag_{17} = A_{44} - \beta D_{44} + 2\frac{\eta}{R_y}F_{22}$$
$$+ \frac{\eta}{R_x}(F_{21} + F_{12})$$

$$ag_{18} = -\left(\frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{1}{R_x R_y}(A_{12} + A_{21})\right.$$
$$\left. + \frac{A_{22}}{R_y^2}\right)$$
$$-T_2\left(\frac{1}{R_x^2} + \frac{1}{R_x R_y}\right) - T_2\left(\frac{1}{R_y^2} + \frac{1}{R_x R_y}\right)$$

در ادامه روابط بالا برای حالت پیزوالکتریک مدار باز می‌توان نوشت:

$$T_1=\bar{e}_{31}\left(\int_{h}^{h+h_p}\frac{\partial\varphi^t}{\partial z}\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\partial\varphi^b}{\partial z}\,dz\right)$$

$$T_4=-\int_{h}^{h+h_p}\frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\xi}_{33}}\eta(h+h_p)^3\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\xi}_{33}}\eta(h+h_p)^3\,dz$$

$$T_6=\frac{e_{15}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}\left(\int_{h}^{h+h_p}(z-h)dz+\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)dz\right)$$

$$T_{1z}=\bar{e}_{31}\left(\int_{h}^{h+h_p}\frac{\partial\varphi^t}{\partial z}z\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\partial\varphi^b}{\partial z}z\,dz\right)$$

$$T_{2z}=\int_{h}^{h+h_p}\frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\xi}_{33}}z\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\xi}_{33}}z\,dz$$

$$T_{1z3}=\bar{e}_{31}\left(\int_{h}^{h+h_p}\frac{\partial\varphi^t}{\partial z}z^3\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\partial\varphi^b}{\partial z}z^3\,dz\right)$$

$$T_{2z3}=\int_{h}^{h+h_p}\frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\xi}_{33}}z^3\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\xi}_{33}}z^3\,dz$$

$$T_{5z2}=e_{15}\left(\int_{h}^{h+h_p}z^2\varphi^t\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}z^2\varphi^b\,dz\right)$$

$$T_{6z2}=\frac{e_{15}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}\left(\int_{h}^{h+h_p}(z-h)z^2dz+\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)z^2dz\right)\qquad \text{(پ-۲۴)}$$

$$T_{7z2}=\frac{e_{15}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}(h+h_p)\left(\int_{h}^{h+h_p}(z-h)z^2dz-\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)z^2dz\right)$$

$$T_{8z2}=\eta\frac{e_{15}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}(h+h_p)^3\left(-\int_{h}^{h+h_p}(z-h)z^2dz+\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)z^2dz\right)$$

برای حالت لایه پیزوالکتریک مدار بسته می‌توان نوشت:

$$T_1=\bar{e}_{31}\left(\int_{h}^{h+h_p}\frac{\partial\varphi^t}{\partial z}\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\partial\varphi^b}{\partial z}\,dz\right),$$

$$T_{1z3}=\bar{e}_{31}\left(\int_{h}^{h+h_p}\frac{\partial\varphi^t}{\partial z}z^3\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\frac{\partial\varphi^b}{\partial z}z^3\,dz\right),\qquad \text{(پ-۲۵)}$$

$$T_{5z2}=e_{15}\left(\int_{h}^{h+h_p}z^2\varphi^t\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}z^2\varphi^b\,dz\right)$$

$$T_2=T_3=T_4=T_6=T_7=T_8=T_{2z}=T_{3z}=T_{4z}=T_{2z3}=T_{3z3}=T_{4z3}=T_{6z2}=T_{7z2}=T_{8z2}=0$$

