

ردیابی مسیر زمانی ربات چرخ دار با استفاده از روش های غیرخطی

پسگام و مد لغزشی

محمد رضا سلطانپور 

۱- دانشکده مهندسی برق، دانشگاه هوایی شهید ستاری
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۱۳)

چکیده

ربات پایه متحرک چرخ دار با رانش تفاضلی، متشکل از دو چرخ فعال مستقل و یک چرخ کروی غیرفعال است. این ربات با فرض غلتش خالص چرخ ها و عدم لغزش، سامانه ای غیرخطی و مقید به قیود غیرهولونومیک است. همچنین این سامانه در دسته سامانه های با کمبود عملگر قرار می گیرد. تعقیب مسیرهای حرکت زمانی، یکی از دشوارترین مسائل در حوزه ربات های چرخ دار است که در این مقاله به آن می پردازیم. در این راستا، ابتدا مدل سینماتیکی سامانه بیان می شود که در آن سرعت خطی و سرعت زاویه ای ربات، ورودی های سامانه در نظر گرفته می شوند. پس از تعیین مسیر مرجعی قابل حصول، برای اولین بار کنترل کننده پسگامی در دو مرحله طراحی شده است که پایداری تمام متغیرهای حالت سامانه را به صورت سراسری تضمین می کند. پس از آن کنترل کننده مد لغزشی برای حل مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی بر مبنای کنترل ورودی-خروجی طراحی شده است. پایداری این کنترل کننده نیز به صورت سراسری اثبات می شود. سپس به منظور ارزیابی و اعتبارسنجی کنترل کننده های پیشنهادی، مقایسه ای با کنترل کننده خطی سازی پسخور، که روشی قدرتمند است، صورت گرفته است. در پایان صحت و قوام کنترل کننده های طراحی شده نسبت به اغتشاش با شبیه سازی در نرم افزار متلب تصدیق می شود.

واژه های کلیدی: ربات چرخ دار، تعقیب مسیرهای حرکت زمانی، قیود غیرهولونومیک، کنترل پسگام، کنترل مد لغزشی

Trajectory tracking of a wheeled mobile robot using Backstepping and Sliding mode approaches

M. R. Soltanpour 

Department of Electrical Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran

(Received:28/June/2018; Accepted:04/March/2019)

Abstract

Differential wheeled mobile robot is constructed from two independent active wheels and a spherical passive wheel. This robot as a result of pure rolling and nonslip conditions of wheels is a nonlinear system subjected to nonholonomic constraints. In addition, this system is classified as an underactuated system. Trajectory tracking we have concentrated on is one of the most complicated problems in control of wheeled mobile robots. In the first step a kinematic model in which linear and angular velocity are supposed as system inputs has been presented. Then using a feasible reference trajectory for the first time a novel full state backstepping controller has been designed and unlike previous approaches the stability has been provided fully stated and globally. Next, a sliding mode controller which is based on input-output control theory has been suggested. The proof of stability of this controller has been presented as well. Then a feedback linearization controller as an efficient approach has been proposed with the aim of comparing the performance of the controllers. Finally, integrity and robustness of designed controllers against disturbances have been approved using MATLAB simulation and the obtained results are discussed.

Keywords: Wheeled Mobile Robot, Trajectory Tracking, Nonholonomic Constraints, Backstepping Control, Sliding Mode Control.

۱- دانشیار (نویسنده پاسخگو): soltanpour@ssau.ac.ir

* حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (License CC BY-NC (Commons Creative در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://maj.ihu.ac.ir> دیدن فرمائید.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر ربات‌های پایه متحرک در صنایع مختلف جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده‌اند و به تبع آن مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته‌اند، موسویان و همکاران [۱]. این ربات‌ها بسته به محیطی که در آن به کار گرفته می‌شوند از ابزار حرکتی متناسب با آن محیط بهره می‌برند، روسو^۱ و همکاران [۲]. چرخ به علت سادگی، سرعت قابل قبول و بازده بالا پرکاربردترین ساز و کار حرکتی است. ربات‌های چرخ‌دار نیز دسته‌ای از ربات‌های متحرک هستند که کاربردهای متنوعی در صنایع مختلف مخصوصاً در محیط‌های خطرناک مانند فضا، جنگ و جابجایی محموله‌های حساس و پسماندهای آلوده دارند. در مقاله کمپیون^۲ و همکاران [۳] برای انواع ربات‌های چرخ‌دار سینماتیک و دینامیک مناسب ارائه و تحلیل شده است. این ربات‌ها در صورت غلتش خالص و عدم وجود لغزش، مقید به قیود غیرهولونومیک خواهند بود، بیدگلی و همکاران [۴]. هدایت ربات‌های چرخ‌دار به دو مسئله برنامه‌ریزی حرکت و کنترل تقسیم می‌شود. برنامه‌ریزی حرکت مسیر ربات را طراحی می‌کند به صورتی که اهداف عملیاتی را برآورده کند و کنترل، ربات را روی مسیر طراحی شده حرکت می‌دهد. ربات‌های چرخ‌دار بسیار غیرخطی هستند و در گروه سامانه‌های با کمبود عملگر دسته‌بندی می‌شوند، کیماسی و همکاران [۵]. همچنین این ربات‌ها دارای سامانه چند ورودی-چند خروجی غیرمربعی هستند، که مجموعه این ویژگی‌ها مساله کنترل این ربات‌ها به صورت فضای کامل حالت را به مساله‌ای چالشی تبدیل کرده است. در کنترل ربات‌های چرخ‌دار سه مساله اصلی به‌طور گسترده مطرح است. پایدارسازی حول وضعیت‌های مطلوب، تعقیب مسیر در فضای کارترین و تعقیب مسیرهای حرکت زمانی، که در این میان تعقیب مسیرهای حرکت زمانی بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است، وانگ^۳ و همکاران [۶]. در این مساله ربات باید مسیری مرجع را با قانون زمانی مشخص شده، تعقیب کند، دیلوکا^۴ و همکاران [۷]. در مقاله ویگو^۵ و همکاران [۸] کنترل‌کننده‌ای با استفاده از روش

