

علمی - پژوهشی

## بازی های دیفرانسیلی دفاع هوایی با محدودیت های هواپیما و شعاع انهدام نا صفر

نادر بیرانوند<sup>۱\*</sup>، میثم یعقوبیان<sup>۲</sup>، حمید بیگدلی<sup>۳</sup>

۱- دکتری و پژوهشگر و ۲- پژوهشگر گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه امام علی (ع)، تهران، ایران،

۳- استادیار، پژوهشکده عالی جنگ، دانشگاه فرماندهی و ستاد آجا

(دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۱، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۵)

### چکیده

در این مقاله یک بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال بررسی شده است. در بازی مورد بحث هواپیمای هدف و موشک مدافع تشکیل یک گروه داده و برای شکست موشک مهاجم، همکاری می کنند. فرض شده هواپیما دارای سرعت کمتری نسبت به مهاجم است. هواپیما با کمک موشک مدافع، که دارای شعاع انهدام نا صفری است، در تلاش است بر مهاجم پیروز شود. هواپیما و مدافع به گونه ای همکاری می کنند که مدافع بتواند قبل از نابود شدن هواپیما به وسیله مهاجم، مهاجم را نابود کند. تابع هزینه برابر با فاصله هواپیما و مهاجم در زمان نهایی (زمانی که مهاجم به وسیله مدافع نابود می شود) تعریف شده است. گروه هواپیما و مدافع می خواهند تابع هزینه را بیشینه کنند و مهاجم در تلاش است این تابع را کمینه کند. این مقاله با در نظر گرفتن محدودیت هایی بر روی هواپیما، نتایج موجود را تعمیم می دهد.

**کلیدواژه ها:** بازی های دیفرانسیلی، نظریه بازی ها، هواپیماهای بدون سرنشین، هدایت موشکی

## Air Defense Differential Games with Constraints on Aircraft and Non-Zero Capture Radius

Nader Biranvand<sup>1\*</sup>, Maysam Yaghoobian<sup>2</sup>, Hamid Bigdeli<sup>3</sup>

PhD, Researcher Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Imam Ali University, Tehran, Iran

(Received: 11/01/2020; Accepted: 05/09/2020)

### Abstract

An aircraft defense differential game is analyzed where a Target aircraft and a Defender missile team up to defeat an Attacker missile. Attacker pursues the (slower) Target which evades Attacker with the help of Defender, which is endowed with a non-zero capture radius. Target and Defender cooperate in a way that Defender intercepts Attacker before the latter reaches Target. The payoff functional is the distance between Target and Attacker at the interception time which Attacker strives to minimize and Target/Defender team strives to maximize. The work in this paper generalizes existing results to consider restrictions on aircraft.

**Keywords:** Differential games, Game Theory, Autonomous air vehicles, Missile guidance

## ۱- مقدمه

هدایتی مختلفی را برای مهاجم و مدافع پیشنهاد داده‌اند. همچنین حالتی بررسی شده که در آن مدافع برای تعقیب مهاجم، ناوبری فرمان به خط دید<sup>۴</sup> را اجرا می‌کند، که لازمی آن این است که سرعت مدافع حداقل برابر با سرعت مهاجم باشد [۱۰]. روبینسکی و گوتمن در [۱۱] تحلیلی از نتیجه نهایی سناریوی هدف-مهاجم-مدافع (TAD) مبتنی بر فاصله بین مهاجم و هدف در حالت عدم همکاری هدف و مدافع، ارائه دادند. در [۱۲] و [۱۳] قانون ناوبری متفاوتی برای سناریوی هدف-مهاجم-مدافع توسط یاماساکی و دیگران ارائه شد. این نویسندگان روشی را که آن را ناوبری مثلثی<sup>۵</sup> نامیده‌اند، بررسی کردند. هدف این ناوبری قرار دادن موشک مدافع بر روی خط دید بین موشک مهاجم و هواپیمای هدف در تمام زمان بازی است و در همین حال هواپیما مسیرهایی از پیش تعیین شده را دنبال می‌کند.

رویکرد متفاوتی نیز برای سناریوی هدف-مهاجم-مدافع قابل استفاده است، به این معنا که همکاری جدی بین هواپیمای هدف و موشک مدافع برای دستیابی به دو نتیجه‌ی زیر اعمال شود: رهگیری مهاجم و به حداکثر رساندن فاصله نهایی بین هواپیمای هدف و مهاجم [۱۴]. همچنین برای گروه هواپیمای هدف و موشک مدافع نشان داده شد که اگر مهاجم بخواهد فاصله بین موقعیت نهایی هدف و نقطه‌ای که مهاجم توسط مدافع رهگیری می‌شود را به حداقل برساند، با استفاده از قوانین استاندارد ناوبری به این هدف نمی‌رسد [۱۵]. مقایسه‌ی بین راهبردهای تعقیب PP، PN و بازی‌های دیفرانسیلی نشان می‌دهد که در قوانین ناوبری PP و PN مسافت نهایی نسبت به روش بازی‌های دیفرانسیلی بیشتر خواهد بود. لذا، یک مهاجم هوشمند با اجرای روش بهینه‌ی حاصل از بازی‌های دیفرانسیلی، سود خواهد کرد. هدف دوگانه‌ی رهگیری مهاجم و به حداکثر رساندن فاصله نهایی مهاجم و هدف، باعث افزایش سطح ایمنی برای هواپیمای هدف می‌شود.

## ۲- مبانی نظری

بازی‌های دیفرانسیلی دفاع هدف فعال، سه بازیکن هدف ( $T$ )، مهاجم ( $A$ ) و مدافع ( $D$ ) را شامل می‌شود. (شکل ۱). سرعت (ثابت) این سه بازیکن را با  $V_T$ ،  $V_A$  و  $V_D$  مشخص می‌کنیم.

در این مدل‌سازی فرض بر این است که اختلاف ارتفاع بین بازیکنان نسبت به اختلاف طولی و عرضی‌شان ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. به علاوه، فرض شده است که بازیکنان در صفحه مذکور دارای "حرکت ساده" با معادلات سینماتیک زیر هستند.

در طول چند دهه گذشته، مقالات زیادی منتشر شده است که جنبه‌های اصلی نظریه بازی را پوشش می‌دهند. در این دوره انتشار مقالات نظری و کاربردی در زمینه نظریه بازی رشد قابل توجهی داشته است. همچنین کاربردهای نظامی این نظریه نیز مورد توجه محققین قرار گرفته است. برای نمونه می‌توان به مقاله [۱] اشاره کرد. نوع دیگری از کاربرد نظریه بازی‌ها در علوم نظامی، بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال (ATDDG)<sup>۱</sup> است. این گروه از بازی‌ها نمونه‌ای مهم و کاربردی از بازی‌های دیفرانسیلی تعقیب و گریز با چند بازیکن است. این نوع بازی به‌عنوان یک بازی تعقیب و گریز پویا، مجموع صفر و با سه بازیکن مدل‌سازی شده است [۲]. در این بازی تیمی دو نفره متشکل از بازیکن هدف و بازیکن مدافع تشکیل می‌شود که با هم در مقابل بازیکن مهاجم همکاری می‌کنند. هدف مهاجم نزدیک شدن تا حد ممکن به بازیکن هدف، و در صورت امکان نابودی آن است. بازیکن مدافع، در تلاش است تا قبل از این که مهاجم بازیکن هدف را نابود کند، آن را در دورترین نقطه ممکن از هدف نابود کند. هواپیمای هدف با مدافع همکاری می‌کند. فرض بر این است که بازیکنان (وسایل نقلیه هوایی) دارای سینماتیکی ساده هستند [۳]. همچنین فرض بر این است که مهاجم از موقعیت مدافع آگاه است، بنابراین اطلاعات کامل حالت در دسترس است.

بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال در حوزه سناریوهای تعقیب و گریز با چند بازیگر، قرار می‌گیرد. این نوع بازی‌ها توسط نویسندگان مختلف در زمینه بازی‌های پویا مورد توجه قرار گرفته است [۴-۵]. برای کمک به تجزیه و تحلیل این وضعیت پیچیده، در [۶-۵] از یک نمودار ورونی<sup>۲</sup> پویا برای بررسی سناریوهایی با چندین مهاجم که هدف خاصی را در محیطی محدود، دنبال می‌کنند، استفاده کرده‌اند. در [۷]، سناریویی چند بازیکنی در نظر گرفته می‌شود که در آن تعدادی مهاجم برای رهگیری گروهی از اهداف مأمور می‌شوند، به علاوه فرض بر این است که قصد گروه هدف مشخص است. همکاری بین دو بازیکن باهدف فرار از یک مهاجم خاص در [۸] مورد بحث قرار گرفته است. اسکات و لئونارد در [۹] یک سناریوی الهام گرفته شده از زیست را مورد بررسی قرار دادند که در آن دو بازیکن هدف، برای فرار از یک مهاجم و درعین حال نزدیک هم نگه داشتن خودشان، راهبردهایشان را هماهنگ می‌کنند.

