

# شبیه‌سازی حرکت جسم جامد در یک سیال نیوتونی با استفاده از یک روش مرز مستور شبه‌طیفی موازی شده تاوایی مبنا

علی شهاب الدینی پاریزی<sup>۱</sup>، فریدون ثابت‌قدم<sup>۲</sup>

دانشکده فنی و مهندسی، واحد علوم و تحقیقات،

دانشگاه آزاد اسلامی، تهران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۳۰)

## چکیده

در مقاله حاضر روشی عددی برای شبیه‌سازی اندرکنش دوسویه یک جسم جامد صلب با یک سیال تراکم‌ناپذیر نیوتونی در یک پیکربندی دوبعدی تشریح می‌شود. در این روش مرزهای جامد متحرک توسط توابع پایه شعاعی مدل شده، به یک حل‌گر مرز مستور شبه‌طیفی معادلات ناویر-استوکس در شکل تاوایی-سرعت اعمال شده‌اند. در ابتدای هر گام زمانی سرعت‌هایی بقایایی که شرایط مرز مستور متحرک را نیز ارضاء می‌کنند، به همراه یک میدان تاوایی اصلاح شده، مستقیماً و بدون نیاز به تعریف یک تابع نیروی خارجی برای اصلاح جمله‌های جابجایی و پخش، مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به استقلال شرط‌مرزی‌های مؤلفه‌های سرعت از یکدیگر، در هر گام زمانی، معادلات پواسن سرعت به صورت موازی حل شده‌اند. دینامیک جسم جامد با دقت مرتبه دوم زمانی دنبال می‌شود که در آن نیروهای حاصل از اندرکنش مرز جامد و سیال از یک روش انتگرالی بر پایه تاوایی محاسبه شده‌اند. انتگرال‌گیری زمانی از یک روش رانج کوتای مرتبه سوم موازی شده انجام شده است. استفاده از حل‌گر سریع شبه‌طیفی به‌همراه موازی‌سازی حل معادلات پواسن سرعت و موازی‌سازی انتگرال‌گیری زمانی؛ در ترکیب با مدل کردن مرز جامد با استفاده از توابع پایه شعاعی، الگوریتمی بسیار سریع و کارآمد را نتیجه می‌دهد که شبیه‌سازی زمان واقعی را (که نیازمند حداقل ۲۱ نمایش از میدان جریان در هر ثانیه است) امکان‌پذیر ساخته است. دقت و کارایی روش از طریق حل چند مسئله نمونه نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** اندرکنش دوسویه سیال و جامد؛ فرمولاسیون تاوایی-سرعت؛ حل‌گر شبه‌طیفی؛ روش مرز مستور؛ توابع پایه شعاعی؛ محاسبات موازی

## Simulation of Solid Body Motion in a Newtonian Fluid Using a Vorticity-Based Parallel Pseudo-Spectral Immersed Boundary Method

A. Shahabaldini Parizi

F. Sabetghadam

Engineering Faculty

Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

(Received: 23/December/2019 ; Accepted:20/July/2020)

### ABSTRACT

A numerical method is presented for the simulation of the two-way interaction of a rigid body with an incompressible Newtonian fluid in a two-dimensional configuration. In this method, the moving boundaries which are modeled by the radial base functions, are implemented on a Fourier pseudo-spectral solver of the Navier-Stokes equations in the vorticity-velocity formulation. At the beginning of each time step, the conservative velocity fields, satisfying the immersed boundary conditions along with a modified vorticity field, are implemented to the pseudo-spectral solver. The Poisson equations are solved in parallel, because the velocity boundary conditions obtain independently. The dynamics of the solid body is followed by a second-order method in which the forces are obtained from a vorticity-based integral method. The time integration is performed using a third-order parallel Runge-Kutta method. Employing a parallel fast Fourier pseudo-spectral solver along with parallelization of the time integrations, in combination with modeling of the solid boundaries using the radial base functions result in a very fast and efficient solver that makes it possible real-time simulations (which requires at least 21 flow snapshots per second). The accuracy and efficiency of the method is demonstrated by solving some sample problems.

**Keywords:** Two-way fluid-solid interaction; Vorticity-velocity formulation; Pseudo spectral solver; Immersed boundary method; Radial basis functions; Parallel calculation

۱- دانشجوی دکتری: shahabaldini\_a@yahoo.com

۲- دانشیار (نویسنده پاسخگو): fsabet@srbiau.ac.ir

## ۱- مقدمه

همگرایی کلی یک حل گر شبه طیفی مرز مستور اغلب تنها وابسته به دقت و همواری اعمال شرایط مرز مستور است [۱۰].

در این مقاله از روش شبه طیفی فوریه برای گسسته-سازي مکانی استفاده شده است که علاوه بر مزایای اشاره شده، محاسبات آن به سادگی می تواند به صورت موازی انجام شود و الگوریتم های موازی سازی مناسب برای محاسبات چند هسته ای و واحدهای پردازش گرافیک (GPU) برای آن در دسترس است [۱۵ و ۱۶].

## ج- روش انتگرال گیری زمانی

هزینه محاسباتی انتگرال گیری زمانی بر روی بازده کلی حل گر نقشی اساسی دارد. از بین روش های پیش بینی-تصحیح، استفاده از روش رانج-کوتای مرتبه ۴ صریح به علت دقت و پایداری خوب آن، برای حل گرهای مبتنی بر تاوایی سابقه ای طولانی دارد [۳ و ۱۷]. با این همه، این روش به طور مستقیم قابل موازی شدن نیست. همچنین به سبب نیاز به چهار بار محاسبه تابع در هر گام زمانی، اندکی کند محسوب می شود.

در کار حاضر از یک روش دوگامه دو مرحله ای صریح مرتبه سوم رانج-کوتای قابل موازی سازی استفاده شده است [۱۸].

## د- روش تخمین شرایط مرزی بر روی مرز مستور

برای تقریب زدن شرایط مرز مستور نامنظم بر روی نقاط شبکه دکارتی روش های متنوعی پیشنهاد شده است که از بین آنها واپیچش با توابع ضربه هموار شده [۴، ۲ و ۱۹] و انواع مختلف میان یابی [۵ و ۲۰] بسیار مرسوم هستند. در خانواده دیگری از روش ها، برای بهبود دقت، یک معادله کمکی به صورت موضعی تعریف و حل می شود [۳ و ۲۱]. ولی آشکار شده است که این روش ها ممکن است نوساناتی غیر واقعی به حل وارد کنند که باعث کاهش نرخ همگرایی می شود [۲۱، ۷ و ۲۲].

برای غلبه بر برخی از این مشکلات اصلاحاتی پیشنهاد شده است از قبیل گسترش هموار دامنه حل [۲۳، ۲۱ و ۲۴]، استفاده از فیلترهای عددی [۸، ۲۵ و ۲۶] و انواع مختلف روش های میان یابی چند متغیره هموار [۲۹-۲۷]. در بین روش های میان یابی چند متغیره هموار،

شبه سازی اندرکنش اجسام جامد با سیال تراکم ناپذیر کاربردهای مهندسی و علمی بسیاری دارد [۱]. در این بین روش های مرز مستور به دلیل انعطاف پذیری در مواجهه با مرزهای متحرک پیچیده و بازده محاسباتی زیاد، از روش های مرسوم چنین شبه سازی هایی هستند. دقت، بازده و انعطاف پذیری یک حل گر مرز مستور جریان تراکم ناپذیر به طور عمده تحت تأثیر عوامل زیر است:

## الف- الگوریتم اعمال پیوستگی به معادلات اندازه حرکت

یکی از روش های رایج برای این الگوریتم، فرمول بندی متغیرهای اولیه است [۲ و ۳]، که معمولاً منجر به تعریف مستقیم یک تابع نیروی خارجی و استفاده از روش گام کسری می شود [۴-۶]؛ اما فرمول بندی های مبتنی بر تاوایی نیز به وفور استفاده می شوند [۷-۱۱، ۱۲ و ۱۳]. دسته اخیر منجر به معادلات پواسون با شرایط مرزی دیریشه می شوند که مسائلی خوش تعریف تر از مسائل نظیرشان در فرمول بندی متغیرهای اولیه هستند.

در مقاله حاضر از فرمول بندی تاوایی-سرعت استفاده شده است. در این روش خاص، بدون تعریف صریح تابع نیرو، مرزهای مستور از طریق اصلاح مستقیم جمله های جابجایی و پخش اعمال می شوند. مهم ترین مزیت این روش استفاده از سرعت های باقی در ابتدای هر گام زمانی است. بدین ترتیب شرایط مرز مستور می توانند با دقتی که تنها وابسته به مرتبه دقت میان یابی ها بر روی شبکه دکارتی و مستقل از دقت انتگرال گیری زمانی است اعمال شوند. این روش قابل توسعه به مسائل سه بعدی است و نیز همان گونه که تأکید خواهد شد، با توجه به استقلال شرط مرزی های سرعت، به سادگی قابلیت موازی شدن را دارد.

## ب- روش های گسسته سازی فضایی و زمانی

علاوه بر روش های رایجی همانند اختلاف محدود و حجم محدود که سابقه طولانی تری دارند [۶]، گسسته سازی شبه طیفی نیز به مرور مورد توجه قرار گرفته است [۸، ۱۰ و ۱۴]. این دسته از روش ها حجم محاسباتی بسیار کمی دارند (از مرتبه  $(N \log N)$ ). همچنین به سبب نرخ همگرایی ذاتی بسیار زیاد (در مواجهه با مسائل هموار)، نرخ

## ۲-۱- حل گر شبه‌طیفی فوریه

شکل ۱ به صورت نمادین پیکربندی جسم جامد قرار گرفته در سیال را نشان می‌دهد. در این شکل، دامنه حل منظم  $D = \Omega_f \cup \Omega_s$  شامل هر دو دامنه سیال  $\Omega_f$  و جسم جامد (ثابت و یا متحرک)  $\Omega_s$  می‌شود. شرایط مرزی سرعت در هر لحظه بر روی مرز مستور فیزیکی  $\Gamma_s$  داده شده هستند؛ و دامنه حل  $D$  به وسیله یک شبکه یکنواخت با تراکم نقاط  $N \times N$  به نام  $G(N)$  پوشانده شده است. شرایط مرزی بر روی  $\Gamma_D$  برحسب تعریف مسئله، تناوبی و یا صفر فرض می‌شوند.