پسگام در دستگاه مختصات قطبی برای حل مسئله تعقیب مسیر طراحی شده است. نتایج این کنترل‌کننده به‌صورت شبیه‌سازی ارائه شده است. در مقاله چوآ^۶ و همکاران [۹] با استفاده از روش مد لغزشی، کنترل‌کننده‌ای برای حل مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی، در فضای قطبی برای ربات چرخ‌دار در سطح سینماتیکی طراحی شده و نتایج آن به‌صورت شبیه‌سازی ارائه شده است. در مقاله وانگ^۷ و همکاران [۱۰] با استفاده از تابع لیاپانوف در دستگاه مختصات قطبی کنترل‌کننده‌ای برای حل مسئله پایدارسازی حول وضعیت مطلوب و همچنین تعقیب مسیر پیشنهاد شده است. کنترل‌کننده‌های پیشنهاد شده در [۸-۱۰] به علت طراحی در دستگاه مختصات قطبی در مبدا مختصات دارای نقطه بحرانی هستند که این مسئله باعث ایجاد محدودیت در مسیرهای مرجع قابل حصول می‌شود. در مقاله کلانکار^۸ و همکاران [۱۱] کنترل‌کننده‌ای پیش‌بین با استفاده از خطی‌سازی حول مسیر مرجع، برای حل مسئله تعقیب مسیر مرجع زمانی ارائه و نتایج به صورت شبیه‌سازی و عملی گزارش شده است. در مقاله شریانک^۹ و همکاران [۱۲] کنترل‌کننده [۱۱] با کنترل‌کننده‌ای پیش‌بین زمان پیوسته مقایسه شده است. نتایج این دو کنترل‌کننده به صورت پیاده‌سازی عملی ارائه شده است. کنترل‌کننده‌های پیش‌بین حجم بالایی از محاسبات را به کنترل‌کننده تحمیل می‌کنند. در مقاله یی^{۱۰} [۱۳] ربات چرخ‌دار با استفاده از کنترل‌کننده‌ای تناسبی-انتگرالی-مشتقی کنترل شده است که در هر گام محاسباتی ضرایب آن توسط شبکه‌ای عصبی بهینه‌سازی می‌شوند. این کنترل‌کننده تنها خروجی سامانه را کنترل می‌کند و ضمانتی برای همگرا کردن زاویه ربات به ربات مرجع ارائه نمی‌دهد. در مقاله فیرو^{۱۱} و همکاران [۱۴] کنترل‌کننده پسگامی برای حل مسئله تعقیب حرکت زمانی در فضای دکارتی ارائه شده است. این کنترل‌کننده پسگام دارای محدودیت دامنه جذب است. در مقاله [۱۵] نیز با استفاده از روش پسگام ارائه‌شده در [۱۴] و بهینه کردن ضرایب این کنترل‌کننده با استفاده از شبکه عصبی، ربات برای تعقیب

6- Chwa

7- T. Y. Wang

8- Klančar

9- Skrjanc

10- Ye

11- Fierro

1- Russo

2- Campion

3- D. Wang

4- De Luca

5- Weiguo

تریلر در هر دو سطح سینماتیک و دینامیک کنترل شده است. در طراحی سینماتیکی این کنترل‌کننده نیز از تغییر متغیرهایی استفاده شده است که در بازه محدودی به صورت یکتا بازگشت‌پذیر است. در نتیجه با توجه به این موضوع که کنترل‌کننده‌های سینماتیکی علاوه بر کاربرد در پیاده‌سازی‌های سینماتیکی در طراحی‌های جداسازی شده دینامیکی نیز کاربرد دارند، بررسی حل مسئله تعقیب مسیر حرکت زمانی برای ربات چرخ‌دار در سطح سینماتیکی پرکاربرد و دارای اهمیت است. از طرف دیگر بسیاری از کنترل‌کننده‌های ارائه شده در سطح سینماتیک دارای دامنه جذب محدود هستند و ارائه کنترل‌کننده‌ای که به صورت سراسری، پایداری برای تمام متغیرهای حالت سامانه را تضمین کند، مسئله‌ای چالشی است.