اخیراً، سناریوهای دفاع فعال هواپیماها<sup>۳</sup> که شامل یک (هواپیمای) هدف، یک (موشک) مهاجم و یک (موشک) مدافع می‌شوند، توجه زیادی را به خود جلب کرده است. محققان قوانین

<sup>۱</sup> Active Target Defense Differential Game

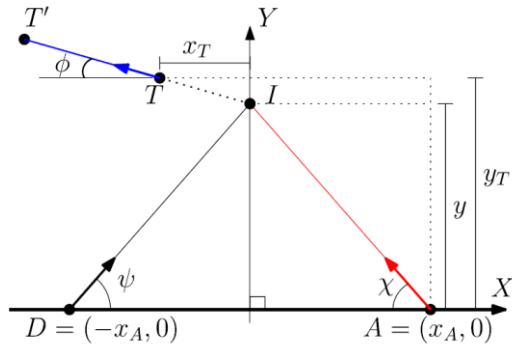
<sup>۲</sup> Voronoi

<sup>۳</sup> Active aircraft defense scenario

<sup>۴</sup> Command to the Line of Sight guidance

<sup>۵</sup> Triangle Guidance

قرار  $x_D = -x_A$  محور  $y$ ها نیز در امتداد نیمساز پاره‌خط  $AD$  قرار می‌گیرد. نقاط  $T$  و  $T'$  به ترتیب موقعیت ابتدایی و پایانی هواپیمای هدف را نشان می‌دهند. در این مختصات بردار حالت سیستم به صورت  $x = (x_A, x_T, y_T)$  کاهش می‌یابد.



شکل ۳. مختصات محدودشده حالت سیستم وقتی  $x_T < 0$  [۱۴].

مسئله فوق به دو صورت حل شده است. حالت اول که صورت کلی مسئله است ( $r_c > 0$ ) در مرجع [۱۶] و حالت دوم زمانی است که  $r_c \rightarrow 0$  در مرجع [۱۴] بررسی شده است.

در ادامه نتایج حاصل در مرجع [۱۶] را به اختصار بیان کرده، سپس نوآوری و خلاقیت مسئله پیشنهادی را مورد تحقیق و مطالعه قرار می‌دهیم.

در مرجع [۱۶] ابتدا قضیه زیر اثبات شده است.

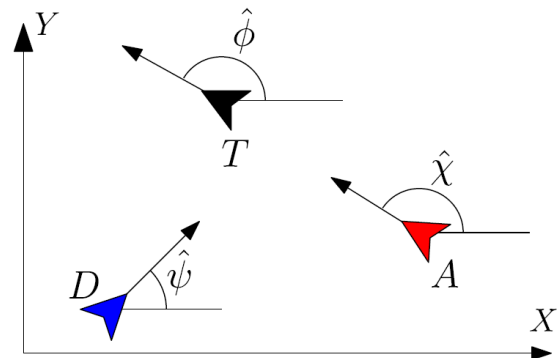
**قضیه ۱:** برای بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال که در بالا بیان شد، جهت‌گیری بهینه برای هواپیمای هدف، موشک مهاجم و موشک مدافع در حالت بهینه، مقدار ثابتی است و مسیرهایشان خطوط مستقیمی هستند.

در این مقاله نشان می‌دهیم که در حالت بهینه گروه مدافع و هواپیمای هدف، راهبرد خود را بر اساس راهبرد مهاجم انتخاب می‌کنند. در واقع ابتدا مسیر بهینه‌ی هواپیمای هدف و موشک مدافع بر اساس راهبردهای انتخابی مهاجم مشخص می‌شود و در نهایت مهاجم راهبرد بهینه خود را مشخص می‌کند.

در حل این بازی تابع هزینه برابر با فاصله مهاجم و هدف در حالت نهایی سیستم یا زمان  $t = t_f$  است.  $t_f$  زمانی است که تساوی زیر برقرار باشد.

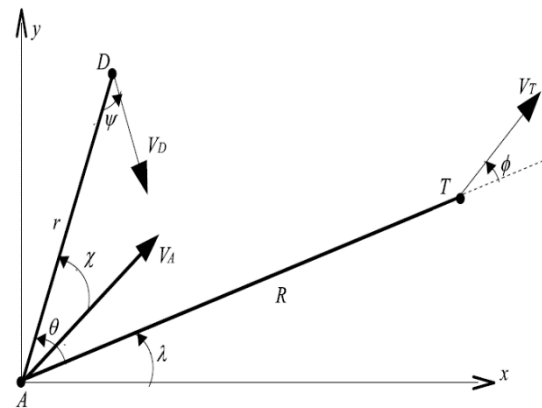
$$r(t_f) = r_c \quad (۱)$$

در مقاله فوق بازیکنان در انتخاب هر مقداری برای متغیر کنترلی خود آزاد هستند، ولی در عمل بنا به دلایل گوناگون از جمله محدودیت در شتاب جانبی، وجود موانع فیزیکی و یا



شکل ۱. مسیر حرکت هر بازیکن در سناریوی هدف-مهاجم-مدافع [۱۴].

فرض می‌کنیم سرعت موشک‌های مهاجم و مدافع باهم برابر است ( $V_A = V_D$ ). به علاوه  $\hat{\phi} = \phi + \lambda - \pi$ ،  $\hat{\psi} = \psi + \theta + \lambda - \pi$  و  $\hat{\chi} = \lambda + \theta - \chi$  (شکل ۲).



شکل ۲. حالت دوبعدی درگیری برای سناریوی TAD [۲].

متغیرهای  $r$  و  $R$  به ترتیب نشان‌دهنده فاصله بین هدف و مهاجم و فاصله بین مدافع و مهاجم است. به علاوه پارامتر  $R_c$  نشان‌دهنده شعاع نابودی مهاجم و  $r_c$  نشان‌دهنده شعاع نابودی مدافع است.

بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال یک بازی با اطلاعات کامل است، به عبارت دیگر وضعیت سیستم، که شامل موقعیت تمام بازیکنان می‌شود،  $\hat{x} = (\hat{x}_T, \hat{y}_T, \hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{x}_D, \hat{y}_D)$  برای همه بازیکنان شناخته شده است. با استفاده از حالت سیستم، یا همان  $\hat{x}$ ، بازی دیفرانسیلی مشخص می‌شود و هر بازیکن بهترین مسیر برای خود و دیگران را محاسبه می‌کند.

بدون از دست دادن کلیت، مسئله را در مختصات تبدیل یافته که در شکل (۳) نشان داده شده است، تجزیه و تحلیل می‌کنیم. مختصات حالت کاهش یافته به گونه‌ای تعریف شده است که محور  $x$ ها از  $D$  و  $A$  عبور می‌کند به علاوه  $x_A > 0$  و

به‌علاوه فاصله مهاجم و مدافع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(t) = \sqrt{(\hat{x}_A(t) - \hat{x}_T(t))^2 + (\hat{y}_A(t) - \hat{y}_T(t))^2} \quad (۸)$$

شعاع انهدام موشک مدافع برابر با  $r_c > 0$  است. بنابراین، بازی زمانی تمام خواهد شد که حالت سیستم در شرط زیر صدق کند.

$$r(t_f) = r_c \quad (۹)$$

زمان نهایی،  $t_f$ ، زمانی است که حالت سیستم در شرط  $r(t_f) = r_c$  صدق کند. حالت نهایی سیستم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_f = (\hat{x}_{Tf}, \hat{y}_{Tf}, \hat{x}_{Af}, \hat{y}_{Af}, \hat{x}_{Df}, \hat{y}_{Df}) = x(t_f)$$

فاصله مهاجم و هدف را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R(t) = \sqrt{(\hat{x}_A(t) - \hat{x}_T(t))^2 + (\hat{y}_A(t) - \hat{y}_T(t))^2} \quad (۱۰)$$

گروه مدافع و هدف راهبردهای خود را به‌گونه‌ای مشخص می‌کنند تا  $R(t_f)$ ، فاصله مهاجم و هدف در زمان نهایی، بیشینه باشد. راهبرد بهینه‌ی مهاجم برای کمینه کردن  $R(t_f)$  اتخاذ می‌شود.

همچنین فرض می‌کنیم محدودیت زیر بر روی متغیرهای کنترلی برقرار باشد.

$$\hat{\phi}_0 \leq \hat{\phi} \leq \hat{\phi}_1 \quad (۱۱)$$

که در آن،  $\hat{\phi}_0$  و  $\hat{\phi}_1$  مقادیری دلخواه هستند.