و در حالت مدار بسته نیز می‌توان عبارات زیر را بیان کرد:

$$\varphi^t=1+\frac{4(z-h)}{h_p}-\left(\frac{z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2$$

$$\varphi^b=1-\frac{4(z+h)}{h_p}-\left(\frac{-z-h-h_p/2}{h_p/2}\right)^2$$

$$S_1=\int_{h}^{h+h_p}e_{15}(1-\beta z^2)\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}e_{15}(1-\beta z^2)\,dz$$

$$S_2=\xi_{11}\left(\int_{h}^{h+h_p}\varphi^t\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\varphi^b\,dz\right)$$

$$S_3=\int_{h}^{h+h_p}\bar{e}_{31}\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\bar{e}_{31}\,dz$$

$$S_4=\int_{h}^{h+h_p}\bar{e}_{31}\,\beta z^2dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\bar{e}_{31}\,\beta z^2dz$$

$$S_5=\bar{\xi}_{33}\left(\int_{h}^{h+h_p}\varphi^t\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}\varphi^b\,dz\right)\qquad \text{(پ-۲۶)}$$

$$S_6=\frac{\xi_{11}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}\left(\int_{h}^{h+h_p}(z-h)dz+\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)dz\right)$$

$$S_7=\frac{\xi_{11}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}(h+h_p)\left(-\int_{h}^{h+h_p}(z-h)dz+\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)dz\right)$$

$$S_8=\frac{\xi_{11}\bar{e}_{31}}{\bar{\xi}_{33}}(h+h_p)^3\left(\int_{h}^{h+h_p}(z-h)dz-\int_{-h-h_p}^{-h}(z+h)dz\right)$$

تعدادی از مؤلفه‌های ماتریس‌های در رابطه **۱۵** در زیر آورده شده است.

$$M_{uu} = \int_0^b \int_0^a -I_0 \Phi_u \Phi_u^{\mathrm{T}} dxdy$$
$$M_{ux} = \int_0^b \int_0^a -I_1 \Phi_u \Phi_x^{\mathrm{T}} dxdy$$
$$M_{uv} = M_{uw} = M_{uy} = M_{u\varphi} = 0$$
$$C_{wu} = C_{wv} = C_{wx} = C_{wy} = C_{w\varphi} = 0$$

$$C_{ww} = \int_0^b \int_0^a -\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{U_\infty} \Phi_w \Phi_w^{\mathrm{T}} dxdy$$

$$K_{uu} = \int_0^b \int_0^a \left[ab_1 \Phi_u \frac{\partial^2 \Phi_u^T}{\partial x^2} + ab_2 \Phi_u \frac{\partial^2 \Phi_u^T}{\partial y^2} + ab_3 \Phi_u \Phi_u^T \right] dxdy$$
$$K_{uv} = \int_0^b \int_0^a ab_4 \Phi_u \frac{\partial^2 \Phi_v^T}{\partial x \partial y} dxdy$$
$$K_{ux} = \int_0^b \int_0^a \left[ab_5 \Phi_u \frac{\partial^2 \Phi_x^T}{\partial x^2} + ab_6 \Phi_u \frac{\partial^2 \Phi_x^T}{\partial y^2} + ab_7 \Phi_u \Phi_x^T \right] dxdy \qquad \text{(پ-۲۷)}$$
$$K_{uy} = \int_0^b \int_0^a ab_8 \Phi_u \frac{\partial^2 \Phi_y^T}{\partial x \partial y} dxdy$$
$$K_{uw} = \int_0^b \int_0^a \left[ab_9 \Phi_u \frac{\partial^3 \Phi_w^T}{\partial x^3} + ab_{10} \Phi_u \frac{\partial^3 \Phi_x^T}{\partial x \partial y^2} + ab_{11} \Phi_u \frac{\partial \Phi_w^T}{\partial x} \right] dxdy$$
$$K_{u\varphi} = \int_0^b \int_0^a \left[\left(T_1 + \frac{T_5}{R_x} - \beta \frac{T_{5z2}}{R_x} + \eta \frac{T_{1z3}}{R_x} \right) \Phi_u \frac{\partial \Phi_\varphi^T}{\partial x} \right] dxdy$$