در این مقاله، هدف اصلی مقایسه سه کنترل‌کننده سینماتیکی است اما به دلیل اهمیت طراحی‌های دینامیکی این مقایسه در سطح دینامیکی صورت می‌گیرد. برای تحقق این مهم از روش‌های کنترلی جداسازی شده استفاده شده است به طوری که کنترل‌کننده‌های سینماتیکی سرعت‌های مورد نیازشان را تولید می‌کنند و کنترل‌کننده‌ای دینامیکی با استفاده از گشتاورهای چرخ‌های چپ و راست، سرعت‌های مورد نیاز کنترل‌کننده‌های سینماتیکی را تامین می‌نماید. در این راستا، پس از معرفی سینماتیک ربات، با استفاده از ظرفیت ذاتی کنترل‌کننده پسگام در کنترل سامانه‌های با کمبود عملگر، برای اولین بار کنترل‌کننده پسگامی در فضای دکارتی طراحی شده است که بدون محدودیت در حوزه جذب، پایداری تمام متغیرهای حالت را تضمین می‌کند. در ادامه کنترل‌کننده مد لغزشی ورودی-خروجی طراحی شده است. این کنترل‌کننده پایداری خروجی و محدود بودن تمام متغیرهای حالت را ضمانت می‌کند و همچنین ظرفیت طراحی مقاوم نسبت به اغتشاش‌های محدود را برای کنترل‌کننده ایجاد می‌کند. پس از آن با استفاده از روش خطی‌سازی پسخور کنترل‌کننده‌ای برای این ربات پیشنهاد شده است. این کنترل‌کننده نیز پایداری تمام متغیرهای حالت را ضمانت می‌کند، اما در بازه‌ای معتبر است که تغییر متغیرهای صورت گرفته، به صورت یکتا برگشت‌پذیر باشد. پس از آن نتایج شبیه‌سازی، جهت بررسی صحت عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهادی در شرایط ایده‌آل و همچنین در حضور اغتشاش ارائه می‌شود.

مسیر مرجع زمانی کنترل و نتایج شبیه‌سازی آن ارائه شده است. این کنترل‌کننده با توجه به استفاده از شبکه عصبی در بهینه‌سازی ضرایب کنترل‌کننده پاسخ‌های ربات را بهبود بخشیده است اما مشکل محدودیت حوزه جذب برطرف نشده است.

اخیرا به علت اهمیت طراحی کنترل‌کننده‌ها در سطح دینامیکی توجه پژوهش‌گرها به این طراحی‌ها معطوف شده است. در برخی از طراحی‌ها، طراح مستقیما به کنترل‌گشتاور پرداخته است. در مقاله پارک^۱ و همکاران [۱۶] کنترل‌کننده‌ای طراحی شده است که با استفاده از روش مد لغزشی مسئله تعقیب مسیر حرکت زمانی را حل کرده است. همچنین با استفاده از شبکه عصبی نامعینی‌های موجود در سامانه دینامیکی را جبران کرده است. در مقاله دس^۲ و همکاران [۱۷] نیز طراح با استفاده از تابع لیاپانوف کنترل‌کننده‌ای در سطح دینامیکی طراحی کرده است و با استفاده از منطق فازی نامعینی‌های موجود در مدل را شناسایی کرده است. در دسته‌ای دیگر از طراحی‌ها دو کنترل‌کننده طراحی می‌شوند، یکی در سطح سینماتیکی که خروجی آن ورودی کنترل‌کننده دینامیکی است. به صورتی که کنترل‌کننده دینامیکی باید با تعیین گشتاور، خروجی کنترل‌کننده سینماتیکی را تعقیب کند. در مقاله مارتینز^۳ و همکاران [۱۸] کنترل‌کننده‌ای لیاپانوف مینا برای سطح سینماتیکی طراحی شده است. سپس برای تعقیب سیگنال کنترل تولید شده توسط کنترل‌کننده سینماتیکی، کنترل‌کننده‌ای تطبیقی در سطح دینامیکی طراحی شده است که بتواند علاوه بر تعقیب، نامعینی‌های موجود در مدل دینامیکی را جبران کند. نتایج این کنترل‌کننده به صورت شبیه‌سازی و پیاده‌سازی ارائه شده است. در مقاله چن^۴ و همکاران [۱۹] نیز ابتدا با استفاده از کنترل‌کننده سینماتیکی ارائه‌شده در [۱۴] ربات در سطح سینماتیک کنترل شده است و سپس کنترل‌کننده مد لغزشی تطبیقی برای تعقیب خروجی کنترل‌کننده سینماتیکی و همچنین جبران نامعینی‌های موجود در مدل دینامیکی طراحی شده است. در مقاله کیماسی و همکاران [۲۰] کنترل‌کننده‌ای با استفاده از روش خطی‌سازی پسخور، ربات چرخ‌دار همراه با

1- Park

2- Das

3- Martins

4- Chen

و در جهت جانبی لغزشی ندارند. مهمترین ویژگی در سینماتیک ربات‌های متحرک چرخ‌دار، وجود قیود غیرهولونومیک می‌باشد. این قیود رابطه‌ای میان مختصات تعمیم یافته و سرعت‌های تعمیم یافته سامانه می‌باشند. این قیود شامل عباراتی بر حسب سرعت هستند که نمی‌توان با استفاده از انتگرال‌گیری آن‌ها را به قیودی از جنس موقعیت تبدیل کرد. این رابطه نسبت به سرعت‌های تعمیم یافته سامانه خطی است و می‌توان آن را به صورت (۱) بیان نمود.