با توجه به شکل ۱، بردار سرعت  $u = (u_1, u_2)$  و تاوایی  $\bar{D} = \{D \cup \Gamma_D\}$  بر روی ناحیه منظم  $\omega = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$  تعریف شده هستند. دینامیک تاوایی از انتگرال گیری زمانی معادله انتقال تاوایی:

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega & \text{in } D \times [0, T]; \\ \omega(x, t = 0) = \omega_0(x) & \text{for } x \in D, \end{cases} \quad (1)$$

به دست می‌آید که در آن بردار سرعت، معادله پواسون با شرایط مرزی دیریشله زیر را ارضاء می‌کند:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \hat{e}_z \times \nabla \omega & \text{in } D, \\ u(\Gamma_D) = u_{\Gamma_D}. \end{cases} \quad (2)$$

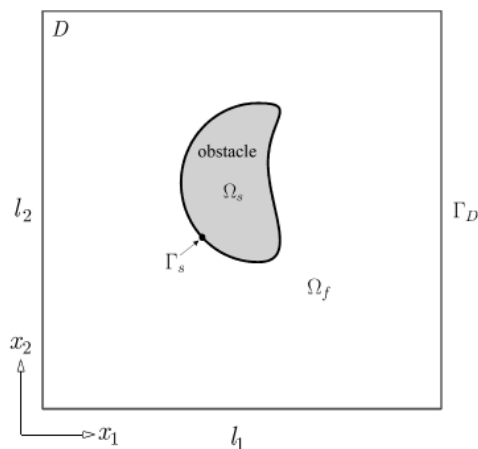
برای هر توزیع دلخواه تاوایی، بدون توجه به دینامیک موضعی جریان، یک بردار سرعت فیزیکی (بقایی) از معادله (۲) قابل حصول است، به شرط آن که شرایط مرزی مناسب اعمال شود (برای بحث بیشتر به [۳۲ و ۳۳] مراجعه شود). در واقع یکی از مهم‌ترین مزایای فرمول‌بندی تاوایی- سرعت، در مقایسه با برخی از فرمول‌بندی‌های متغیرهای اولیه، آن است که زمان در بخش بیضوی معادله به صراحت ظاهر نمی‌شود. بنابراین معادله (۲) با تقریب گسسته‌سازی زمانی، می‌تواند مستقل از معادله (۱) حل شود. بدین ترتیب، در ادامه کارهای گذشته نویسندگان [۲۱، ۳۴، ۳۵ و ۳۰]، روش پیشنهادی این مقاله استخراج یک میدان سرعت بقایی است که به تقریب شرایط مرز مستور را ارضاء کند. سپس این سرعت بقایی و تاوایی نظیر آن به عنوان شرایط اولیه به معادله انتقال تاوایی اعمال خواهد شد.

برای میدان‌های تناوبی در فضا، حل گر شبه‌طیفی فوریه از نظر دقت و بازده نسبت به سایر حل‌گرها برتری دارد.

امکان استفاده از توابع پایه شعاعی<sup>۱</sup> (RBF) برای روش‌های مرز مستور طیفی<sup>۲</sup> پیشنهاد و به کار برده شده است [۲۷، ۳۰].

در کار حاضر از روش اصلاح‌شده شپارد<sup>۳</sup> [۳۱ و ۲۹] استفاده شده؛ زیرا این روش به سبب سرعت و انعطاف‌پذیری آن و هم‌زمان دقت مرتبه دوم موضعی، برای اهداف مورد نظر نویسندگان مناسب است.

در ادامه مقاله خلاصه‌ای از روش شبه‌طیفی کلاسیک برای اعمال شرایط مرز مستور آورده شده. پس از آن، به سبب نقش اساسی شرایط مرزی، در چند بخش مجزا به تفصیل روش اصلاح شرایط مرزی ارائه خواهد شد. با توجه به اهمیت محاسبه نیروهای اعمال‌شده بر جسم جامد، این مهم نیز در ادامه مورد بحث قرار خواهد گرفت. برای نشان دادن قابلیت روش، مثال‌هایی شامل مرز ساکن و متحرک آورده شده و نتایج با داده‌های مبنا مقایسه شده است. در انتها نیز روش موازی‌سازی محاسبات مورد بحث قرار گرفته است.



شکل (۱): شماتیک جسم جامد (ساکن و یا متحرک) قرار گرفته میدان جریان سیال.

## ۲- فرمول‌بندی ریاضی

مبانی ریاضی روش پیشنهادی در این بخش تشریح می‌شود. ابتدا فرمول‌بندی روش شبه‌طیفی، سپس چگونگی اعمال شرایط مرزی‌های مستور به حل، و نهایتاً روش میان‌یابی استفاده شده تشریح خواهد شد.

- 1- Radial Basis Functions
- 2- Spectral-like
- 3- Modified Shepard's Method

$$\nabla^2 u = \hat{e}_z \times \nabla \omega \text{ on } \bar{D}. \quad (۶)$$

مستلزم آن است که

$$\nabla^2 (\nabla \cdot u) = 0 \text{ on } D. \quad (۷)$$

این بدان معنی است که اگرچه تابع  $\nabla \cdot u$  لزوماً صفر نیست، متناوب هست. بنابراین در مرز  $\Gamma_D$  به مقدار حداکثر خود می‌رسد [۹، ۳۲ و ۳۶]. اکنون برای شرایط مرزی متناوب روی  $\Gamma_D$  (که به معنای مساله بدون مرز است) به دست آوردن بردار سرعت بقایی از معادله (۶) در فضای فوریه قابل استخراج است.

با توجه به مطالب گفته شده در بالا، می‌توان مراحل روش پیشنهادی را به شکل زیر خلاصه کرد:

۱- با استفاده از بردار سرعت  $u(\Omega_f)$ ، از طریق اضافه کردن سرعت‌های ناحیه  $\bar{D} \setminus \Omega_f$ ، به طوری که  $u^{BC}(\bar{D})$  شرایط مرز مستور را ارضاء کند، سرعت توسعه یافته  $u^{BC}(\bar{D})$  روی  $\bar{D}$  به دست می‌آید.

۲- تاوایی گسترش یافته  $\omega^{BC}(D) = \nabla \times u^{BC}(D)$  بر روی کل دامنه  $D$  محاسبه می‌شود.

۳- بردار سرعت بقایی نهایی  $u_{sol}(D)$  از حل معادله پواسون زیر (به توجه به متناوب بودن شرایط مرزی‌ها) حاصل می‌شود:

$$\nabla^2 (u_{sol}) = \hat{e}_z \times \nabla \omega; \quad x \in D \quad (۸)$$

۴- در صورت نیاز، بردار سرعت بقایی در ناحیه سیال (یعنی  $u_{sol}(\Omega_f)$ ) - با صرف نظر کردن از سرعت در ناحیه  $\bar{D} \setminus \Omega_f$  - می‌تواند به دست آید. در روش شبه طیفی ارائه شده در این نوشتار،  $u_{sol}(D)$  صرفاً در گام‌های بعدی مورد نیاز است.

این رویه در شکل ۲ ترسیم شده و در ادامه به عنوان الگوریتم SOL به آن ارجاع داده می‌شود. در این رویه برای ارضاء شرایط مرزی مستور دلخواه تعریف شده بر  $D$ ، سرعت اولیه  $u(\Omega_f)$  توسعه یافته، اصلاح می‌شود. تاوایی گسترش یافته  $\omega(D)$  به دست می‌آید و سپس بردار سرعت بقایی  $u_{sol}(D)$  به وسیله حل معادلات پواسون حاصل می‌شود. پرهزینه ترین گام این الگوریتم، حل معادلات پواسون است که با استفاده از یک حل گر پواسون سریع بر پایه FFT انجام می‌شود. بنابراین هزینه محاسباتی الگوریتم در مجموع از مرتبه  $\mathcal{O}(N \log N)$  یعنی بسیار سریع است.

معادله انتقال تاوایی (۱) در فضای فوریه عبارت است از

$$\begin{cases} d_t \hat{\omega} = \frac{-v|k|^2 \hat{\omega}}{\hat{L}} - \frac{(\hat{u} \cdot \nabla) \omega}{\hat{N}} \\ \hat{\omega}(k, t=0) = \hat{\omega}_0 \end{cases} \quad (۳)$$

و معادله پواسون (۲) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\hat{u} = -i \frac{k^\perp}{|k|^2} \hat{\omega} \quad (۴)$$

که  $(\cdot)^\perp$  نشان گر کمیت‌ها در فضای فوریه و  $k = (k_1, k_2)$  بردار عدد موج با قدر مطلق  $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$  و  $k^\perp = (-k_1, k_2)$  بردار عدد موج متعامد است.

## ۲-۲- اعمال شرایط مرز مستور از طریق شرایط اولیه

فرمول بندی تاوایی-سرعت امکان اعمال شرط مرزی مستور را بدون اضافه کردن صریح تابع نیرو به سمت راست معادلات فراهم می‌کند. در روش پیشنهادی سطوح جامد از طریق اصلاح مستقیم  $\hat{N}$  و  $\hat{L}$  در معادله (۳) به حل اعمال می‌شوند. ایده کلیدی عبارت است از وارد کردن بردار سرعت بقایی - که به تقریب شرایط مرزی سرعت مستور داده شده را ارضاء می‌کند - تاوایی نظیر آن به معادله (۳) در ابتدای هر گام زمانی، و سپس پیشروی حل در زمان. نشان داده خواهد شد که با پیشروی حل، مرزهای مستور به خوبی اعمال می‌شوند. رویه یافتن سرعت‌های بقایی در بخش بعد خواهد آمد؛ لیکن فعلاً با فرض موجود بودن سرعت‌های بقایی و تاوایی نظیر آنها، معادله اصلاح شده تاوایی خواهد شد:

$$\begin{cases} d_t \hat{\omega} = -v|k|^2 \hat{\omega}^{BC} - (u_{sol} \cdot \nabla) \omega^{BC}, \\ \hat{\omega}(k, t=0) = \hat{\omega}^{BC}. \end{cases} \quad (۵)$$

با انتگرال گیری از معادله بالا  $\hat{\omega}$  در گام زمان بعد به دست آمده، حل ادامه می‌یابد.