تابع هزینه، که فقط بر اساس حالت نهایی سیستم تعریف شده است، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$J = \sqrt{(\hat{x}_{Af} - \hat{x}_{Tf})^2 + (\hat{y}_{Af} - \hat{y}_{Tf})^2} \quad (۱۲)$$

اگر بردار  $\lambda$  به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\lambda^T = (\lambda_{x_A}, \lambda_{y_A}, \lambda_{x_T}, \lambda_{y_T}, \lambda_{x_D}, \lambda_{y_D}) \in \mathbb{R}^6 \quad (۱۳)$$

آنگاه تابع هامیلتونی به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathcal{H} = \lambda_{x_A} \cos \hat{\chi} + \lambda_{y_A} \sin \hat{\chi} + \lambda_{x_D} \cos \hat{\psi} + \lambda_{y_D} \sin \hat{\psi} + \rho \lambda_{x_T} \cos \hat{\phi} + \rho \lambda_{y_T} \sin \hat{\phi} \quad (۱۴)$$

لم ۱. در حالت بهینه  $\lambda$  برداری ثابت است.

برهان: در حالت بهینه داریم:

وجود مهاجمین بیشتر در مسیر انتخابی و ... ممکن است اختیار هر مقدار  $\phi$ ،  $\chi$  و  $\psi$  از سوی بازیکنان ممکن نباشد. بخصوص برای هواپیمای هدف که ممکن است از قدرت مانور کمتری نسبت به موشک‌ها برخوردار باشد. لذا در این پژوهش حالاتی را بررسی می‌کنیم که محدودیت‌های کنترلی بر روی پارامتر  $\phi$  وجود دارد.

### ۳. روش تحقیق

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد بنا به دلایل گوناگون، ممکن است هواپیما در انتخاب مقادیر کنترلی خود آزاد نباشد، به‌عبارت‌دیگر ممکن است بر روی متغیر کنترلی  $\phi$  محدودیت‌هایی وجود داشته باشد. در این بخش به تأثیر وجود این محدودیت‌ها در جواب بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال می‌پردازیم.

### ۳-۱. بیان مسئله

سه بازیکن هواپیمای هدف (T)، موشک مهاجم (A) و موشک مدافع (D) دارای "حرکت ساده" هستند (شکل ۱). سرعت این سه بازیکن ثابت و به ترتیب با  $V_A$ ،  $V_T$  و  $V_D$  نمایش داده می‌شوند. متغیرهای کنترلی هدف (T)، مهاجم (A) و مدافع (D) مسیر حرکت آنها است، به‌عبارت‌دیگر متغیرهای  $\hat{\phi}$ ،  $\hat{\chi}$  و  $\hat{\psi}$ ، حالت بازیکنان هدف (T)، مهاجم (A) و مدافع (D) در هر زمان برابر با مختصاتشان است، به‌عبارت‌دیگر،  $x_T = (\hat{x}_T, \hat{y}_T)$ ،  $x_A = (\hat{x}_A, \hat{y}_A)$  و  $x_D = (\hat{x}_D, \hat{y}_D)$  فرض می‌کنیم مدافع و مهاجم دارای سرعت برابر هستند،  $V_A = V_D$ ، و سرعت هدف از این مقدار کمتر است،  $\rho = \frac{V_T}{V_A} < 1$ ، بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد  $V_A = V_D = 1$  و سرعت هدف برابر با  $\rho$  است. حالت بازی در هر زمان به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x = (\hat{x}_T, \hat{y}_T, \hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{x}_D, \hat{y}_D) \in \mathbb{R}^6$$

دینامیک سیستم،  $\dot{x} = f(x, \hat{\phi}, \hat{\psi}, \hat{\chi})$ ، با معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\hat{x}}_T = \rho \cos \hat{\phi} \quad (۲)$$

$$\dot{\hat{y}}_T = \rho \sin \hat{\phi} \quad (۳)$$

$$\dot{\hat{x}}_A = \cos \hat{\chi} \quad (۴)$$

$$\dot{\hat{y}}_A = \sin \hat{\chi} \quad (۵)$$

$$\dot{\hat{x}}_D = \cos \hat{\psi} \quad (۶)$$

$$\dot{\hat{y}}_D = \sin \hat{\psi} \quad (۷)$$

که در آن، شرایط اولیه به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x_0 = (\hat{x}_{T0}, \hat{y}_{T0}, \hat{x}_{A0}, \hat{y}_{A0}, \hat{x}_{D0}, \hat{y}_{D0}) = x(t_0)$$

$$b = \frac{\sqrt{4x_A^2 - r_c^2}}{2}, \text{ و } a = \frac{r_c}{2}, \text{ که در آن،}$$

**برهان:** با انجام محاسبات جبری ساده نتیجه مطلوب حاصل می‌شود [۱۶].

**نکته:** در بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال که با معادلات (۲) تا (۱۱) مشخص شد، مدافع می‌تواند با انتخاب متغیر کنترلی مناسب با توجه به متغیر کنترلی مهاجم، از ره‌گیری مهاجم اطمینان حاصل کند. محل ره‌گیری (مختصات مهاجم در لحظه‌ای که فاصله مدافع از آن برابر با  $r_c$  است) بر روی هذلولی معادله (۱۷) قرار می‌گیرد. همچنین اگر هدف در سمت چپ این هذلولی قرار بگیرد ( $x_T \leq 0$  یا  $\frac{x_T^2}{a^2} - \frac{y_T^2}{b^2} \leq 1$ ) همواره (به جز در چند حالت خاص که بیان خواهد شد) مدافع می‌تواند قبل از رسیدن مهاجم به هدف، آن را ره‌گیری کند. در ادامه بحث به بررسی این حالت می‌پردازیم.

بنا به نکته فوق می‌توان متغیرهای کنترلی سه بازیکن را با نقاط روی هذلولی معادله (۱۷) نظیر کرد. در حقیقت مهاجم ابتدا نقطه  $v$  را بر روی هذلولی انتخاب کرده و به سمت آن حرکت می‌کند. مدافع نیز به منظور نابودی مهاجم، در جهت همین نقطه حرکت می‌کند. نقطه  $v$  نقطه انهدام مهاجم خواهد بود. هواپیمای هدف نیز نقطه  $u$  را بر روی این منحنی انتخاب می‌کند و در جهت عکس آن (برای دور شدن نقطه برخورد) حرکت می‌کند. در ادامه بحث منظور ما از منحنی، همواره نمودار هذلولی معادله (۱۷) خواهد بود.

برای تبدیل محدودیت جهت‌گیری هواپیمای هدف به محدودیت انتخاب نقاط روی منحنی، حالات زیر را در نظر می‌گیریم.

**حالت اول:** در این حالت محدودیت جهت‌گیری به‌گونه‌ای است که نقاطی بر روی منحنی وجود دارد که هدف می‌تواند در جهت عکس آن حرکت کند و از منحنی دور شود. (شکل ۴).

**حالت دوم:** در این حالت محدودیت جهت‌گیری به‌گونه‌ای است که هرچند امتداد مسیر حرکت هدف (در جهت مخالف) منحنی را قطع نمی‌کند ولی همچنان مسیر قابل انتخابی برای هدف وجود دارد که می‌تواند با انتخاب آن از منحنی دور شود. (شکل ۵).

**حالت سوم:** در این حالت تمام مسیرهای قابل انتخاب هدف در جهت نزدیک شدن به منحنی است.

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)$$

چون  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0$  لذا  $\dot{\lambda} = 0$  و در نتیجه  $\lambda$  برداری ثابت خواهد بود.

بنا به اصل کمینه پونتریاگین در مسیر بهینه تابع  $\mathcal{H}$  بیشینه یا کمینه خواهد بود ( $\mathcal{H}$  نسبت به  $\hat{\chi}$  کمینه و نسبت به  $\hat{\psi}$  و  $\hat{\phi}$  بیشینه خواهد بود). خواننده برای مطالعه بیشتر در مورد اصل کمینه پونتریاگین و همچنین مفاهیم پایه در سیستم‌های دینامیکی می‌تواند از مرجع [۱۷] استفاده کند.

**لم ۲:** بازی دیفرانسیلی دفاع هدف فعال که با معادلات (۲) تا (۱۱) مشخص شد را در نظر بگیرید. جهت‌گیری موشک مهاجم و مدافع در حالت بهینه مقدار ثابتی است و لذا مسیر حرکت آنها خط مستقیم است.

**برهان:** چون  $\hat{\chi}$  و  $\hat{\psi}$  در  $\mathcal{H}$  دارای محدودیت نیستند نتیجه می‌شود  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{\chi}} = 0$  و  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{\psi}} = 0$  بنابراین داریم:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{\chi}} = -\lambda_{x_A} \sin \hat{\chi} + \lambda_{y_A} \cos \hat{\chi} \Rightarrow \frac{\sin \hat{\chi}}{\cos \hat{\chi}} = \frac{\lambda_{y_A}}{\lambda_{x_A}} \quad (15)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{\psi}} = -\lambda_{x_D} \sin \hat{\psi} + \lambda_{y_D} \cos \hat{\psi} \Rightarrow \frac{\sin \hat{\psi}}{\cos \hat{\psi}} = \frac{\lambda_{y_D}}{\lambda_{x_D}} \quad (16)$$

چون  $\frac{\lambda_{y_D}}{\lambda_{x_D}}$  و  $\frac{\lambda_{y_A}}{\lambda_{x_A}}$  مقادیر ثابتی هستند لذا  $\tan \hat{\psi}$  و  $\tan \hat{\chi}$  مقادیر ثابتی هستند. در نتیجه برای  $\hat{\chi}$  و  $\hat{\psi}$  دو مقدار نتیجه می‌شود که یکی  $\mathcal{H}$  را کمینه و دیگری آن را بیشینه می‌کند. در نتیجه مقدار بهینه برای این دو متغیر ثابت است.