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (1)$$

$$A(q) = [\sin \alpha \quad -\cos \alpha \quad 0] \quad (2)$$

مدل سینماتیکی سامانه نیز به صورت (۳) بیان می‌گردد.

$$\dot{q} = D(q)u \quad (3)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

در رابطه (۳) ماتریس $u = (u_1, u_2)^T$ ماتریس ورودی سامانه است، که از دومتغیر مستقل تشکیل شده است. متغیر u_1 سرعت خطی نقطه Q است و متغیر u_2 سرعت زاویه‌ای ربات می‌باشد.

و همچنین خواهیم داشت:

$$A(q)D(q) = 0 \quad (5)$$

(۶) به ترتیب نمایش دهنده ماتریس چگونگی وابستگی

ماتریس u به سرعت زاویه‌ای چرخ‌های محرک ربات می‌باشند.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{r}{2}(\dot{\beta}_r + \dot{\beta}_l) \\ u_2 = \frac{r}{2b}(\dot{\beta}_r - \dot{\beta}_l) \end{cases} \quad (6)$$

که شعاع چرخ‌ها است و b نیز نصف فاصله بین چرخ‌ها می‌باشد. همچنین β_r و β_l به ترتیب موقعیت زاویه‌ای چرخ‌های راست و چپ ربات هستند.

۲-۳- مدل دینامیکی

با استفاده از معادله لاگرانژ معادله دینامیکی ربات به فرم زیر ارائه می‌شود، سنگدانی و همکاران [۲۱].

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (7)$$

که در آن، $M(q)$ ماتریس جرمی است که متقارن و مثبت معین است. $C(q, \dot{q})$ ماتریس کریولیس، $B(q)$ ماتریس تبدیل ورودی، τ بردار گشتاورهای اعمالی از طرف

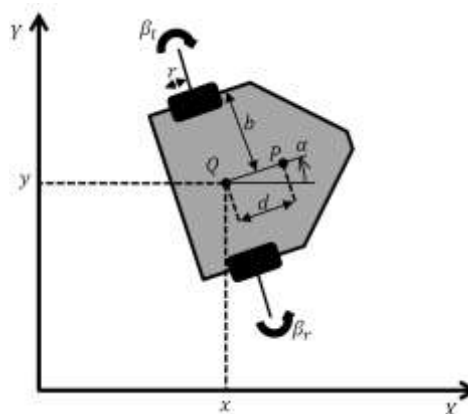
در پایان نیز به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از این پژوهش می‌پردازیم.

۲-توصیف سامانه و مدل‌سازی

هدف این بخش از مقاله توصیف سامانه و مدل‌سازی سینماتیکی و دینامیکی ربات چرخ‌دار می‌باشد. ابتدا شرحی از نحوه عملکرد ربات چرخ‌دار دیفرانسیلی ارائه شده است. سپس به مدل سینماتیکی این ربات با فرض غلتش خالص چرخ‌ها و عدم لغزش آن‌ها پرداخته شده است. در نهایت مدل دینامیکی این ربات ارائه شده است.

۲-۱- توصیف سامانه

سامانه مورد نظر، یک ربات چرخ‌دار است. این ربات شامل دو چرخ با عملگرهای مستقل است و یک چرخ کروی غیر فعال نیز برای حفظ پایداری آن به کار گرفته شده است. همان طور که در شکل ۱ نمایش داده شده است، Q میانگین مختصاتی مرکز دو چرخ فعال ربات می‌باشد. β_r و β_l به ترتیب نشان‌دهنده جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ ربات می‌باشند. بردار مختصات تعمیم یافته $q = (x, y, \alpha)^T$ وضعیت ربات متحرک را نشان می‌دهد، که در آن (x, y) مختصات نقطه Q می‌باشد و α نمایان‌گر جهت‌گیری ربات نسبت به دستگاه مرجع است.



شکل (۱): ربات پایه متحرک چرخ‌دار.

نقطه P مرکز جرم ربات و همچنین d فاصله بین نقاط P و Q است.

۲-۲- مدل سینماتیکی

فرض می‌کنیم حرکت ربات در صفحه صورت می‌گیرد، چرخ‌های ربات در حرکت رو به جلو غلتش خالص می‌کنند

این است که ربات متحرک با شروع از یک شرایط اولیه مشخص ابتدا خود را به مسیر مطلوب مساله برساند و سپس با رعایت زمان‌بندی آن مسیر را تعقیب کند. در این مساله هدف تعقیب مسیر مرجع حرکت زمانی توسط ربات است. فرض می‌کنیم توابع زمانی مسیر مرجع در فضای کارترین که باید توسط ربات تعقیب شود به صورت (۱۵) بیان می‌گردد.

$$\begin{cases} x = x_r(t) \\ y = y_r(t) \end{cases} \quad (15)$$

۳-۱-۱-۱- تولید مسیره‌های حرکت زمانی مرجع

اندیس r نمایان‌گر مسیره‌های زمانی ربات مرجع است. با استفاده از (۱۶) متغیره‌های دیگر ربات مرجع نیز استخراج می‌شود، [۴].

$$\begin{cases} \alpha_r = \text{atan2}(\dot{y}_r, \dot{x}_r) \\ u_{1r} = \pm \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} \\ u_{2r} = \frac{\dot{y}_r \dot{x}_r - \dot{x}_r \dot{y}_r}{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2} \end{cases} \quad (16)$$