## ۲-۳- سرعت‌های بقایی ارضاء کننده شرایط مرز مستور

برای هر توزیع دلخواه تاوایی، به شرط متناوب بودن شرایط مرزی، سرعت فیزیکی (بقایی) از معادله (۲) یافتنی است (برای اطلاعات بیشتر به [۳۲ و ۳۳] مراجعه شود). در واقع، با داشتن  $\omega \in \mathcal{H}^1(D)$  حل معادله پواسون:

نیلسون [۳۹] توابع پایه را از  $r^{-p}$  که به‌وسیله شپارد [۲۷] پیشنهاد داده شده بود، به شکلی عمومی‌تر بسط دادند ( $r$  فاصله اقلیدسی از نقطه مورد میان‌یابی است و  $1 \leq p \leq 3$ )، به طوری که بتوان یک تابع چند جمله‌ای مناسب در همسایگی هر گره تعریف کرد. این اصلاحات به‌وسیله رنکا توسعه یافت [۲۹]. نسخه‌های مرتبه دوم و مرتبه سوم روش اصلاح شده ابتدا در فرترن ۷۷ به‌وسیله رنکا [۲۹] و سپس به‌وسیله تاکر و همکاران [۴۰] در فرترن ۹۵ (که به نام SHEPPACK خوانده می‌شود) تبدیل به زیربرنامه‌های مستقل شدند. در ادامه روش شپارد مرتبه سوم اصلاح شده [۲۹ و ۴۰] که در این مقاله به کار رفته است، تشریح می‌شود.

بر روی تعداد  $M$  نقطه با پراکندگی دلخواه  $\{x_i\}_{i=0}^{M-1}$  که  $x_i \in \mathbb{R}^2$  مقادیر  $f_i = f(x_i)$  داده شده‌اند. هدف ساختن تابع  $\mathcal{F}(x) \in C^2$  است در همسایگی این نقاط، به طوری که با دقت مرتبه دوم از نقاط داده شده عبور کند. برای این منظور روش اصلاح شده شپارد بسط زیر را پیشنهاد می‌کند [۲۹ و ۳۹]:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\sum_{k=1}^M w_k(x) Q_k(x)}{\sum_{k=1}^M w_k(x)} \quad (9)$$

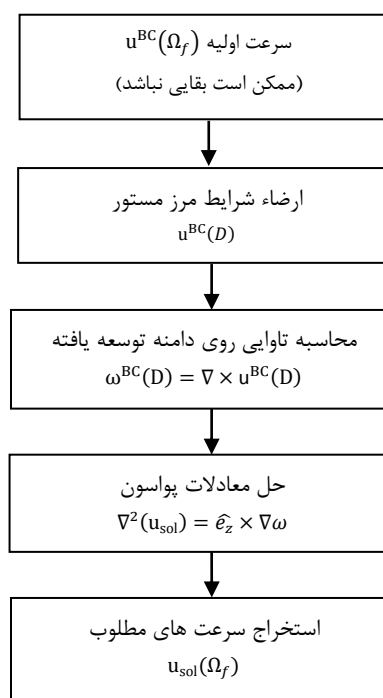
که در آن تابع وزن  $w_k$  عبارت است از:

$$w_k(x) = \left[ \frac{(R_\omega - d_k)_+}{R_\omega d_k} \right]^3 \quad (10)$$

در این روابط  $d_k(x) = \|x - x_k\|_2$  فاصله اقلیدسی بین  $x$  و  $x_k$  و متغیر  $R_\omega$  شعاع تأثیر هر نقطه  $x_k$  است. برای حصول به دقت مرتبه دوم، تابع گره‌ای  $Q_k(x)$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که چند جمله‌ای حاصل از درجه سوم باشد. بدین ترتیب برای مسائل دو بعدی داریم:

$$Q_k(x) = a_{1k}(x_1 - x_{1k})^3 + a_{2k}(x_1 - x_{1k})^2(x_2 - x_{2k}) + a_{3k}(x_1 - x_{1k})(x_2 - x_{2k})^2 + a_{4k}(x_2 - x_{2k})^3 + a_{5k}(x_1 - x_{1k})^2 + a_{6k}(x_1 - x_{1k})(x_2 - x_{2k}) + a_{7k}(x_2 - x_{2k})^2 + a_{8k}(x_1 - x_{1k}) + a_{9k}(x_2 - x_{2k}) + f_k \quad (11)$$

با این توضیح که:



شکل (۲): رویه SOL (پیدا کردن سرعت‌های بقایی).

#### ۴-۲- تعیین شرایط مرزی

در این بخش هدف استخراج مقدار  $u^{BC}$  بر روی شبکه دکارتی در لحظه  $t_0$ ، با موجود بودن میدان سرعت سیال  $u(\Omega_f)$  و بردار سرعت مرز جامد  $u(\Gamma_s)$  است. همچنین می‌خواهیم میدان سرعت به دست آمده تا حد امکان هموار باشد تا از بروز نوسانات گیبس - که سبب کاهش نرخ همگرایی سری فوریه می‌شوند - اجتناب شود. برای کاهش نوسانات گیبس از میان‌یابی RBF استفاده شده است. این رهیافت در روش‌های مرز مستور و مستغرق با موفقیت به کار رفته است [۳۷ و ۳۸]؛ به‌خصوص در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر [۲۷]. لیکن روش‌های بر پایه RBF اغلب روش‌هایی عمومی با بازده متوسط هستند. در این مقاله از یک روش خاص RBF به نام میان‌یابی شپارد استفاده شده که به دلیل سرعت آن شهرت دارد [۳۷]. ضمناً این روش دارای دقت مرتبه دوم (موضعی) است که با توجه به نرخ همگرایی کلی حل گر مورد نظر نویسندگان کافی است.

#### ۴-۲-۱- روش میان‌یابی اصلاح شده شپارد

نسخه اولیه روش میان‌یابی شپارد به عنوان یک روش وزنی فاصله معکوس<sup>۱</sup> پیشنهاد شد [۳۱]. این روش در سال‌های اخیر از نظر دقت و همواری اصلاح شده است. فرانکی و

۲- سپس مقادیر مطلوب در  $\Delta_2$  با استفاده از توابع میان‌یابی شپارد  $\mathcal{F}(x)$  به‌دست می‌آیند. این مقادیر  $u_{\text{Shep}}$  نامیده می‌شوند.

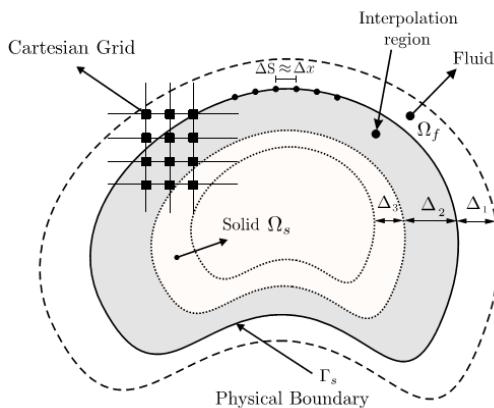
۳- نهایتاً به‌وسیله جایگزینی  $u_{\text{Shep}}$  در  $u^{\text{BC}}$  مقادیر  $u^{\text{BC}}$  به‌دست می‌آید.

بردار سرعت  $u^{\text{BC}}$  به‌دست‌آمده از فرایند بالا با مقادیر  $u$  در  $D \setminus \Omega_N$  برابر است، شرایط مرزی  $\Gamma_s$  را ارضاء می‌کند و هموار است (بر اساس تئوری میان‌یابی شپارد حداقل  $C^2$ ). در رابطه با این رویه، نکات زیر قابل توجه هستند:

۱- پس از یافتن  $Q_k(x)$  (مرحله ۱ بالا)، کل  $u^{\text{BC}}$  را می‌توان مستقیماً از میان‌یابی شپارد (به‌جای گام (۳)) به‌دست آورد. اما این امر زمان‌بر است و نتایج نیز معادل با جایگذاری  $u_{\text{Shep}}$  در بردار سرعت  $u$  خواهند بود.

۲- چنان‌که ملاحظه می‌شود، موفقیت روش در کنترل نوسانات گیبس، وابسته به موفقیت میان‌یابی شپارد در ایجاد توابع به حد کافی هموار از داده‌های ورودی سرعت است؛ که آن هم به نوبه خود وابسته به همواری سرعت در ناحیه  $\Delta_1$  یعنی ساختار جریان نزدیک مرزهای مستور جامد است. بنابراین، روش برای شبیه‌سازی جریان‌های آشفته با اعداد رینولدز زیاد که دارای ساختاری کوچک‌مقیاس هستند مناسب نیست، مگر آن‌که شبکه در نزدیکی مرز جامد به حد کافی ریز باشد.

۳- با به‌دست آمدن  $u^{\text{BC}}$  حلقه تشریح شده کامل می‌شود.