در ادامه بحث مسئله موردنظر را در صفحه مختصات شکل (۳) بررسی می‌کنیم.

**لم ۳:** در صفحه مختصات مانند شکل (۳)، نقطه  $P$  را به قسمی در نظر می‌گیریم که فاصله  $D$  از آن برابر باشد با فاصله  $A$  از آن به علاوه  $r_c$ ، به عبارت دیگر

$$d(P, D) = d(P, A) + r_c$$

اگر مختصات  $P$  را با  $(x, y)$  نشان دهیم نتیجه می‌شود:

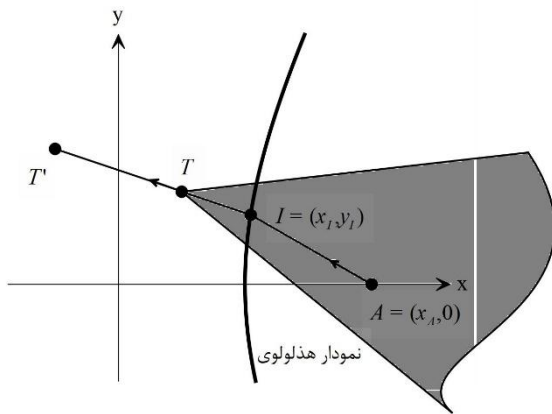
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x > 0. \quad (17)$$

۲-۳- حل مسئله

در این بخش به حل حالت‌های مختلف مسئله مورد نظر می‌پردازیم. توجه داشته باشید که در دو حالت اول هدف می‌تواند از منحنی دور شود بنابراین، قبل از رسیدن مهاجم به هدف، مدافع آن را نابود خواهد کرد، لذا مهاجم تلاش می‌کند با انتخاب مسیر بهینه فاصله نقطه انهدام و هدف را کمینه کند.

جواب حالت بدون محدودیت رجوع کرد.

فرض کنید مهاجم نقطه  $I$  را بر روی منحنی انتخاب کند و در جهت آن حرکت کند. با توجه به نقطه  $I$ ، هدف جهت برای حرکت انتخاب می‌کند تا فاصله نقطه برخورد و موقعیت نهایی خودش بیشینه شود. در قضیه زیر جهت‌گیری بهینه برای هوایمای هدف با توجه به راهبرد انتخابی مهاجم مشخص می‌شود.



شکل ۶. حالت سوم

**قضیه ۲:** فرض کنید مهاجم نقطه  $I$  با مختصات  $(x_I, y_I)$  را بر روی منحنی انتخاب کند.

الف. اگر  $y_I \leq y_\alpha \leq y_\beta$  باشد، راهبرد بهینه برای هوایمای هدف انتخاب همان نقطه  $I$  و حرکت در جهت عکس آن است.

ب. اگر  $y_I > y_\beta$  باشد، راهبرد بهینه برای هوایمای هدف انتخاب نقطه  $\beta = (x_\beta, y_\beta) = u$  و حرکت در جهت عکس آن است.

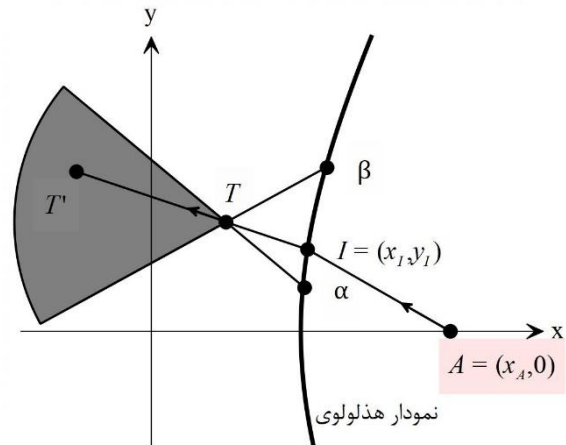
ج. اگر  $y_I < y_\alpha$  باشد، راهبرد بهینه برای هوایمای هدف انتخاب نقطه  $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) = u$  و حرکت در جهت عکس آن است.

برهان:

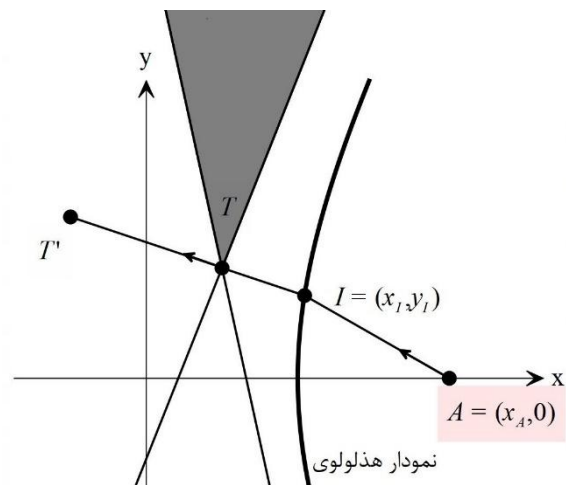
الف: فرض کنید هوایمای هدف جهت‌گیری غیر از جهت داده شده انتخاب کند. با توجه به شکل (۷) فرض کنید  $T'$  در امتداد خط  $IT'$  باشد و  $d(T', T) = \rho d(A, I)$  همچنین فرض کنید  $T''$  موقعیت پایانی هدف در صورت انتخاب مسیر دیگری باشد. بنابراین، باید داشته باشیم:  $d(T'', T) = \rho d(A, I) = d(T', T)$  لذا بنا به نامساوی مثلث داریم:

$$d(T'', I) \leq d(T'', T) + d(T, I) = d(T', I)$$

در نتیجه اگر هدف مسیری جز امتداد  $I$  انتخاب کند، فاصله نهایی‌اش با محل برخورد کمتر خواهد شد.



شکل ۴. حالت اول



شکل ۵. حالت دوم

۲-۳-۱- بررسی و حل حالت اول

در این حالت همان‌طور که در شکل (۴) دیده می‌شود، هدف می‌تواند نقطه‌ای مانند  $I$  به مختصات  $(x_I, y_I)$  بر روی منحنی انتخاب کند (و در جهت عکس آن حرکت کند)، که در شرط زیر صادق باشد:

$$-\infty \leq y_\alpha \leq y_I \leq y_\beta \leq \infty \quad (18)$$

توجه داشته باشید اگر  $y_\alpha = -\infty$  و  $y_\beta = \infty$  آن‌گاه محدودیت موجود بر مسئله تأثیری بر آن ندارد و می‌توان به

ج. با توجه به تقارن موجود در مسئله این حالت را می‌توان همانند حالت (ب) اثبات کرد.

■ در قضیه قبل راهبرد بهینه برای هدف  $(u^*)$  را بر اساس راهبرد انتخابی مهاجم  $(v)$  محاسبه کردیم: در حقیقت تابع  $(v)$  را مشخص کردیم. اکنون مهاجم راهبرد بهینه خود را به گونه‌ای مشخص می‌کند که فاصله نهایی محل برخورد و هدف کمینه شود، در حقیقت با نمادگذاری قضیه قبل، مهاجم با کمینه کردن  $d(T', I)$  راهبرد بهینه خود را مشخص می‌کند.

**قضیه ۳:** اگر  $T'$  موقعیت نهایی هدف در راهبرد بهینه آن باشد و  $I$  نقطه روی منحنی که جهت‌گیری مهاجم را مشخص می‌کند (همانند قضیه قبل)، آنگاه

$$J(y_I) = d(T', I) = \begin{cases} f_1(y_I); & y_\beta < y_I \\ f_2(y_I); & y_\alpha \leq y_I \leq y_\beta \\ f_3(y_I); & y_I < y_\alpha \end{cases} \quad (18)$$

که توابع  $f_1, f_2, f_3$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_2(y_I) = \sqrt{(y_T - y_I)^2 + (x_T - x_I)^2} + \rho d(I, A)$$

$$f_1(y_I) = \frac{\sqrt{(y_T + m_1 c_1 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_1 d(I, A) - x_I)^2}}{\sqrt{(y_T + m_2 c_2 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_2 d(I, A) - x_I)^2}}$$

$$f_3(y_I) = \frac{\rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}}, \quad m_2 = \frac{y_\alpha - y_T}{x_\alpha - x_T}, \quad m_1 = \frac{y_\beta - y_T}{x_\beta - x_T}$$

که در آن  $c_1 = \frac{\rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}}, \quad m_2 = \frac{y_\alpha - y_T}{x_\alpha - x_T}, \quad m_1 = \frac{y_\beta - y_T}{x_\beta - x_T}$

$$s_2 = -\frac{x_\alpha - x_T}{|x_\alpha - x_T|} \quad \text{و} \quad s_1 = -\frac{x_\beta - x_T}{|x_\beta - x_T|}, \quad c_2 = \frac{\rho}{s_2 \sqrt{1+m_2^2}}$$

همگی اعدادی ثابت هستند و  $x_I$  و  $d(I, A)$  توابعی از  $y_I$  هستند.