۳-۱-۲- قانون کنترلی

برای استخراج قانون کنترلی ابتدا معادلات خطا را به صورت (۱۷) تعریف می‌کنیم.

$$E = q_r - q \quad (17)$$

با استفاده از تبدیل (۱۸) به عبارت (۱۹) می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \hat{E} &= T_1 E \\ T_1 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_1 = u_{1r} \cos \hat{e}_3 - u_1 + u_2 \hat{e}_2 \\ \dot{\hat{e}}_2 = u_{1r} \sin \hat{e}_3 - u_2 \hat{e}_1 \\ \dot{\hat{e}}_3 = u_{2r} - u_2 \end{cases} \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، متغیره‌های \hat{e}_1 ، \hat{e}_2 و \hat{e}_3 به ترتیب عناصر بردار \hat{E} هستند. برای طراحی کنترل‌کننده پس‌گام برای مرحله اول کاندید لیاپانوفی به فرم (۲۰) پیشنهاد می‌کنیم.

$$V_1 = \frac{1}{2} (\hat{e}_2^2 + \hat{e}_3^2) \quad (20)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۲۰) و جایگذاری رابطه (۱۹) در آن به عبارت (۲۱) می‌رسیم.

$$\dot{V}_1 = \hat{e}_2 (u_{1r} \sin \hat{e}_3 - u_2 \hat{e}_1) + \hat{e}_3 (u_{2r} - u_2) \quad (21)$$

که با تعیین مقادیر به صورت رابطه (۲۲) به رابطه (۲۳) می‌رسیم.

موتورهای راست و چپ است. همچنین λ بردار ضرایب لاگرانژ است.

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} m & 0 & -md \sin \alpha \\ 0 & m & md \cos \alpha \\ -md \sin \alpha & md \cos \alpha & J + md^2 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -md\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \\ -md\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \\ \cos \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ B(q) &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha \\ b & -b \end{bmatrix} \\ \tau &= \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

حال با مشتق‌گیری از معادله (۳) خواهیم داشت:

$$\ddot{q} = \dot{D}(q)u + D(q)\dot{u} \quad (9)$$

که با جایگذاری در معادله (۷) به معادله زیر می‌رسیم.

$$M(q)(\dot{D}(q)u + D(q)\dot{u}) + C(q, \dot{q}) = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (10)$$

با ضرب $D^T(q)$ در دو طرف معادله (۱۰) و همچنین جایگذاری معادله (۵) در آن خواهیم داشت:

$$M_1(q)\dot{u} + M_2(q)u + C_1(q, \dot{q}) = B_1(q)\tau \quad (11)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} M_1(q) &= D^T(q)M(q)D(q) \\ M_2(q) &= D^T(q)M(q)\dot{D}(q) \\ C_1(q, \dot{q}) &= D^T(q)C(q, \dot{q}) \\ B_1(q) &= D^T(q)B(q) \end{aligned} \quad (12)$$

در نتیجه با جایجایی‌های مقدماتی معادله (۱۲) به فرم زیر قابل بازنویسی است.

$$\dot{u} = \check{B}(q)\tau - \check{M}(q)u - \check{C}(q, \dot{q}) \quad (13)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \check{B}(q) &= M_1^{-1}(q)B_1(q) \\ \check{M}(q) &= M_1^{-1}(q)M_2(q) \\ \check{C}(q, \dot{q}) &= M_1^{-1}(q)C_1(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (14)$$

۳- طراحی کنترل‌کننده‌های سینماتیکی

در این بخش از مقاله به طراحی کنترل‌کننده‌های سینماتیکی می‌پردازیم. ابتدا طراحی کنترل‌کننده پس‌گام مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس کنترل‌کننده مد لغزشی طراحی می‌شود و در نهایت کنترل‌کننده خطی‌ساز پس‌خور مورد بحث قرار می‌گیرد.

۳-۱- طراحی کنترل‌کننده پس‌گام

یکی از مسائل کنترل خودکار در کنترل ربات‌های چرخ‌دار تعقیب مسیره‌های زمانی است. در این مسائل هدف کنترلی

۳-۲- طراحی کنترل کننده مد لغزشی

در طراحی کنترل کننده مد لغزشی، از مبانی کنترل ورودی-خروجی استفاده شده است. در طراحی این کنترل کننده، مبنا صفر کردن فاصله ربات، از ربات مرجع روی محور طولها و محور عرضها است، کیماسی و همکاران [۲۲]. از این رو، نمی توان تضمینی جهت صفر کردن خطای زاویه ربات از زاویه ربات مرجع ارائه نمود. در عوض با استفاده از سطح لغزش پیشنهادی می توان از مزیت کنترل کننده مد لغزشی استفاده کرد و سامانه حلقه بسته را نسبت به نامعینی های موجود در سامانه مقاوم کرد.

در طراحی این کنترل کننده، برای وارد کردن هر دو سیگنال کنترلی به معادلات، نقطه P از ربات را به سمت نقطه P از ربات مرجع هدایت می کنیم.

۳-۲-۱- قانون کنترلی

با توجه به شکل مجموعه روابط (۳۳) قابل برداشت است.

$$\begin{cases} x_p = x + d \cos \alpha \\ y_p = y + d \sin \alpha \end{cases} \quad (33)$$

که در (۳۳)، متغیرهای x_p و y_p به ترتیب طول و عرض نقطه P روی دستگاه مختصات مرجع می باشند.