شکل (۳): نمایی از نقاط استفاده‌شده برای میان‌یابی اصلاح‌شده شپارد.

$$(R_\omega - d_k)_+ = \begin{cases} R_\omega - d_k & \text{if } d_k < R_\omega \\ 0 & \text{if } d_k \geq R_\omega \end{cases} \quad (12)$$

این توابع درجه سوم تعداد  $9\mathcal{M}$  ضریب مجهول برای  $\mathcal{M}$  معادله به‌دست می‌دهند. لذا یک مساله حداقل مربعات کلاسیک حاصل شده است که در آن تعریف تابع وزن عبارت است از:

$$\Phi_k(x_i) = \left[ \frac{(R_q - d_{ik})_+}{R_q d_{ik}} \right]^2 \quad (13)$$

رانکا و براون [۲۹] نقش  $R_q$  و  $R_w$  و اثر تغییرات آنها را بر دقت روش مطالعه و پیشنهاد کرده‌اند که مقدار این دو متغیر به‌گونه‌ای انتخاب شوند که تعداد ثابت  $N_q = 9$  نقطه گرهی و  $N_w = 30$  برای یک شبکه تقریباً مستطیلی (که مساله مطرح در این مقاله نیز به همین صورت است) پوشش داده شود. تجربه‌های نویسندگان مقاله حاضر نیز نشان داد که این مقادیر برای اهداف این پژوهش مناسب بودند.

یکی از عوامل مؤثر بر هزینه محاسبات روش، راندمان کد کامپیوتری نوشته شده است. در کار حاضر از کد SHEPPACK استفاده شده که عملکرد آن به توزیع نقاط داده‌ها وابسته است. بدترین عملکرد برای یک توزیع عمومی داده‌ها به‌دست می‌آید که از مرتبه  $\mathcal{M}^2$  است. اما به هر حال برای مسائلی که  $\mathcal{M} \ll N$  (مانند مساله حاضر)، هزینه محاسباتی این گام در مقایسه با سایر بخش‌ها قابل صرف‌نظر کردن است.

## ۲-۴-۲- استفاده از میان‌یابی اصلاح‌شده شپارد در اعمال شرایط مرز مستور

مطابق شکل ۳، در همسایگی مرز فیزیکی  $\Gamma_s$  سه ناحیه متمایز تعریف می‌شود: ناحیه سیال  $\Delta_1 \in (\Omega_f \cup \Gamma_s)$ ، ناحیه جسم جامد  $\Delta_3 \in \Gamma_s$  و ناحیه میانی  $\Delta_2$ . سرعت در نواحی  $\Delta_1$  و  $\Delta_3$  و مرز فیزیکی  $\Gamma_s$  داده‌شده است و هدف، محاسبه آن در ناحیه  $\Delta_2$  است که به‌وسیله میان‌یابی شپارد  $\mathcal{F}(x)$  به‌دست خواهد آمد. بنابر مطالب بیان‌شده در بخش قبل:

۱- در ابتدا توابع مرتبه سوم  $Q_k(x)$  با استفاده از داده‌های  $\Delta_1$  و  $\Delta_3$  و مرز فیزیکی محاسبه می‌شوند (با فرض گسسته‌سازی  $\Delta s = \Delta x$ ).

## ۲-۵- انتگرال‌گیری موازی در زمان

در کارهای قبلی نویسندگان [۲۱، ۳۱، ۳۴ و ۳۵] پیش‌روی زمانی به روش صریح RK4 انجام شده است. این روش با وجود پایداری و دقت زیاد، قابلیت موازی‌سازی به‌صورت مستقیم را نداشته، به سبب نیاز به چهار بار محاسبه تابع در هر گام زمانی، اندکی کند محسوب می‌شود. با توجه به اینکه در روش میان‌یابی شپارد استفاده‌شده در اینجا، امکان رسیدن به نرخ‌های همگرایی مکانی بالاتر از ۲ وجود ندارد، استفاده از یک روش انتگرال‌گیری زمانی با نرخ همگرایی چهارموجه نیست. لذا می‌توان انتگرال‌گیری زمانی را از روشی با قابلیت موازی‌سازی و با بازده بالاتر انجام داد.

روش‌های متنوعی برای انتگرال‌گیری زمانی می‌توان یافت که قابلیت موازی‌شدن داشته باشند. با توجه به اهداف نویسندگان، در کار حاضر از یک روش دوگامه دو مرحله‌ای صریح رانج کوتای مرتبه سوم [۱۸] استفاده شده است. در این روش، با بسط مرتبه سوم زمانی بردار جواب  $\hat{\omega}$  و سپس جایگذاری از گام‌های زمانی قبل، با تعریف  $f_n := f(\hat{\omega}_n)$  به‌دست می‌آید:

$$\hat{\omega}_{n+1} = \hat{\omega}_n + \Delta t \left[ \frac{23}{12}f_n - \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{5}{12}g_n \right] \quad (14)$$

که در آن  $g_n := f(\hat{\omega}_n - 2\Delta t f_{n-1})$  تعریف شده است.

مشاهده می‌شود که تنها به دو بار محاسبه تابع نیاز است. برای محاسبه  $f_n$  از مقادیر زمان حال استفاده می‌شود و برای محاسبه  $g_n$  از مقادیر زمان حال و یک گام قبل. بدین ترتیب این دو محاسبه از یکدیگر مستقل بوده، می‌توان آنها را به موازات هم انجام داد. لازم به ذکر است که در اولین تکرار، نیاز به یک آغازگر است که در اینجا از روش RK4 کلاسیک استفاده شده است.

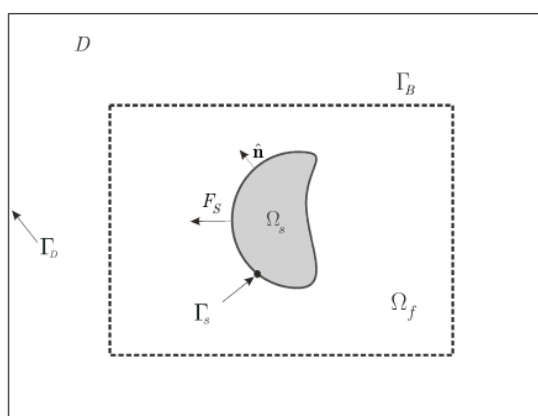
## ۲-۶- محاسبه نیروی وارد بر جسم جامد

اگر چه روش‌های مرزستور چهارچوبی انعطاف‌پذیر برای شبیه‌سازی اندرکنش جریان سیال و اجسام با هندسه پیچیده ایجاد می‌کنند؛ محاسبه نیروها بر روی مرز جامد همچنان کاری دشوار است [۴۳-۴۱] و روش‌های عمومی

اندکی در مراجع یافت می‌شود [۴۴، ۴۱ و ۴۵]. در این مقاله (تا جایی که نویسندگان اطلاع دارند) برای اولین بار، از روش انتقال مشتق لحظه‌ای<sup>۱</sup> (DMT) که به‌وسیله وو و همکاران [۴۶، ۴۴ و ۴۷] پیشنهاد شده، استفاده می‌شود.

روش DMT در اساس، توسعه روش محاسبه نیرو و اندازه حرکت با استفاده از حجم کنترل به فرمولاسیون تاوایی است. دو مزیت عمده روش عبارت‌اند از: عدم نیاز به میدان فشار و مشتقات جهتی بر روی مرزها (که خصوصاً برای جریان‌های دارای مرزهای متحرک یا تیز مزیت محاسباتی بزرگی محسوب می‌شود)؛ و عدم وابستگی مستقیم به دینامیک جریان؛ که به‌دلیل کاستن از نوسانات ناخواسته مزیت بزرگی در شبیه‌سازی دوسویه جامد-سیال محسوب می‌شود.

طبق شکل ۴ نیروها و گشتاورها با استفاده از روش انتقال مشتق لحظه‌ای (DMT) محاسبه می‌شوند. حجم کنترل با سطح کنترل ساده منظم تعریف می‌شود که به حد کافی از مرزهای جامد دور است.



شکل (۴): نیروها و گشتاورها با استفاده از روش انتقال مشتق لحظه‌ای (DMT) محاسبه می‌شوند.

با داشتن میدان‌های سرعت و فشار در لحظه  $t_n$  نیروهای آیرودینامیک یا هیدرودینامیک وارد بر جسم از معادله زیر قابل محاسبه‌اند:

$$F_s = - \oint_{\Gamma_p} (-P\hat{n} + \tau) d\Gamma, \quad (15)$$

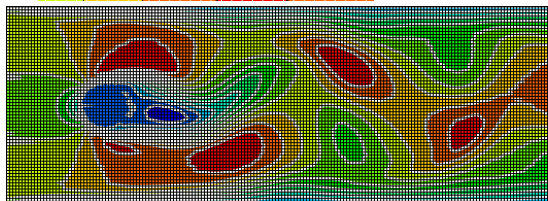
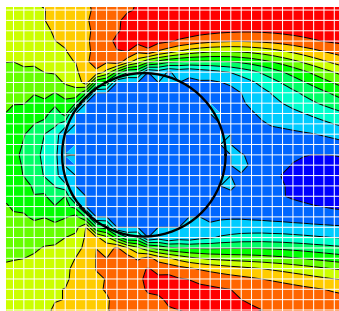
محاسبه مستقیم این انتگرال در یک جریان ناپایا حول یک جسم متحرک کاری دشوار است، حتی برای روش‌های مرز مستور یا مستغرق [۴۷ و ۴۱]. لحاظ کردن حرکت جسم جامد و ناپایا بودن جریان، در حضور نوسانات فشار و سرعت، اغلب محاسبه مستقیم انتگرال (۱۵) را با خطاهای عددی بزرگی همراه می‌کند. نتیجه آن که جستجوی روش‌های کارا برای محاسبه نیروهای آیرودینامیکی برای مدتی طولانی یک مبحث فعال تحقیقاتی بوده است. [۴۷، ۴۴ و ۴۸]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

هر چند روش پیشنهادی وو و همکاران تاکنون در روش‌های مرز مستور به کار نرفته است، در برخی کارهای عددی [۴۴] و تجربی [۴۹] دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش، مطابق شکل ۴، در ناحیه‌ای به حد کافی دور از جسم، حجم کنترلی ساده در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از روش DMT و با صرف نظر کردن از تنش برشی روی  $\Gamma_B$  و ساده‌سازی معادله نتیجه می‌شود:

محاسباتی یکنواخت {704 × 128} پوشیده شده است. شرط عدم لغزش روی سطح استوانه از روش پیشنهادی این مقاله انجام می‌پذیرد.