**برهان:** چون  $I$  بر روی منحنی (۱۷) قرار دارد می‌توان نوشت:

$$x_I = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 y_I^2}{b^2}} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y_I^2} \quad (19)$$

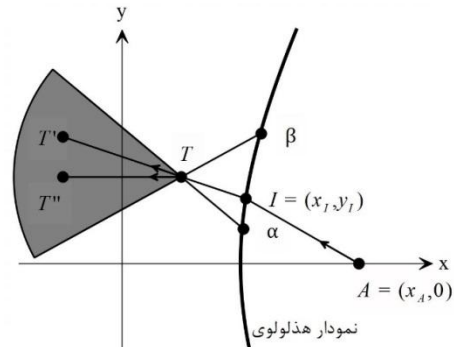
که در آن،  $a = \frac{r_c}{2}$  و  $b = \frac{\sqrt{4x_A^2 - r_c^2}}{2}$  حال  $d(T', I)$  را بر اساس  $y_I$  محاسبه می‌کنیم.

در حالت الف. زمانی که  $y_\alpha \leq y_I \leq y_\beta$  خواهیم داشت:

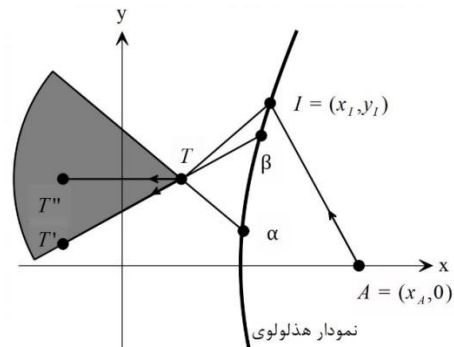
$$\begin{aligned} d(T', I) &= d(T, I) + d(T, T') \\ &= d(T, I) + \rho d(A, I) \\ &= \sqrt{(y_T - y_I)^2 + (x_T - x_I)^2} + \rho d(A, I) \end{aligned}$$

توجه داشته باشید در این حالت انتخاب نقطه  $I$  برای هدف امکان‌پذیر است.

ب. در این حالت انتخاب امتداد مسیر  $I$  برای هواپیما ممکن نیست. لذا باید مسیر دیگری را انتخاب کند. اگر امتداد مسیر نقطه  $\beta$  را انتخاب کند، زمانی که مهاجم به نقطه  $I$  برسد هدف به نقطه  $T'$  خواهد رسید. (شکل ۸). اگر مسیر دیگری را انتخاب کند موقعیت پایانی هدف نقطه‌ای مانند  $T''$  خواهد بود.



شکل ۷. حالت الف از قضیه ۲.



شکل ۸. حالت ب از قضیه ۲.

بنا به قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$d(T'', I)^2 = d(T'', T)^2 + d(T, I)^2 - 2d(T'', T)d(T, I) \cos \theta_1$$

همچنین

$$d(T', I)^2 = d(T', T)^2 + d(T, I)^2 - 2d(T', T)d(T, I) \cos \theta_2$$

که در آن،  $\theta_1$  زاویه  $\widehat{IT''}$  و  $\theta_2$  زاویه  $\widehat{IT'}$  است. چون

$$\cos \theta_1 \geq \cos \theta_2$$

$$\text{و } d(T', T) = d(T'', T) \text{ داریم: } d(T', I) \leq d(T'', I)$$

در نتیجه اگر هدف، مسیری جز امتداد  $\beta$  انتخاب کند، فاصله نهایی‌اش با محل برخورد کمتر خواهد شد. توجه داشته باشید اگر  $y_\beta = 0$  آن‌گاه حالت (ب) اتفاق نمی‌افتد و هواپیما می‌تواند نقطه  $I$  را انتخاب کند.

$$y_{T'} = y_T + \frac{m_1 \rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}} d(I, A) \quad (26)$$

لذا در این حالت  $d(T', I) = f_1(y_I)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_1(y_I)^2 = (y_T + m_1 c_1 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_1 d(I, A) - x_I)^2 \quad (27)$$

که در آن،  $c_1 = \frac{\rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}}$  عددی ثابت است. تابع فوق نیز تابعی از  $y_I$  است.<sup>۲</sup>

در حالت ج. زمانی که  $y_I < y_\alpha$  خواهیم داشت:

$$d(T', I) = \sqrt{(y_{T'} - y_I)^2 + (x_{T'} - x_I)^2} \quad (28)$$

$T'$  بر روی خطی است که از نقطه  $\alpha$  و  $T$  می‌گذرد، لذا خواهیم داشت:

$$y_{T'} - y_T = m_2 (x_{T'} - x_T) \quad (29)$$

عددی ثابت است. در نتیجه داریم:  $m_2 = \frac{y_\alpha - y_T}{x_\alpha - x_T}$  که در آن

$$\begin{aligned} d(T', T) &= \sqrt{(y_{T'} - y_T)^2 + (x_{T'} - x_T)^2} \\ &= |x_{T'} - x_T| \sqrt{1+m_2^2} \\ &= s_2 (x_{T'} - x_T) \sqrt{1+m_2^2} \end{aligned}$$

که در آن،  $s_2 = -\frac{x_\alpha - x_T}{|x_\alpha - x_T|}$  عددی ثابت است. به علاوه از رابطه  $d(T, T') = \rho d(I, A)$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} s_2 (x_{T'} - x_T) \sqrt{1+m_2^2} &= \rho d(I, A) \Rightarrow \\ x_{T'} - x_T &= \frac{\rho}{s_2 \sqrt{1+m_2^2}} d(I, A) \Rightarrow \\ x_{T'} &= x_T + c_2 d(I, A) \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن،  $c_2 = \frac{\rho}{s_2 \sqrt{1+m_2^2}}$ . به علاوه

$$y_{T'} - y_T = m_2 (x_{T'} - x_T) = m_2 c_2 d(I, A)$$

بنابراین:

$$y_{T'} = y_T + m_2 c_2 d(I, A) \quad (31)$$

لذا در این حالت  $d(T', I) = f_3(y_I)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

<sup>۲</sup> بنا به معادله (۲۰)،  $d(I, A)$  تابعی از  $y_I$  است و بنا به معادله (۱۹)،  $x_I$  تابعی از  $y_I$  است.

که در آن،  $(x_T, y_T)$  مختصات نقطه  $T$  است. لذا در این حالت می‌توان نوشت:

$$d(T', I) = f_2(y_I) = \sqrt{(y_T - y_I)^2 + (x_T - x_I)^2} + \rho d(I, A) \quad (21)$$

در حالت ب زمانی که  $y_I > y_\beta$  خواهیم داشت:

$$d(T', I) = \sqrt{(y_{T'} - y_I)^2 + (x_{T'} - x_I)^2} \quad (22)$$

کافی است مختصات نقطه  $T'$  را بر حسب  $y_I$  محاسبه کنیم.  $T'$  بر روی خطی است که از نقطه  $\beta$  و  $T$  می‌گذرد، (شکل ۸)، لذا خواهیم داشت:

$$y_{T'} - y_T = m_1 (x_{T'} - x_T) \quad (23)$$

که در آن،  $m_1 = \frac{y_\beta - y_T}{x_\beta - x_T}$  عددی ثابت است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} d(T', T) &= \sqrt{(y_{T'} - y_T)^2 + (x_{T'} - x_T)^2} \\ &= |x_{T'} - x_T| \sqrt{1+m_1^2} \\ &= s_1 (x_{T'} - x_T) \sqrt{1+m_1^2} \end{aligned}$$

که در آن،  $s_1 = -\frac{x_\beta - x_T}{|x_\beta - x_T|}$  عددی ثابت است.<sup>۱</sup> به علاوه از رابطه  $d(T, T') = \rho d(I, A)$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} s_1 (x_{T'} - x_T) \sqrt{1+m_1^2} &= \rho d(I, A) \Rightarrow \\ x_{T'} - x_T &= \frac{\rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}} d(I, A) \Rightarrow \\ x_{T'} &= x_T + \frac{\rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}} d(I, A) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن:

$$d(I, A) = \sqrt{y_I^2 + \left(x_A - \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y_I^2}\right)^2} \quad (20)$$

و

$$y_{T'} - y_T = m_1 (x_{T'} - x_T) = \frac{m_1 \rho}{s_1 \sqrt{1+m_1^2}} d(I, A)$$