برای استفاده از روش مد لغزشی، سطح لغزشی به صورت (۳۴) در نظر می گیریم.

$$S = [s_1 \quad s_2]^T \quad (34)$$

$$\begin{cases} s_1 = e_{x_p} + \gamma_1 \int e_{x_p} \\ s_2 = e_{y_p} + \gamma_2 \int e_{y_p} \end{cases} \quad (35)$$

که در (۳۵)، γ_1 و γ_2 ضرایب ثابت مثبت هستند.

در این مرحله عبارت (۳۶) را به عنوان تابع لیاپانوف در نظر می گیریم.

$$V_3 = \frac{1}{2} S^T S \quad (36)$$

با مشتق گیری از معادله (۳۶) به عبارت (۳۷) می رسیم.

$$\dot{V}_3 = S^T \dot{S} \quad (37)$$

برای ارضای شرط مد لغزشی باید شرط (۳۸) ارضا شود.

$$\dot{V}_3 \leq -\Psi^T |S| \quad (38)$$

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2]^T \quad (39)$$

که در (۳۹)، ψ_1 و ψ_2 مقادیر مثبت هستند.

با استفاده از روابط (۳۷) و (۳۸) به رابطه (۴۰) دست می یابیم که شرط نهایی طراحی است.

$$\begin{cases} u_2 = k_3 \hat{e}_3 + u_{2r} \\ \hat{e}_1 = \frac{u_{1r} \sin \hat{e}_3 + k_2 \hat{e}_2}{u_2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\dot{V}_1 = -k_2 \hat{e}_2^2 - k_3 \hat{e}_3^2 \quad (23)$$

حال برای تحقق هدف کنترلی مسئله و وارد کردن سرعت خطی ربات به معادلات تابع لیاپانوف دیگری پیشنهاد می کنیم.

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} f^2 \quad (24)$$

$$f = \frac{u_{1r} \sin \hat{e}_3 + k_2 \hat{e}_2}{u_2} - \hat{e}_1 \quad (25)$$

با مشتق گیری از رابطه (۲۴) و جایگذاری \hat{e}_1 با استفاده از رابطه (۲۵) در آن و همچنین ساده سازی، به عبارت (۲۶) دست می یابیم.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_2 \hat{e}_2^2 - k_3 \hat{e}_3^2 \\ & + f \left(\dot{f} + \hat{e}_2 (u_{2r} + k_3 \hat{e}_3) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

با مقداری \dot{f} به صورت (۲۷) به رابطه (۲۸) می رسیم که رابطه ای منفی معین است.

$$\dot{f} = -k_1 \text{sign}(f) - \hat{e}_2 (u_{2r} + k_3 \hat{e}_3) \quad (27)$$

$$\dot{V}_2 = -k_2 \hat{e}_2^2 - k_3 \hat{e}_3^2 - k_1 f \text{sign}(f) \quad (28)$$

در این مرحله با مشتق گیری از رابطه (۲۵) و قرار دادن آن رابطه در عبارت (۲۷) و همچنین با استفاده از روابط (۲۲) سرعت خطی ربات را به صورت عبارت (۲۹) استخراج می کنیم.

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{(\dot{u}_{2r} - k_3 \hat{e}_3)(u_{1r} \sin \hat{e}_3 + k_2 \hat{e}_2)}{u_2^2} \\ & - \frac{(\dot{u}_{1r} \sin \hat{e}_3 - k_3 \hat{e}_3 u_{1r} \cos \hat{e}_3) - k_2 (f u_2 - k_2 u)}{u_2} \\ & - k_1 \text{sign}(f) + u_2 \hat{e}_2 + u_{1r} \cos \hat{e}_3 \\ & - \hat{e}_2 (u_{2r} + \hat{e}_3) \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به رابطه (۲۸) می توان به عبارت (۳۰) رسید.

$$\begin{cases} \hat{e}_2 \rightarrow 0 \\ \hat{e}_3 \rightarrow 0 \\ f \rightarrow 0 \end{cases} \quad (30)$$

حال با توجه به میل کردن \hat{e}_2 و \hat{e}_3 طبق رابطه (۲۲) سرعت زاویه ای ربات به سرعت زاویه ای ربات مرجع میل می کند که در حالت کلی صفر نیست. بنابراین، با توجه به رابطه (۲۵) رابطه (۳۱) دریافت می شود.

$$\hat{e}_1 \rightarrow 0 \quad (31)$$

با استفاده از رابطه (۱۸)، (۳۰) و (۳۱) به عبارت (۳۲) که هدف نهایی کنترلی است، می رسیم.

$$E \rightarrow 0 \quad (32)$$

جهت‌گیری همراه با اختلاف فاز π (rad) باشد. یا به عبارت دیگر، مطلوب مسئله، طی مسیر مرجع با سرعت خطی منفی است. در این مسائل کنترل‌کننده نقاط P از ربات و ربات مرجع را روی هم منطبق می‌کند اما با جهت‌گیری‌های غیریکسان که منجر به عدم همگرایی نقاط Q ربات و ربات مرجع خواهد شد و تعقیب مسیر حرکت زمانی صورت نخواهد گرفت. در نتیجه کنترل‌کننده مد لغزشی پیشنهادی برای مسیرهای مرجعی پاسخ مناسب دارد که سرعت خطی ربات مرجع در آن غیرمنفی ($u_{1r} \geq 0$) باشد.