نمایی از یک شبکه نوعی به کاررفته در انجام شبیه‌سازی در شکل ۵ آمده است. مشاهدات نشان می‌دهد که برای اعداد رینولدز کوچک، یک جفت گردابه پشت استوانه ظاهر می‌شود. با افزایش عدد رینولدز تقارن جفت گردابه از بین می‌رود و دنباله شروع به نوسان می‌کند. برای مثال در اینجا رژیم جریان  $Re = 100$  بررسی شده است. در این رژیم جریان، یک گردابه متناوب در حال ریزش مشاهده می‌شود که با کارهای قبلی [۵۰ و ۵۱] توافق دارد. در شکل ۶ نمایه‌ای از میدان جریان نمایش داده شده است.



شکل (۵): نمایی از شبکه به کاررفته در شبیه‌سازی ریزش

گردابه پشت یک استوانه دایروی در رژیم جریان

$$. Re = 100$$

محاسبه مستقیم این انتگرال در یک جریان ناپایا حول یک جسم متحرک کاری دشوار است، حتی برای روش‌های مرز مستور یا مستغرق [۴۷ و ۴۱]. لحاظ کردن حرکت جسم جامد و ناپایا بودن جریان، در حضور نوسانات فشار و سرعت، اغلب محاسبه مستقیم انتگرال (۱۵) را با خطاهای عددی بزرگی همراه می‌کند. نتیجه آن که جستجوی روش‌های کارا برای محاسبه نیروهای آیرودینامیکی برای مدتی طولانی یک مبحث فعال تحقیقاتی بوده است. [۴۷، ۴۴ و ۴۸]

هر چند روش پیشنهادی وو و همکاران تاکنون در روش‌های مرز مستور به کار نرفته است، در برخی کارهای عددی [۴۴] و تجربی [۴۹] دیگر مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش، مطابق شکل ۴، در ناحیه‌ای به حد کافی دور از جسم، حجم کنترلی ساده در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از روش DMT و با صرف نظر کردن از تنش برشی روی  $\Gamma_B$  و ساده‌سازی معادله نتیجه می‌شود:

$$F_s = \rho \frac{d}{dt} \oint_{\Omega_s} u_s d\Omega - \frac{\rho}{k} \oint_{\Omega_f} \left( x \otimes \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) d\Omega_f \quad (16)$$

$$\rho \oint_{\Omega_f} (x \otimes u) d\Omega_f - \frac{\rho}{k} \oint_{\Gamma_B} x \otimes \hat{n} \otimes (\omega \otimes u) d\Gamma_B$$

در این معادله  $\omega = \nabla \otimes u$  تاوایی است. ملاحظه می‌شود که معادله (۱۶) هیچ مشتق جهتی در خود ندارد. بنابراین به سادگی می‌تواند بر هندسه‌های متحرک پیچیده اعمال شود. علاوه بر آن فشار در معادله حضور ندارد. این امر به خصوص به خاطر طبیعت نوسانی فشار، به ویژه در همسایگی مرزهای جامد، مهم است.

ذکر این نکته لازم است که در استخراج معادله (۱۶) از تنش برشی بر روی حجم کنترل صرف نظر شده است. این تقریب می‌توان منشأ برخی خطاهایی باشد که در بخش تجربیات عددی به آن اشاره خواهد شد.

### ۳- تجربیات عددی

برای نشان دادن قابلیت روش ارائه شده، در این بخش روش به مرزهای ساکن و متحرک اعمال می‌شود.

#### ۳-۱- استوانه ساکن در جریان سیال

استوانه‌ای به قطر D در کانالی مستطیلی به ابعاد



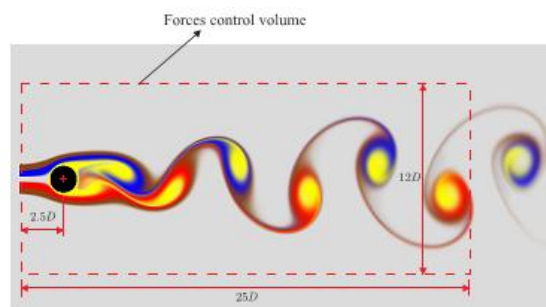
**جدول (۱):** مقایسه عدد اشتروهاال و ضرایب برآ و پسا

استوانه دایروی در  $Re = 100$  با داده‌های مرجع.

مرجع [۵۱]	مرجع [۵۰]	کار حاضر	
1.35±0.01	1.38±0.01	1.33±0.015	ضریب برآ
±0.339	± 0.337	± 0.3	ضریب پسا
0.165	0.166-0.169	0.168	عدد اشتروهاال

در خصوص دلایل وجود اختلاف‌های قابل‌مشاهده در این جدول، بین داده‌های تحقیق حاضر و نتایج مرجع، می‌توان اختلاف در ابعاد دقیق دامنه محاسباتی، اختلاف در مرتبه‌دقت اعمال شرط مرزی‌های مستور و نهایتاً اختلاف در روش محاسبه نیروها را ذکر کرد. همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، وجود تنش برشی بر روی سطح کنترل محاسبه نیروها باعث بروز خطایی در محاسبه نیرو می‌شود. همچنین اعمال مرتبه اول شرط مرزی‌های مستور در روش حاضر باعث بروز خطا در محاسبه تاوایی تولیدشده بر روی مرز و لذا نیروها خواهد شد. به هر حال باید توجه کرد که روش حاضر، از نظر راندمان محاسباتی برتری چشمگیری بر روش‌های فوق‌الذکر دارد. و همچنین اعمال مرتبه اول شرط مرزی باعث انعطاف‌پذیری محاسبات و امکان اعمال آن به هندسه‌های پیچیده‌تر می‌شود که بهای آن هم خطایی در حد ۱۰ درصد در محاسبه نیروها، خصوصاً نیروی پسا است.

همان‌گونه که شکل ۷ دیده می‌شود، دنباله پس از توسعه یافتن، به تدریج نوسانی خواهد شد. این پدیده در طبیعت به دلیل تحریک شدن جریان سیال (که در اعداد رینولدز زیاد ناپایدار است) توسط اغتشاشات تصادفی خارجی اتفاق می‌افتد. در شبیه‌سازی‌های کامپیوتری، بدون وجود اغتشاشات خارجی و با توجه به متقارن بودن هندسه و شرط مرزی‌ها، تحریک جریان سیال تنها به دلیل وجود خطاهای عددی انجام می‌شود. لذا در محاسبات غیر دائم، مقایسه زمان لازم برای هارمونیک شدن نوسانات دنباله  $T_h$  به‌عنوان کمیتی که هم وابسته به دقت کلی حل‌گر و هم هندسه و ابعاد دامنه محاسباتی است، چندان مرسوم نیست. به هر حال از آنجایی که در حل‌های دائم مهندسی، اغلب زمان همگرایی به جواب، معادل با زمان همگرایی ضریب پسا در نظر گرفته می‌شود، این کمیت در جدول ۲ با سایر داده‌های مرجع مقایسه شده است.



شکل (۶): نمایه‌ای از جریان و حجم کنترل به‌کاررفته در محاسبه نیروها در ریزش گردابه پشت یک استوانه دایروی در  $Re = 100$ .

در این شکل برای افزایش وضوح جریان ۴ خط رنگ اضافه شده‌اند. برای آن‌که امکان مقایسه کمی وجود داشته باشد از عدد اشتروهاال استفاده می‌شود.

$$St = \frac{fD}{\bar{U}} \quad (18)$$

که  $f$  بسامد گردابه پشت استوانه است. در جدول ۱ عدد اشتروهاال به‌دست‌آمده با نتایج دیگر مراجع مقایسه شده است که نشان‌دهنده توافق خوب بین نتایج مقاله حاضر و کارهای قبلی است. همچنین در شکل ۷ تاریخچه ضرایب برآ و پسا:

$$C_D = \frac{2F_D}{U_{max}^2 D}, C_L = \frac{2F_L}{U_{max}^2 D} \quad (19)$$

نشان داده‌شده است که در این تعریف:  $F_L = F_{x2}, F_D = F_{x1}$ . نیروها با استفاده از حجم کنترل نشان داده‌شده در شکل ۵ محاسبه شده‌اند. حجم کنترل با به‌صورت سعی و خطا به نحوی انتخاب شده که مقدار کل تنش برشی بر روی سطح کنترل (که معیاری از مقدار خطا در محاسبه نیرو است) حتی‌الامکان کم باشد:

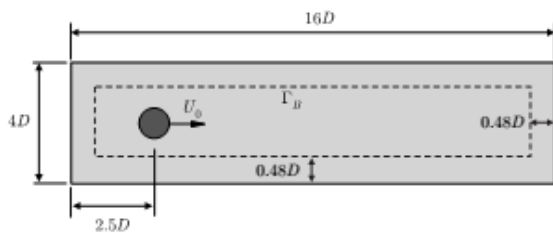
$$\|\tau\|_{\infty} = \frac{1}{\bar{F}_D} \max\left\{\int_{\Gamma_B} (\tau d\Gamma_B) \hat{e}_1\right\} < 10^{-4} \quad (20)$$

در این محاسبات مرزها ثابت هستند در نتیجه اغتشاشی در نیروها مشاهده نمی‌شود، و لذا هموارسازی نیروها نیازی نبوده است.

ضرایب به‌دست‌آمده در مقایسه با نتایج دیگر محققان [۵۰ و ۵۱] در جدول ۱ آمده است. می‌توان دید که نتایج با داده‌های مرجع انطباق نسبی دارند.

مطابق شکل (۹)، استوانه‌ای به قطر  $D$  از زمان  $t = 0^+$  به بعد با سرعت ثابت  $U_0$  در یک سیال ساکن حرکت می‌کند. در این مسئله عدد رینولدز به صورت  $Re = \frac{U_0 D}{\nu} = 40$  تعریف می‌شود. دامنه محاسباتی  $(l_1 \times l_2) = (16D \times 4D)$  با شبکه یکنواخت  $\{512 \times 128\}$  پوشانده شده است. شرط عدم لغزش روی همه دیواره‌ها اعمال می‌شود. گام زمانی  $\Delta t = 5 \times 10^{-2} s$  و لزجت  $\nu = 0.025$  در نظر گرفته می‌شود که  $Re = \frac{U_0 D}{\nu} = 40$  را نتیجه می‌دهد.