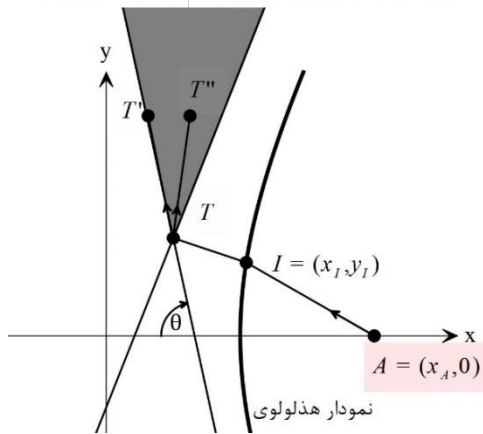
بنابراین،

<sup>۱</sup> چون  $T'$  بر روی امتداد خط  $\beta$  و  $T$  قرار دارد فقط دو حالت داریم:  $x_\beta \leq x_T \leq x_{T'}$  یا  $x_\beta \geq x_T \geq x_{T'}$



محدودیت‌های مسائل عملی از دو نوع معادله (۳۳) و یا (۳۴) هستند، در قضیه زیر راهبرد بهینه هوایما را برای این دو حالت محاسبه می‌کنیم و در ادامه برای کامل شدن بحث تئوری، حالتی که محدودیت‌ها از هر دو نوع وجود داشته باشد را بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۴:** راهبرد بهینه هوایمای هدف که محدودیت‌های موجود بر روی آن همگی از نوع معادله (۳۳) و یا همگی از نوع معادله (۳۴) باشد، انتخاب خط  $l$  است.



شکل ۹. بررسی قضیه ۴.

**برهان.** فرض کنید مهاجم نقطه  $I$  بر روی منحنی انتخاب کرده و به سمت آن حرکت می‌کند. همچنین فرض کنید هوایمای هدف با انتخاب مسیر  $l$  برای حرکت، زمانی که مهاجم به نقطه  $I$  برسد به نقطه  $T'$  برسد. به علاوه فرض کنید  $T''$  نقطه پایانی حرکت هوایما در مسیری جز  $l$  باشد (شکل).

با توجه به نحوه انتخاب خط  $l_2$  می‌توان نتیجه گرفت که زاویه‌ی  $ITT''$  از زاویه  $ITT'$  کوچک‌تر است و لذا بنا به قضیه کسینوس‌ها  $d(I, T'') \leq d(I, T')$ . بنابراین هوایما برای پیشینه کردن فاصله نهایی خود و محل انهدام مهاجم، مسیر  $l$  را انتخاب خواهد کرد.

**قضیه ۵:** اگر  $T'$  موقعیت نهایی هدف در راهبرد بهینه آن باشد و  $I$  نقطه روی منحنی که جهت‌گیری مهاجم را مشخص می‌کند، آنگاه

$$d(T', I)^2 = (y_T + m \cdot c \cdot d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c \cdot d(I, A) - x_I)^2 \quad (22)$$

که در آن،  $m$  شیب خط  $l$  است. اگر محدودیت‌ها از نوع معادله (۳۳) باشد  $s = \frac{m}{|m|}$  و اگر محدودیت‌ها از نوع معادله (۳۴) باشد  $s = -\frac{m}{|m|}$ . به علاوه  $c = \frac{\rho}{s\sqrt{1+m^2}}$ . بنابراین،  $s, m, c$  و همگی اعدادی ثابت هستند و  $x_I$  و  $d(I, A)$  توابعی از  $y_I$  هستند.

$$f_3(y_I)^2 = (y_T + m_2 c_2 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_2 d(I, A) - x_I)^2 \quad (21)$$

با توجه به مطالب گفته‌شده، در این حالت مهاجم به‌منظور مشخص کردن راهبرد خود که فاصله نهایی‌اش را با هدف کمینه می‌کند، کافی است تابع (۱۸) را کمینه کند. به عبارت دیگر اگر  $y_I$  نقطه کمینه تابع (۱۸) باشد آنگاه  $(x_I, y_I)$  راهبرد بهینه برای مهاجم است. با مشخص شدن راهبرد مهاجم، هوایمای هدف نیز راهبرد بهینه خود را بنا بر قضیه ۲ مشخص می‌کند.<sup>۱</sup>

### ۲-۲-۳. بررسی و حل حالت دوم

در این بخش به بررسی حالتی می‌پردازیم که محدودیت جهت‌گیری هوایما به‌گونه‌ای است که هرچند امتداد مسیر حرکت هدف (در جهت مخالف) منحنی را قطع نمی‌کند ولی همچنان مسیر قابل انتخابی برای هدف وجود دارد که می‌تواند با انتخاب آن از منحنی دور شود. (شکل ۵). بنابراین مسیر  $l$  در بین مسیرهای قابل انتخاب هوایما وجود دارد به قسمی که زاویه‌ی بین خط  $l$  و جهت منفی محور  $x$ ها کمینه باشد. با نمادگذاری‌های معادله (۱۱) این مسیر  $\hat{\phi}_0$  یا  $\hat{\phi}_1$  خواهد بود.

بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد هوایما مسیرهای قابل انتخابی که منحنی را قطع کند، انتخاب نخواهد کرد. به عبارت دیگر در این حالت می‌توان فرض کرد تمام راهبردهای قابل انتخاب نه خودشان و نه امتدادشان در جهت عکس، منحنی را قطع نمی‌کند. بنابراین، در این حالت با نمادگذاری معادله (۱۱) می‌توان نوشت.

$$0 \leq \hat{\theta}_0 \leq \hat{\phi} \leq \hat{\theta}_1 \leq \pi \quad (33)$$

یا

$$\pi \leq \hat{\theta}_2 \leq \hat{\phi} \leq \hat{\theta}_3 \leq 2\pi \quad (34)$$

**لم ۴:** با مفروضات فوق گزاره‌های زیر را داریم:

الف. اگر تمام راهبردهای قابل انتخاب هوایما در معادله (۳۳) صدق کنند آنگاه مسیر  $l$  همان  $\hat{\theta}_1$  است.

ب. اگر تمام راهبردهای قابل انتخاب هوایما در معادله (۳۴) صدق کنند آنگاه مسیر  $l$  برابر با  $\hat{\theta}_2$  خواهد بود.

**برهان:** به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت.

توجه داشته باشید که ممکن است راهبردهای قابل انتخاب هوایما، هم از نوع معادله (۳۳) و هم از نوع معادله (۳۴) باشد، با توجه به این‌که این مورد در عمل بسیار نادر است و اکثر

<sup>۱</sup> راهبرد بهینه مدافع همان نقطه  $(x_I, y_I)$  است.

برهان: توجه کنید که

$$d(T', I) = \frac{\rho}{\sqrt{(y_{T'} - y_I)^2 + (x_{T'} - x_I)^2}} \quad (۳۶)$$

می‌دانیم  $T'$  بر روی خط  $l$  قرار دارد لذا خواهیم داشت:

$$y_{T'} - y_T = m(x_{T'} - x_T) \quad (۳۷)$$

که در آن،  $m$  شیب خط  $l$  است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} d(T', T) &= \sqrt{(y_{T'} - y_T)^2 + (x_{T'} - x_T)^2} \\ &= |x_{T'} - x_T| \sqrt{1 + m^2} \\ &= s(x_{T'} - x_T) \sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

که در آن،  $s = \frac{m}{|m|}$  اگر محدودیت‌ها از نوع معادله (۳۳) باشد و اگر محدودیت‌ها از نوع معادله (۳۴) باشد  $s = -\frac{m}{|m|}$  به علاوه از رابطه  $d(T, T') = \rho d(I, A)$  نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} s(x_{T'} - x_T) \sqrt{1 + m^2} &= \rho d(I, A) \Rightarrow \\ x_{T'} - x_T &= \frac{\rho}{s \sqrt{1 + m^2}} d(I, A) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x_{T'} = x_T + \frac{\rho}{s \sqrt{1 + m^2}} d(I, A) \quad (۳۸)$$

به علاوه

$$y_{T'} - y_T = m(x_{T'} - x_T) = \frac{m\rho}{s \sqrt{1 + m^2}} d(I, A)$$

بنابراین،

$$y_{T'} = y_T + \frac{m_1 \rho}{s_1 \sqrt{1 + m_1^2}} d(I, A) \quad (۳۹)$$

لذا در این حالت  $d(T', I)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$d(T', I)^2 = (y_T + m \cdot c \cdot d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c \cdot d(I, A) - x_I)^2 \quad (۴۰)$$

که در آن  $c = \frac{\rho}{s \sqrt{1 + m^2}}$  عددی ثابت است. تابع فوق نیز تابعی از  $y_I$  است.<sup>۱</sup>

با توجه به مطالب گفته شده، در این حالت مهاجم به منظور مشخص کردن راهبرد خود که فاصله نهایی‌اش را با هدف کمینه می‌کند، کافی است تابع (۲۲) را کمینه کند. به عبارت دیگر اگر  $y_I$  نقطه کمینه تابع (۲۲) باشد آنگاه  $(x_I, y_I)$  راهبرد بهینه برای مهاجم است.