۳-۳- طراحی کنترل‌کننده خطی‌ساز پسخور

در طراحی کنترل‌کننده خطی‌ساز پسخور ابتدا معادلات خطا تشکیل می‌شود، سپس با استفاده از تبدیل‌هایی، سامانه به صورت ساده‌تری توصیف می‌شود که طراحی کنترل‌کننده در این فضا صورت می‌گیرد، الفتی صابر [۲۳]. پس از طراحی کنترل‌کننده در فضای جدید، با استفاده از روابط بازگشتی باید سیگنال‌های کنترلی را محاسبه کنیم. بنابراین برگشت‌پذیری این روابط اهمیت ویژه‌ای دارد و گاهی باعث ایجاد محدودیت‌هایی در فضاهای عملکردی کنترل‌کننده می‌شود.

۳-۳-۱- قانون کنترلی

برای استخراج قانون کنترلی، ابتدا معادله خطای تشکیل شده (۱۷) را با استفاده از تبدیل (۴۶) به صورت (۴۷) بازنویسی می‌کنیم:

$$\tilde{E} = T_2 E \quad (46)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & \sin \alpha_r & 0 \\ -\sin \alpha_r & \cos \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}_1 = u_{1r} - u_1 \cos \tilde{e}_3 + u_{2r} \tilde{e}_2 \\ \dot{\tilde{e}}_2 = u_1 \sin \tilde{e}_3 - u_{2r} \tilde{e}_1 \\ \dot{\tilde{e}}_3 = u_{2r} - u_2 \end{cases} \quad (47)$$

که در رابطه (۴۷)، متغیرهای \tilde{e}_1 ، \tilde{e}_2 و \tilde{e}_3 به ترتیب عناصر بردار \tilde{E} هستند.

برای ساده‌سازی بیشتر مسئله، از قاعده زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. با استفاده از تبدیل (۴۸)، معادلات به صورت (۴۹) بازنویسی می‌شوند.

$$S^T \dot{S} \leq -S^T \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S) \quad (40)$$

برای تحقق شرط (۴۰) مشتق تابع لیاپانوف را برابر با (۴۱)، با برقراری شرط (۴۲) در نظر می‌گیریم.

$$S^T \dot{S} = -S^T \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S) \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

با استفاده از عبارت (۴۱) و همچنین وارد کردن عبارت (۳۳) و (۳۵) به آن، عبارت (۴۳) استخراج می‌شود.

$$\begin{cases} e_{x_p} + \dot{x}_{p_r} - u_1 \cos \alpha + du_2 \sin \alpha = -\mu_1 \text{sign}(s_1) \\ e_{y_p} + \dot{y}_{p_r} - u_1 \sin \alpha - du_2 \cos \alpha = -\mu_2 \text{sign}(s_2) \end{cases} \quad (43)$$

با استفاده از ساده‌سازی‌های مقدماتی عبارت (۴۳)، سیگنال‌های کنترلی به صورت (۴۴) قابل استخراج است.

$$S^T \dot{S} \leq S^T \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S)$$

$$\begin{cases} e_{x_p} + \dot{x}_{p_r} - u_1 \cos \alpha + du_2 \sin \alpha = -\mu_1 \text{sign}(s_1) \\ e_{y_p} + \dot{y}_{p_r} - u_1 \sin \alpha - du_2 \cos \alpha = -\mu_2 \text{sign}(s_2) \end{cases}$$

$$u_1 = (e_{x_p} + \dot{x}_{p_r} + \mu_1 \text{sign}(s_1)) \cos \alpha \quad (44)$$

$$+ (e_{y_p} + \dot{y}_{p_r} + \mu_2 \text{sign}(s_2)) \sin \alpha$$

$$u_2 = \left\{ \begin{aligned} & (e_{y_p} + \dot{y}_{p_r} + \mu_2 \text{sign}(s_2)) \cos \alpha - \\ & (e_{x_p} + \dot{x}_{p_r} + \mu_1 \text{sign}(s_1)) \sin \alpha \end{aligned} \right\} / d$$

با مقداردهی (۴۴) در معادلات شرط (۳۸) ارضا می‌شود. بنابراین، معادله (۴۴) برقرار می‌گردد.

$$\begin{cases} e_{x_p} \rightarrow 0 \\ e_{y_p} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (44)$$

با حصول (۴۴) می‌توان دریافت که نقطه P از ربات به نقطه P از ربات مرجع همگرا شده است.

با توجه به (۴۴) کران‌دار بودن سیگنال‌های کنترل قابل برداشت است. همچنین با قرار دادن (۴۴) در (۳) می‌توان کران‌دار بودن \dot{q} و در نتیجه کران‌دار بودن q را دریافت.