یک نمایه از جریان محاسبه شده، در لحظه  $t = 4s$ ، در سمت چپ شکل (۱۰) نشان داده شده است. نیروهای پسا با استفاده از روش DMT توضیح داده شده در بخش‌های قبل محاسبه شده است. حجم کنترل‌های متفاوت امتحان شده-اند و نهایتاً نیروی پسای مربوط به حجم کنترل  $(15.4D \times 3.4D)$ ، مطابق شکل (۹)، گزارش شده است.



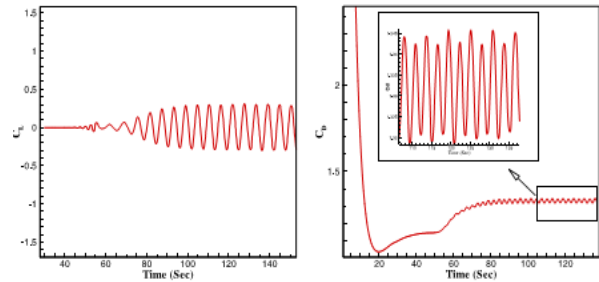
شکل (۹): هندسه مساله استوانه دایروی با حرکت ناگهانی پیش فرض، به همراه حجم کنترل محاسبه نیروها.

در این حجم کنترل، تنش‌های برشی صرف نظر شده دارای اندازه بهنجار شده زیر بوده‌اند:

$$\|\tau\|_{\infty} = \frac{1}{F_D} \left\| \int_{\Gamma_B} (\tau d\Gamma_B) \hat{e}_1 \right\| < 10^{-2}, \quad (21)$$

که کمیت بهنجارسازی  $\bar{F}_D$  نیروی پسای متوسط در لحظه  $t = 4s$  است. برای این نمونه محاسباتی، مقادیر کوچک‌تری حاصل نشد.

در سمت راست شکل (۱۰)، نیروها نمایش و با داده‌های مرجع [۵۵] مقایسه شده‌اند. نتایج نشان‌گر مشکلی است که کامیاب برای تمام روش‌های مرز مستور در هنگام شبیه‌سازی مسائل با مرز متحرک پیش می‌آید، یعنی بروز نوساناتی در نیروی محاسبه شده [۵۶، ۵۷]، هر چند ذکر این نکته نیز مهم است که نوسانات منجر به خطای سیستمی نمی‌شوند و مقادیر متوسط توافق خوبی با داده‌های مرجع دارند.

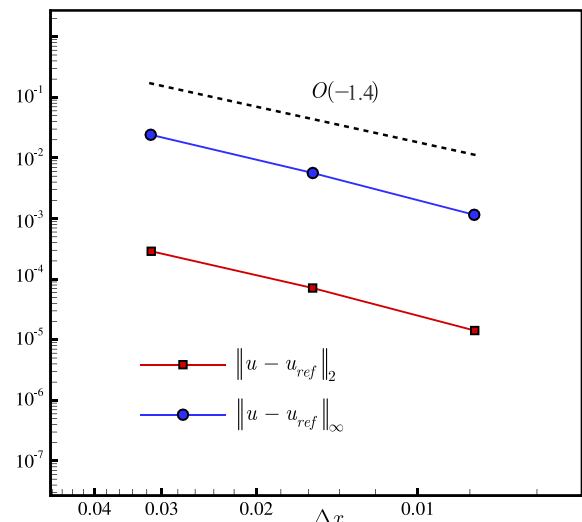


شکل (۷): تاریخچه ضرایب برآ و پسای استوانه دایروی در  $Re = 100$

جدول (۲): زمان هارمونیک شدن نوسانات دنباله  $T_h$  برای رژیم جریان  $Re = 100$  در مقایسه با سایر مراجع.

$T_h$	کار حاضر	مرجع [۹]	مرجع [۵۱]	مرجع [۱۱]
	110s	>100s	100s	110s

در نهایت همان‌گونه که شکل ۸ نشان می‌دهد، نرخ همگرایی حل با استفاده از سه شبکه  $\{704 \times 128\}$  و  $\{352 \times 64\}$  و  $\{176 \times 32\}$  تخمین زده شد. نرخ همگرایی برای مؤلفه عمودی سرعت، با توجه به حساسیت بیشتر آن نسبت به مؤلفه افقی، و برای یک زمان یکسان، با معیار قرار دادن حل بر روی شبکه محاسبه شده است.



شکل (۸): نرخ همگرایی مکانی مسئله استوانه ساکن برای رژیم جریان  $Re = 100$

### ۳-۲- استوانه متحرک با حرکت ناگهانی اجباری

به‌عنوان مثالی از مرز متحرک با حرکت پیش فرض، استوانه متحرک با حرکت ناگهانی در نظر گرفته می‌شود.

تأثیر گرانش با شتاب  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_2$  است که بردار واحد در جهت  $\gamma$  است. با صرف‌نظر کردن از حرکت چرخشی، به‌دست می‌آید [۵۸].

$$\begin{aligned} X_{CM}^{n+1} &= X_{CM}^n + V_{CM}^n + V_{CM}^n \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{F}}{m_s} + G \right)^n \Delta t^2 \\ X_{CM}^{n+1} &= X_{CM}^n + \left( \frac{\bar{F}}{m_s} + G \right)^n \Delta t \end{aligned} \quad (22)$$

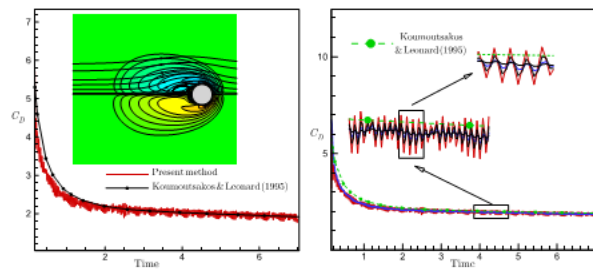
که  $\bar{F}$  نیروی کل هموارشده ناشی از سیال،  $m_s$  جرم استوانه، CM مرکز جرم استوانه و  $G = \left( \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_s} \right) g \hat{\mathbf{e}}_2$  شتاب تصحیح‌شده شناوری است. وقتی سرعت استوانه به سرعت حد  $V_t$  میل می‌کند، نیروی کل وارد بر استوانه به سمت صفر میل می‌کند. در این رژیم جریان، سرعت ثابت است و می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} \rho_s D C_D V_t^2 = g (\rho_s - \rho_f) \frac{\pi D^2}{4} \quad (23)$$

این بدان معنی است که نیروی پسا با وزن ظاهری به تعادل رسیده است. از آنجا که در این وضعیت سرعت ثابت است، ضریب پسا می‌تواند از ضرایب پسای حالت پایدار تخمین زده شود.

نمایه‌ای از جریان در سمت چپ شکل ۱۱ نمایش داده شده است. دامنه محاسباتی  $(15D \times 15D)$  با شبکه  $(513 \times 2049)$  پوشانده شده است. با انتخاب  $\nu = 0.03926$  می‌توان ضریب پسا را به صورت  $(CD)_t = 0.69$  تخمین زد که نتیجه آن عدد رینولدز حد  $(Re)_t = 85$  است که به معنای  $V_t = 3.34 \text{ m/s}$  است.

انتگرال‌گیری زمانی با گام ثابت  $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$  به‌منظور یافتن  $\Gamma_B$  و  $\alpha$  مناسب انجام شد. پس از انجام عملیات سعی و خطا، نتایج برای  $\Gamma_B$  و  $\alpha = 0.08$  نمایش داده شده در سمت چپ شکل (۱۱)، سرعت حد  $(V_t)_{computed} = 3.44 \text{ m/s}$  به‌دست می‌آید که حدود ۳ درصد بیش از مقدار تخمین نظری است.



شکل (۱۰): چپ: نمایه‌ای از الگوی جریان و ضرایب پسا بدون هموارسازی. راست: تأثیر  $\alpha$  بر هموارسازی.

همان‌گونه که لو و همکاران اشاره کرده‌اند، این نوسانات ناشی از عدم ارضای پیوستگی در هر گام زمانی است. بدین ترتیب با توجه به الگوریتم مورد استفاده در روش‌های مرزستور، این نوسانات تابع اندازه گام زمانی و همچنین تراکم فضایی شبکه محاسباتی بوده لیکن هیچ‌گاه به‌طور کامل قابل حذف نیستند [۵۷].

در همین شکل، اثر هموارسازی روی نیروهای محاسبه‌شده نیز ملاحظه می‌شود. نتایج برای سه مقدار مختلف  $\alpha = 0.5, 0.1, 0.2$  ترسیم شده، و با داده‌های خام مقایسه شده‌اند. در این شکل، رنگ قرمز نشان‌دهنده مقادیر فیلتر نشده، و رنگ قهوه‌ای برای کمیت‌های با  $\alpha = 0.5$  و آبی برای  $\alpha = 0.1$ ، و نهایتاً سیاه برای  $\alpha = 0.2$  هستند. برای مقادیر بزرگ‌تر  $\alpha$  داده‌های هموار با نمودار ناپایایی داده‌های خام در زمان کمتر از 1.5s برابر دوره تناوب به‌خوبی همخوانی ندارند. اما هموارسازی چندان به مقدار  $\alpha$  حساس نیست به‌طوری‌که با  $0.18 \leq \alpha \leq 0.22$  برای مقادیر بزرگ‌تر  $\alpha$  داده‌های هموارشده نمی‌توانند ناپایداری داده‌های خام را در ۱/۵ برابر دوره تناوب، به‌خوبی دنبال کنند.