در ادامه این بخش حالتی که راهبردهای قابل انتخاب هواپیما، هم از نوع معادله (۳۳) و هم از نوع معادله (۳۴) باشد را بررسی می‌کنیم. در این حالت هواپیما هم می‌تواند در جهت مثبت محور  $y$  حرکت کند و هم در جهت منفی این محور. فرض کنید  $l'$  نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط  $\theta_1$  و  $\theta_2$  باشد. فرض کنید  $l'$  منحنی را در نقطه‌ای با عرض  $y_n$  قطع کند. در حقیقت اگر  $(x, y)$  نقطه‌ای بر روی منحنی باشد و داشته باشیم  $y \leq y_n$  آنگاه نقطه  $(x, y)$  زیر خط  $l'$  قرار می‌گیرد.

**قضیه ۶:** فرض کنید محدودیت‌های هواپیمای هدف، هم از نوع معادله (۳۳) و هم از نوع معادله (۳۴) باشد. به علاوه فرض کنید مهاجم نقطه  $I = (x_I, y_I)$  را برای هدف‌گیری انتخاب کند.

الف. اگر  $y_I \leq y_n$  آنگاه راهبرد بهینه برای هواپیما انتخاب خط  $l_1$  است.

ب. اگر  $y_I \geq y_n$  آنگاه راهبرد بهینه برای هواپیما انتخاب خط  $l_2$  است.

که در آن برای  $i = 1, 2$  خطی  $l_i$  خطی موازی با خط  $\theta = \theta_i$  از نقطه  $T$  عبور می‌کند.

**برهان:** این قضیه را می‌توان مشابه با قضیه ۴ با استفاده از قضیه کسینوس‌ها اثبات کرد. به شکل (۱۰) توجه کنید.

■

**قضیه ۷:** اگر  $T'$  موقعیت نهایی هدف در راهبرد بهینه آن باشد و  $I$  نقطه روی منحنی که جهت‌گیری مهاجم را مشخص می‌کند، آنگاه

$$J(y_I) = d(T', I) = \begin{cases} f_1(y_I); & y_I \leq y_n \\ f_2(y_I); & y_n \leq y_I \end{cases} \quad (۴۱)$$

که توابع  $f_1$  و  $f_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_1(y_I)^2 = (y_T + m_1 c_1 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_1 d(I, A) - x_I)^2$$

$$f_2(y_I)^2 = (y_T + m_2 c_2 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_2 d(I, A) - x_I)^2$$

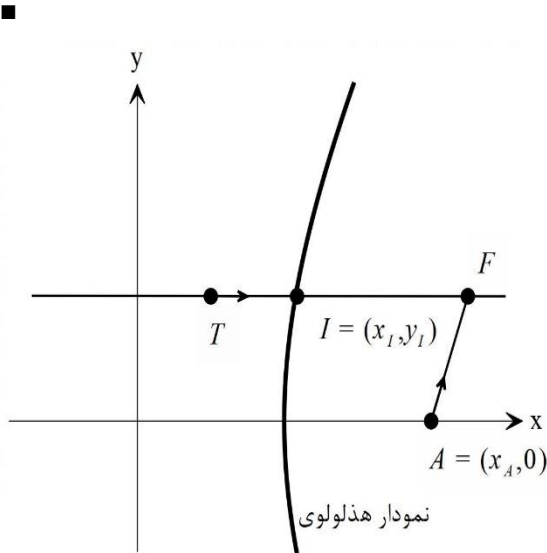
که در آن، برای  $i = 1, 2$  داریم:  $m_i = \tan \theta_i$  و  $c_i = \frac{\rho}{s_i \sqrt{1 + m_i^2}}$  به علاوه،  $s_i = (-1)^{1+i} \frac{m_i}{|m_i|}$  همگی اعدادی ثابت هستند و  $x_I$  و  $d(I, A)$  توابعی از  $y_I$  هستند.

**برهان:** این قضیه را می‌توان مشابه با قضیه ۵ اثبات کرد. به شکل (۱۰) توجه کنید.

<sup>۲</sup>  $l'$  خطی موازی با خط  $\theta = \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2}$  است که از نقطه  $T$  عبور می‌کند. <sup>۳</sup>  $y_n$  می‌تواند  $\infty$  یا  $-\infty$  باشد.

<sup>۱</sup> بنا به معادله (۲۰)،  $d(I, A)$  تابعی از  $y_I$  است و بنا به معادله (۱۹)،  $x_I$  تابعی از  $y_I$  است.

قرار دارد مدافع در زمان مناسب به این نقطه نخواهد رسید و لذا توان نابود کردن مهاجم را نخواهد داشت. (شکل ۸).



شکل ۸. بررسی لم ۵

**قضیه ۸:** در حالت سوم از مسئله مورد بحث، اگر جواب بهینه وجود داشته باشد آن‌گاه جهت‌گیری هواپیما در حالت بهینه به سمت نقطه  $(x_I, y_I)$  روی منحنی است که در آن،  $y_I$  در شرط  $f(y_I) \geq 0$  صدق کند.

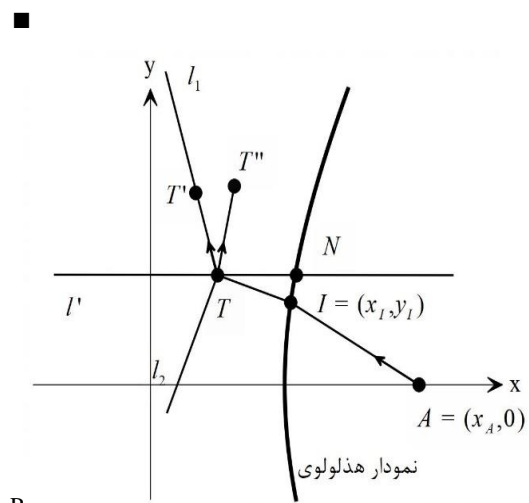
**برهان:** این قضیه را می‌توان از لم قبل نتیجه گرفت.

اگر بخواهیم قضیه قبل را دقیق‌تر بیان کنیم باید گفت جهت‌گیری هواپیما در امتداد خطی خواهد بود که دایره آپولونیوس<sup>۱</sup> (با کانون‌های  $A$  و  $T$  و نسبت  $\rho$ ) را قطع نکند و یا محل تقاطع خط و دایره در سمت چپ منحنی قرار بگیرد. در ادامه این بخش با فرض وجود جواب بهینه، مسئله را حل می‌کنیم.

با مفروضات فوق فرض کنید راهبردهای قابل انتخاب برای هواپیما به صورت خطوطی باشند که از نقطه  $T$  عبور کند و شیب آن، که با  $m$  نمایش داده می‌شود در شرط زیر صدق کند:

$$m_1 \leq m \leq m_2 \quad (۴۲)$$

که در آن،  $m_1$  و  $m_2$  به ترتیب شیب خط  $l_1$  و  $l_2$  است. به شکل (۱۲) توجه کنید. فرض کنید  $l_1$  و  $l_2$  منحنی را در نقاط  $\alpha$  و  $\beta$  قطع کند و همچنین نیمساز زاویه بین  $l_1$  و  $l_2$



شکل ۷. بررسی قضیه ۶

بنابراین، در این حالت مهاجم به منظور مشخص کردن راهبرد خود که فاصله نهایی‌اش را با هدف کمینه می‌کند، کافی است تابع (۴۱) را کمینه کند.

### ۳-۲-۳. بررسی و حل حالت سوم

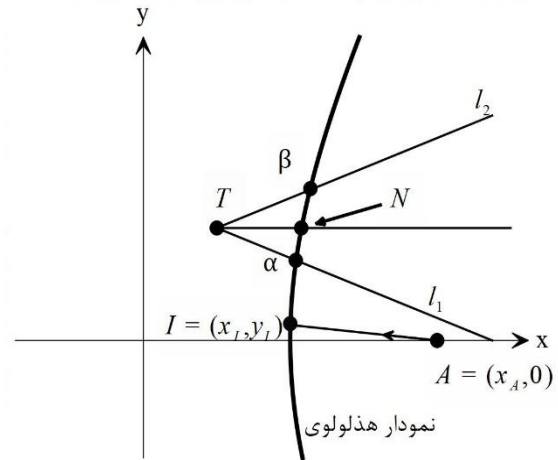
در این حالت تمام مسیرهای انتخابی هدف در جهت نزدیک شدن به منحنی است. به عبارت دیگر تمام مسیرهای قابل انتخاب هواپیما منحنی را قطع می‌کند. در این حالت لزوماً جواب بهینه برای مسئله وجود ندارد و ممکن است قبل از رسیدن مدافع، هواپیما توسط مهاجم نابود شود. در این بخش شرایط وجود جواب (شرایطی که مدافع بتواند مهاجم را قبل از نابودی هدف، نابود کند) را مشخص کرده و سپس راهبرد بهینه را با وجود این شرایط، مشخص می‌کنیم.