### ۳-۳- استوانه افتان در سیال

سقوط ذرات استوانه‌ای شکل در یک سیال ساکن یکی از مسائل کلاسیک اندرکنش دوسویه سیال-جسم جامد است. این مساله بارها به‌صورت عددی و تجربی تحلیل شده است (به [۵۳ و ۵۴] و مراجع آنها مراجعه شود).

یک استوانه همگن دایروی به قطر  $D$  و چگالی  $\rho_s$  در سیال نیوتنی با چگالی  $\rho_f = \frac{\rho_s}{2}$  قرار دارد. سامانه تحت

برای شبکه  $\{128 \times 128\}$  نشان داده و حل‌های متوالی و موازی با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

چنانکه جدول ۳ نشان می‌دهد، زمان اجرای کد در حالت موازی (با دو پردازنده) بیش از ۳۰ درصد از حالت متوالی کمتر است.

**جدول (۳):** مقایسه کد مرتبه سه در دو حالت متوالی و موازی زمانی. محاسبات با دو پردازنده انجام شده.

تسریع	زمان اجرا		خطا	گام زمانی بر حسب ثانیه
	موازی	متوالی		
1.39	25.7	35.8	$1.29E - 8$	$5E - 5$
1.37	13.53	18.51	$1.41E - 8$	$1E - 4$
1.09	5.08	5.55	$2.26E - 7$	$5E - 4$
1.14	3.24	3.69	$2.24E - 5$	$1E - 3$

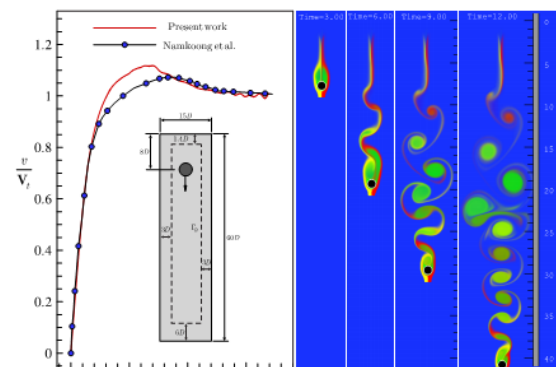
#### ۲-۴- هم‌روندی<sup>۱</sup>

از آنجا که محاسبه سرعت در هر یک از بعدها مستقل از یکدیگر است، و همچنین شرط مرزی‌های مستور به صورت مستقل از همدیگر قابل محاسبه هستند، لذا می‌توان در محاسبه سرعت‌ها نیز موازی‌سازی انجام داد. البته در کار حاضر به دلیل کمبود تعداد پردازنده‌ها، این عمل به صورت توأم با سایر موازی‌سازی‌ها انجام نشده است. اما به هر حال برای نشان دادن امکان این موازی‌سازی، در جدول ۴ نتایج موازی‌سازی محاسبه سرعت‌ها به تنهایی آمده است. چنانکه جدول نشان می‌دهد، در این نوع از موازی‌سازی نیز در حدود ۳۰ درصد سرعت حل افزایش یافته است. بدین ترتیب می‌توان پیش‌بینی کرد که در صورت اجرای کد با چهار پردازنده، زمان حل حدوداً ۶۰ درصد کاهش یابد.

**جدول (۴):** مقایسه نتایج کد مرتبه سوم در دو حالت

محاسبات متوالی و هم‌روند شده

تسریع	زمان اجرا		زمان اجرا
	موازی	متوالی	
1.3	27.63	35.8	$5.E - 5$
1.22	15.19	18.51	$1.E - 4$
1.17	4.76	5.55	$5.E - 4$
1.09	3.38	3.69	$1.E - 3$



**شکل (۱۱):** چپ: مؤلفه عمودی سرعت استوانه افتان با نتایج مرجع [۵۴] مقایسه شده است. راست: چهار نمایه از جریان.

همچنین در سمت راست شکل، چهار نمایه از جریان برای چهار لحظه زمانی متفاوت یعنی  $t=3, 6, 9, 15$  ثانیه نمایش داده شده‌اند. برای نمایش بهتر جریان، دورگه رنگ متحرک در جلوی استوانه قرار داده شده است. همچنین مقیاس خط-کش،  $D$  است. مشاهده می‌شود که الگوی جریان با الگوی جریان سیال ساکن کاملاً متفاوت است (مراجعه شود به [۵۸]).

تجربیات عددی نشان دادند که استفاده از مقادیر کوچک‌تر  $\alpha$  بدون تأثیر محسوس در نتایج امکان‌پذیر است. به علاوه سرعت بالاسری به دست آمده در این جا، بیش از داده‌های نامکونگ و همکاران، می‌تواند ناشی از خطا در محاسبه نیرو باشد. باید توجه کرد که داده‌های نامکونگ و همکاران از یک حل مرتبه بالاتر بر روی یک دامنه محاسباتی بزرگ‌تر به دست آمده است. اما این حد از خطا برای بسیاری از مقاصد عملی قابل قبول است.

#### ۴- محاسبات موازی

بر اساس مطالب بیان شده در بخش‌های قبلی، الگوریتم پیشنهادی توانایی موازی شدن هم در زمان و هم در فضا را دارد. ترکیب این دو موازی‌سازی ضرایب تسریع محاسبات خوبی نتیجه خواهد داد. در این بخش مختصراً به این موارد پرداخته شده است.

#### ۱-۴- موازی‌سازی انتگرال‌گیری زمانی

انتگرال‌گیری زمانی حل گر شبه‌طیفی موجود اصلاح شده، از متوالی به موازی تبدیل شد. تجربیات عددی متنوعی بر روی حل گر موازی شده انجام شد که جدول ۳ نتایج را

Structure Interaction Problems”, J. Comput. Phys., Vol. 229 (18), pp. 6427 – 6449, 2010.

6. Mittal, R., and Iaccarino, G. “Immersed Boundary Methods”, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 3, pp. 239-261, 2005.
7. Russell, D. and Jane Wang, Z., “A Cartesian Grid Method for Modeling Multiple Moving Objects in 2D Incompressible Viscous Flow”, J. Comput. Phys., Vol. 191, pp. 177–205, 2003.
8. Keetels, G. H., D’Ortona, U., Kramer, W., Clercx, H. J. H., Schneider, K., and Van Heijst, G. J. F. “Fourier Spectral and Wavelet Solvers for The Incompressible Navier–Stokes Equations With Volume-penalization: Convergence of a Dipole–wall Collision”, J. Comput. Phys., Vol. 227, pp. 919–945, 2007.
9. Calhoun, D. “A Cartesian Grid Method for Solving The Streamfunction-vorticity Equations in Irregular Geometries,” PhD. Dissertation, University of Washington, 1999.
10. Kolomenskiy, D. and Schneider, K. “A Fourier Spectral Method for The Navier–Stokes Equations With Volume Penalization for Moving Solid Obstacles”, J. Comput. Phys., Vol. 228, pp. 5687–5709, 2009.
11. Wang, Z., Fan, J., and Cen, K. “Immersed Boundary Method for The Simulation of 2D Viscous Flow based on Vorticity–velocity Formulations”, J. Comput. Phys., Vol. 228, pp. 1504–1520, 2009.
12. Sabetghadam, F. and Shajari Ghasemkheili, A. “Using The Method of Inverse Problems in Implementing the Solid Immersed Boundaries on Vorticity-Streamfunction Formulation of the Incompressible Viscous Fluid Flow”, Modarres Mech. Eng., Vol. 17, No. 10, pp. 397-404, 2017 (in Persian).
13. Badri, M. A. and Sabetghadam, F. “Implementation of Rigid Solid Boundaries to the Vorticity-Stream Function Formulation of Incompressible Navier-Stokes Equations by Time Dilation”, Modarres Mech. Eng., Vol. 19, no. 5, pp.1241-1252, 2019 (in Persian).
14. Jause-Labert, C., Godefert, F. S., and Favier, B. “Numerical Validation of The Volume Penalization Method in Three-dimensional Pseudo-spectral Simulation”, J. Comput. Fluid., Vol. 67, pp. 41-56, 2012.
15. Intel, Math Kernel Library (MKL), <http://www.intel.com/software/products/mkl/>

CUDA FFT library,  
<https://www.developer.nvidia.com/cuFFT>.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی عددی برای شبیه‌سازی اندرکنش دوسویه یک جسم جامد با یک سیال نیوتونی ارائه شد. روش پیشنهادی به‌طور کامل در فرمول‌بندی تاوایی-تابع جریان و با اعمال روش مرز‌مستور به آن بنا شده است. همچنین محاسبه نیروها در هر لحظه با استفاده از یک روش انتگرالی تاوایی-پایه انجام شده که دارای حسن بزرگ عدم نیاز به محاسبه فشار است. در ابتدای هر گام زمانی مرزهای مستور با استفاده از میان‌یابی‌های مرتبه دوم توابع شعاعی شپارد محاسبه شده، به معادلات دینامیک تاوایی اعمال می‌شوند. روش به‌گونه‌ای طراحی شده است که شرایط مرزی سرعت از یکدیگر مستقل هستند و در نتیجه به‌سادگی می‌توان کل الگوریتم را موازی‌سازی کرد. انتگرال‌گیری زمانی با استفاده از یک روش رانج-کوتای مرتبه دوم موازی‌سازی شده انجام شده و بدین ترتیب حل‌گر دارای بازده محاسباتی بسیار بالایی است؛ به‌طوری‌که انجام شبیه‌سازی‌های دوبعدی زمان‌واقعی را امکان‌پذیر کرده است. روش پیشنهادی بر روی چند مسئله نوعی با مرزهای جامد ثابت و متحرک اعمال و دقت و بازده روش مورد بحث قرار گرفته است.

## ۶- مراجع

1. Razaghi, M., “A Smart Computational Grid Around a Three-dimensional Moving Body”, Fluid Mechanics and Aerodynamics Journal, Vol. 7, No. 2, pp. 73-88, 2019.
2. Griffith, B. E. and Peskin, C. S., “On The Order of Accuracy of the Immersed Boundary Method: Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems”, J. Comput. Phys., Vol. 208, No. 75, 2005.
3. Taira, K. and Colonius, K. “The Mmmerged Boundary Method: a Projection Approach”, J. Comput. Phys., Vol. 225, No. 2, pp. 2118-2137, 2007.
4. Fadlun, E. A., Verzicco, R., Orlandi, P., and Mohd-Yusofz, J. “Combined Immersed-Boundary Finite-difference Methods for Three-dimensional Complex Flow Simulations J. Comput. Phys., Vol. 161, pp.35–60, 2000.
5. Vanella, M., Rabenold, P., and Balaras, E., “A Direct-forcing Embedded-boundary Method with Adaptive Mesh Refinement for Fluid–

29. Sabetghadam, F., Soltani, E., and Ghasemi, H. "A Fast Immersed Boundary Fourier Pseudo-Spectral Method for Simulation of the Incompressible Flows", *Int. J. Eng. Educ.*, Vol. 27, pp. 1457-1466, 2014.
30. Shepard, "A Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly-Spaced data", 23<sup>rd</sup> Int. Conf. ACM National (ACM '68), P. 517-524, 1968.
31. Quartapelle, L. "Numerical Solution of The Incompressible Navier-Stokes Equations", Birkhauser-Verlag, Basel, 1993.
32. Rempfer, D. "On Boundary Conditions for Incompressible Navier-Stokes Problems", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 59, p.107, 2006.
33. Sabetghadam, F., Badri, M., Sharafatmandjoo, S., and Kor, H. "Pseudospectral Solution of 2D Incompressible Flow in Moving Immersed Boundary", 10th Iranian Aerospace Committee Conference, Iran, Tehran, 2011(in Persian).
34. Sabetghadam, F. and Soltani, E. "Simulation of Solid Body Motion in a Newtonian Fluid Using a Vorticity-based Pseudo-spectral Immersed Boundary Method Augmented by The Radial Basis Functions", *Int. J. Mod. Phys.*, Vol. 26, p. 1550, 2015.
35. Quartapelle, L. "Vorticity Conditioning in The Computation of Two-dimensional Viscous Flow", *J. Comput. Phys.*, Vol. 40, pp. 453-477, 1981.
36. Chinchapatnam, P. P., Djidjeli, K., and Nair, P. B. "Radial Basis Function Meshless Method for The Steady Incompressible Navier-Stokes Equations", *Int. J. Comput. Math.*, Vol. 84, pp. 1509-1526, 2007.
37. Larsson, E. and Fornberg, B. "A Numerical Study of Some Radial Basis Function Based Solution Methods for Elliptic PDEs", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 46, pp. 891-902, 2003.
38. Franke, R. and Nielson, G. "Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp. 1691-1704, 1980.
39. Thacker, W. I., Zhang, J., Watson, L. T., Birch, J. B., Iyer, M. A., and Berry, M. W. "Algorithm 905: SHEPPACK: Modified Shepard Algorithm for Interpolation of Scattered Multivariate Data", *ACM Transactions on Mathematical Software*, (TOMS) Vol.37, no. 3, pp. 1-20.
40. Balaras, E. "Modeling Immersed Boundaries Using an External Force Field on Fixed Cartesian Grids in Large-eddy
16. Weinane, E. and Jian-Guol, L. "Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes", *J. Comput. Phys.*, Vol. 124, pp. 368-382, 1996.
17. Van Der Houwen, P. J., Sommeijer, B. P., and Van Mourik, P. A. "Note on Explicit Parallel Multistep Runge-Kutta Methods", *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 27, pp. 411-420, 1989.
18. Peskin C. S. "The Immersed Boundary Method", *Acta Numer.*, Vol. 11, pp. 479-518, 2002.
19. Sjögreen, B. and Petersson, N. A. "A Cartesian Embedded Boundary Method for Hyperbolic Conservation laws", *Comm. Comp. Phys.*, Vol. 2, pp. 1199-1219, 2007.
20. Sabetghadam, F., Sharafatmandjoo, S., and Norouzi, F. "Fourier Spectral Embedded Boundary Solution of the Poisson's and Laplace Equations with Dirichlet Boundary Conditions", *J. Comput. Phys.*, Vol. 228, pp. 55-74, 2009.
21. Lee, L. and Leveque, R. J. "An Immersed Interface Method for The Incompressible Navier-Stokes Equations, SIAM", *J. of Scientif. Comput.*, Vol. 25, p. 832, 2003.
22. Liang, A., Jing, X., and Sun, X., "Constructing Spectral Schemes of The Immersed Interface Method via a Global Description of Discontinuous Functions", *J. Comput. Phys.*, Vol. 227, no.18, pp. 8341-8366, 2008.
23. Boyd, J. P. "A Comparison of Numerical Algorithms for Fourier Extension of The First, Second, and Third Kinds", *J. Comput. Phys.*, Vol. 178, pp. 118-160, 2002.
24. Gottlieb, D. and Orszag, S. A. "Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, P. 35, 1977.
25. Tadmor, E. "Filters, Mollifiers and The Computation of The Gibbs Phenomenon", *Acta Numerica*, Vol. 16, pp. 305-378, 2007.
26. Fang, J., Diebold, M., Higgins, C., and Parlange, M. B. "Towards Oscillation-free Implementation of The Immersed Boundary Method With Spectral-like Methods", *J. Comput. Phys.*, Vol. 230, p. 8179, 2011.
27. Wang, Q., Moin, P., and Iaccarino, G. "A High Order Multivariate Approximation Scheme for Scattered Data Sets", *J. Comput. Phys.*, Vol. 229, No.18, pp. 6343-6361, 2010.
28. Renka, R. J. and Brown, R. "Algorithm 792: Accuracy Tests of ACM Algorithms for Interpolation of Scattered Data in the Plane" *ACM Transactions on Mathematical Software*, 25 (1999), pp. 78-94.

50. Liu, C., Zheng., X., and Sungz, C. H. "Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 139, P. 139, 1998
51. Sabetghadam, F., Eskandari, A., Azami, A., and Jalinous, S. "A Stabilized Explicit Direct-forcing Immersed-boundary Method for the Simulation of Incompressible Newtonian Fluid Flow Around Deformable Moving Bodies", *Int. J. Mod. Phys.*, Vol. 18, p. 46, 2016.
52. Horowitz, M. and Williamson, C. H. K. "Vortex-induced vibration of a rising and falling cylinder", *J. Fluid Mech.*, Vol. 658, pp. 1-32, 2010.
53. Namkoong, K., Yoo, J. Y., and Choi, H. G. "Numerical Analysis of Two-dimensional Motion of a Freely Falling Circular Cylinder in an Infinite Fluid", *J. Fluid Mech.*, Vol. 604, pp. 33-53, 2008.
54. Koumoutsakos, P. and Leonard, A. "High-resolution Simulations of The Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods", *J. Fluid Mech.*, Vol. 296, p. 1, 1995.
55. Liao, C., Chang, Y., Lin, C., and Mc Donough, J. M. "Simulating Flows With Moving Rigid Boundary Using Immersed-boundary Method", *J. of Computational Fluids*, Vol. 39, P. 152, 2010.
56. Luo, H., Dai., H., Ferreira de Sousa P., and Yin, B. "On Numerical Oscillation of the Direct-Forcing Immersed-boundary Method for Moving Boundaries", *J. of Computers and Fluids*, Vol. 56, PP. 61-76, 2012.
57. Ghaari, S. A., Schneider, K., Viazzo, S., and Bontoux, V. "An Efficient Algorithm for Simulation of Forced Deformable Bodies Interacting With Incompressible Flows; Application to Fish Swimming", 11th World Congress on Computational Mechanics, pp. 787-798, Barcelona, Spain, 2014.
58. Liu, C., Zheng., X., and Sungz, C. H. "Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows", *Computers and Fluids*, Vol. 33, pp. 375-404, 2004.
41. Sugiyama, K., Ii, S., Takeuchi, S., Takagi, S., and Matsumoto, Y. "A Full Eulerian Finite Difference Approach for Solving Fluid-structure Coupling Problems", *J. Comput. Phys.*, Vol. 230, pp. 596-627, 2011.
42. Fadlun, E. A., Verzicco, R., Orlandi, P., and Mohd-Yusof, J. "Combined Immersed Boundary Finite-difference Methods for Three-dimensional Complex Flow Simulations", *J. Comput. Phys.*, Vol. 161, p. 35, 2000.
43. Wu, J. Z., Lu, X. Y., and Zhuang, L. X. "Integral Force Acting on a Body Due to Local Flow Structures", *J. Fluid Mech.*, Vol. 576, p. 265, 2007.
44. Noca, F., Shiels, D., and Jeon, D. "A Comparison of Methods for Evaluating Time Dependent Flow Dynamic Forces on Bodies, Using Only Velocity Fields and Their Derivations, *J. Fluid. Struct.*", Vol. 13, p. 551, 1999.
45. Wu, J. Z. H., Pan, Z. L., and Lu, X.Y. "Unsteady Fluid Dynamic Force Solely in Terms of Control-surface Integral", *Physics fluids*, Vol. 17, p. 98, 2005.
46. Wu, J. Z., Lu, X. L. , Yang, Y., and Zhang, R. "Vorticity Dynamics in Complex of Diagnosis and Management", (P.Y. Chou Memorial Lecture at 13th Asian Congress Fluid Mechanics Dhaka, Bangladesh, Dec. 2010, P. 17.).
47. Seo, J. H., and Mittal, R. "A Sharp-interface Immersed Boundary Method With Improved Mass Conservation and Reduced Spurious Pressure Oscillations", *J. Comput. Phys.*, Vol. 230, p. 7347, 2011.
48. Mohebbian, A. and Rival, D.E. "Assessment of The Derivative-moment Transformation Method for Unsteady-load Estimation", *Experimental Fluids*, Vol. 53, p. 319, 2012.
49. Linnick, M. and Fasel, H. "A High Order Interface Method for Simulating Unsteady Incompressible Flows on Irregular Domains", *J. Comput. Phys.*, Vol. 204, pp. 157-192, 2005.