**لم ۵:** اگر هواپیما در جهت نقطه  $I = (x_I, y_I)$  بر روی منحنی حرکت کند که  $d(T, I) \leq \rho \cdot d(A, I)$  باشد آنگاه همواره مهاجم با انتخاب جهت‌گیری مناسب می‌تواند هواپیما را قبل از رسیدن مدافع نابود کند.

**برهان:** فرض کنید هواپیما در جهت نقطه  $I = (x_I, y_I)$  بر روی منحنی حرکت می‌کند که  $d(T, I) \leq \rho \cdot d(A, I)$  با توجه به اینکه  $d(T, I) \leq \rho \cdot d(A, I)$  نقطه  $F$  بر روی امتداد پاره‌خط  $TI$  و در سمت راست منحنی به قسمی وجود دارد که  $d(T, F) = \rho \cdot d(F, A)$ . در نتیجه مهاجم با انتخاب نقطه  $F$  برای جهت‌گیری، در این نقطه به هواپیما خواهد رسید و آن را نابود خواهد کرد. توجه داشته باشید چون  $F$  در سمت راست منحنی

<sup>۱</sup> apollonius

منحنی را در نقطه  $N = (x_n, y_n)$  قطع کند.



شکل ۹. بررسی قضیه ۹.

**قضیه ۹:** با نمادگذاری‌های فوق فرض کنید مهاجم نقطه  $I$  به مختصات  $(x_I, y_I)$  را برای هدف‌گیری انتخاب کند.

الف. اگر  $y_I \leq y_n$  آن‌گاه راهبرد بهینه برای هواپیما انتخاب خط  $l_2$  است.

ب. اگر  $y_I \geq y_n$  آن‌گاه راهبرد بهینه برای هواپیما انتخاب خط  $l_1$  است.

**برهان:** این قضیه را می‌توان مشابه با قضیه ۴ با استفاده از قضیه کسینوس‌ها اثبات کرد. به شکل (۱۲) توجه کنید.

**قضیه ۱۰:** اگر  $T'$  موقعیت نهایی هدف در راهبرد بهینه آن باشد و  $I$  نقطه روی منحنی که جهت‌گیری مهاجم را مشخص می‌کند، آنگاه

$$J(y_I) = d(T', I) = \begin{cases} f_1(y_I); & y_I \leq y_n \\ f_2(y_I); & y_n \leq y_I \end{cases} \quad (۴۳)$$

که توابع  $f_1$  و  $f_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_1(y_I)^2 = (y_T + m_1 c_1 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_1 d(I, A) - x_I)^2$$

$$f_2(y_I)^2 = (y_T + m_2 c_2 d(I, A) - y_I)^2 + (x_T + c_2 d(I, A) - x_I)^2$$

که در آن برای  $i = 1, 2$  داریم:  $c_i = \frac{\rho}{s_i \sqrt{1+m_i^2}}$  و  $s_i \in \{1, -1\}$

همگی اعدادی ثابت هستند<sup>۱</sup> و  $x_I$  و  $d(I, A)$  توابعی از  $y_I$  هستند.

**برهان:** این قضیه را می‌توان مشابه با قضیه ۵ اثبات کرد. به شکل (۱۲) توجه کنید. ■

بنابراین، در این حالت مهاجم به منظور مشخص کردن راهبرد خود که فاصله نهایی‌اش را باهدف کمینه می‌کند، کافی است تابع (۴۳) را کمینه کند.

#### ۴- نتیجه‌گیری

درگیری بین سه بازیکن هواپیمای هدف (T)، موشک مهاجم (A) و موشک مدافع در این مقاله بررسی شد. در این سناریو هواپیمای هدف که معمولاً یک هواپیمای بدون سرنشین با ارزش بالا است، به وسیله یک موشک مهاجم تهدید می‌شود. هواپیما در تلاش برای فرار از مهاجم، با موشک مدافع همکاری می‌کند. در این سناریو تأثیر وجود محدودیت‌ها در انتخاب مانورهای فرار برای هواپیما، بررسی شد. با توجه به نوع محدودیت راهبرد بهینه برای هر سه بازیکن مشخص شد. همچنین مشخص شد در چه حالاتی هواپیما قادر به فرار از مهاجم است و در چه حالاتی مهاجم می‌تواند هواپیما را نابود کند.

هرچند این مقاله گامی به جلو برای عملیاتی شدن مسئله موردبحث است، هنوز جنبه‌های مختلفی برای کامل شدن مسئله موردنیاز است. نویسنده می‌تواند برای کارهای آینده موارد زیر را پیشنهاد دهد. بررسی تأثیر وجود محدودیت‌های کنترلی موشک مهاجم و مدافع بر روی جواب بهینه. بررسی تأثیر وجود محدودیت‌های حالت سیستم بر روی جواب بهینه. از حالات دیگری که می‌توان مورد بررسی قرار داد زمانی است که شرط یکسان بودن ارتفاع سه بازیکن، حذف شود. همچنین می‌توان این بازی را در حالتی که  $\tau_c \rightarrow 0$  نیز بررسی کرد.

#### ۵- مراجع

[1] Bigdeli, H.; Hassanpour, H.; Tayyebi, J. "Optimistic and Pessimistic Solutions of Single and Multi-Objective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Analysis of Some Military Cases"; J. Advanced Defense Science and Technology, 2017, 8, 2, 133-145.

[2] Pachter, M.; Garcia, E.; Casbeer, D. W. "Active Target Defense Differential Game"; 52nd Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing (Allerton), 2014, 46-53.

[3] Isaacs, R.; "Differential Games"; John Wiley & Sons: New York, 1965.

[4] Ganebny, S. A.; Kumkov, S. S.; Méneç, S. L.; Patsko, V. S. "Model Problem in a Line with Two Pursuers and One

<sup>۱</sup> می‌توان نشان داد که  $S_1 = \frac{x_\alpha - x_T}{|x_\alpha - x_T|}$  و  $S_2 = \frac{x_\beta - x_T}{|x_\beta - x_T|}$

- [11] Rubinsky, S.; Gutman, S. "Three-Player Pursuit and Evasion Conflict"; *J. Guid. Control. Dyn.* 2014, 37, 1, 98–110.
- [12] Yamasaki, T.; Balakrishnan, S.N. "Triangle Intercept Guidance for Aerial Defense"; *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf. American Institute of Aeronautics and Astronautics* (2010).
- [13] Yamasaki, T.; Balakrishnan, S.N.; Takano, H. "Modified Command to Line-Of-Sight Intercept Guidance for Aircraft Defense"; *J. Guid. Control. Dyn.* 2013, 36, 3, 898–902.
- [14] Casbeer, D. W.; Garcia, E.; Pachter, M. "The Target Differential Game with Two Defenders"; *J. Intell. Robot. Syst. Theory Appl.* 2018, 89, 1–2, 87–106.
- [15] Garcia, E.; Casbeer, D. W.; Pachter, M. "Cooperative Strategies for Optimal Aircraft Defense from an Attacking Missile"; *J. Guid. Control. Dyn.* 2015, 38, 8, 1510–1520.
- [16] Garcia, E.; Casbeer, D. W.; Fuchs, Z. E.; Pachter, M. "Aircraft Defense Differential Game with Non-Zero Capture Radius" *IFAC-PapersOnLine.* 2017, 50, 1, 14200–14205.
- [17] Kirk, D.E.; "Optimal Control Theory, An Introduction"; Dover Publications, Inc: New York, 2004.
- Evader"; *Dyn. Games Appl.* 2012, 2, 2, 228–257.
- [5] Huang, H.; Zhang, W.; Ding, J.; Stipanović, D. M.; Tomlin, C. J. "Guaranteed Decentralized Pursuit-Evasion in the Plane with Multiple Pursuers"; *Proc. of the IEEE Conf. on Decis. Control.* 2011, 4835–4840.
- [6] Bakolas, E.; Tsiotras, P. "Optimal Pursuit of Moving Targets Using Dynamic Voronoi Diagrams"; *Proc. IEEE Conf. Decis. Control.* 2010, 7431–7436.
- [7] Earl, M. G.; Andrea, R. D. "A Decomposition Approach to Multi-Vehicle Cooperative Control"; *Rob. Auton. Syst.* 2007, 55, 4, 276–291.
- [8] Fuchs, Z. E.; Khargonekar, P. P.; Evers, J. "Cooperative Defense within a Single-Pursuer, Two-Evader Pursuit Evasion Differential Game"; *49th IEEE Conf. Decis. Control (CDC).* 2010, 3091–3097.
- [9] Scott, W.; Leonard, N. E. "Pursuit, Herding and Evasion: A Three-Agent Model of Caribou Predation"; *Proc. American Control Conf.* 2013, 2978–2983.
- [10] Ratnoo, A.; Shima, T. "Line-of-Sight Interceptor Guidance for Defending an Aircraft"; *J. Guid. Control. Dyn.* 2011, 34, 2, 522–532.