در طراحی این کنترل‌کننده از مدل (۳) استفاده شده است و با توجه به این که کنترل‌کننده تضمینی برای همگرایی جهت‌گیری ربات به جهت‌گیری ربات مرجع ارائه نمی‌دهد در واقع جهت تعقیب مسیر به صورت پیش‌فرض از مدل سامانه برداشت می‌شود که همواره جهتی است که ربات با سرعت خطی مثبت مسیر را تعقیب می‌کند. این فرض زمانی با مشکل مواجه خواهد شد که مسیری مرجع برای ربات تعیین شود و مطلوب مسئله تعقیب مسیر با

گشتاورهای چرخ‌های چپ و راست ربات است. به عبارتی طبق معادله (۱۳) ورودی‌های سامانه گشتاورهای چرخ‌های چپ و راست و خروجی‌های سامانه سرعت‌های چرخ‌های چپ و راست ربات است. برای استخراج قانون کنترلی ابتدا معادلات خطای سامانه (۱۳) را تشکیل می‌دهیم.

$$E_u = u_{kc} - u \quad (۵۶)$$

که در آن، بردار سرعت تولید شده توسط کنترل سینماتیکی است. سطح لغزشی تناسبی-انتگرالی به فرم زیر در نظر می‌گیریم.

$$S_{dc} = E_u + \Sigma \int E_u \quad (۵۷)$$

که در آن، $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس بهره مثبت معین است. در صورتی که S_{dc} به صفر میل کند، خطای سامانه نیز به صفر میل می‌کند و در نتیجه سرعت‌های مورد نیاز کنترل‌کننده سینماتیکی تامین می‌شود.

عبارت (۵۸) را به عنوان تابع لیاپانوف در نظر می‌گیریم.

$$V_5 = S_{dc}^T S_{dc} \quad (۵۸)$$

با مشتق‌گیری از (۵۸) به عبارت (۵۹) می‌رسیم.

$$\dot{V}_5 = S_{dc}^T \dot{S}_{dc} \quad (۵۹)$$

برای ارضای شرط مد لغزشی باید شرط (۶۰) ارضا شود.

$$\dot{V}_5 \leq -\Psi^T |S_{dc}| \quad (۶۰)$$

با استفاده از روابط (۵۹) و (۶۰) به رابطه (۴۹) دست می‌یابیم که شرط نهایی طراحی است.

$$S_{dc}^T \dot{S}_{dc} \leq -S_{dc}^T \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S_{dc}) \quad (۴۹)$$

برای تحقق شرط (۴۹) مشتق تابع لیاپانوف را برابر با (۶۲)، با برقراری شرط (۶۳) در نظر می‌گیریم.

$$S_{dc}^T \dot{S}_{dc} = -S_{dc}^T \begin{bmatrix} \varpi_1 & 0 \\ 0 & \varpi_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S_{dc}) \quad (۶۲)$$

$$\begin{bmatrix} \varpi_1 & 0 \\ 0 & \varpi_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix} \quad (۶۳)$$

در نتیجه با ضرب عبارت $(S_{dc}^T)^{-1}$ از سمت چپ در دو طرف معادله به معادله (۶۴) می‌رسیم.

$$\dot{S}_{dc} = - \begin{bmatrix} \varpi_1 & 0 \\ 0 & \varpi_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S_{dc}) \quad (۶۴)$$

$$\begin{cases} z_1 = \tilde{e}_1 \\ z_2 = \tilde{e}_2 \\ z_3 = \tan \tilde{e}_3 \\ \omega_1 = u_{1r} - u_1 \cos \tilde{e}_3 \\ \omega_2 = \frac{u_{2r} - u_2}{\cos^2 \tilde{e}_3} \end{cases} \quad (۴۸)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_{2r} z_2 + \omega_1 \\ \dot{z}_2 = -u_{2r} z_1 + z_3 (u_{1r} - \omega_1) \\ \dot{z}_3 = \omega_2 \end{cases} \quad (۴۹)$$

حال برای طراحی کنترل‌کننده از سامانه انتقال یافته استفاده می‌کنیم و تابع لیاپانوف (۵۰) را پیشنهاد می‌کنیم.

$$V_4 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 (z_1^2 + z_2^2) + \varepsilon_2 z_3^2) \quad (۴۵)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۵۰) و جایگذاری (۴۹) در آن و ساده‌سازی‌های مقدماتی به رابطه (۵۱) می‌رسیم.

$$\dot{V}_4 = \varepsilon_1 z_1 \omega_1 + z_3 (\varepsilon_2 \omega_2 + \varepsilon_1 z_2 (u_{1r} - \omega_1)) \quad (۴۶)$$

با مقداردهی ω_1 و ω_2 به صورت (۵۲) در معادله (۵۱) به عبارت (۵۳) می‌رسیم.

$$\begin{cases} \omega_1 = -\lambda_1 \text{sign}(z_1) / \varepsilon_1 \\ \omega_2 = (-\lambda_2 \text{sign}(z_3) - \varepsilon_1 z_2 (u_{1r} - \omega_1)) / \varepsilon_2 \end{cases} \quad (۴۷)$$

$$\dot{V}_4 = -\lambda_1 |z_1| - \lambda_2 |z_3| \quad (۴۸)$$

با استفاده از لم باربالات می‌توان عبارت (۵۴) را دریافت کرد.

$$\begin{cases} z_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_1 \rightarrow 0 \\ z_3 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_2 \rightarrow -z_2 u_{1r} \end{cases} \quad (۵۴)$$

با توجه به عبارت (۵۴) و همچنین (۴۹) می‌توان عبارت (۵۵) را برداشت کرد.

$$\begin{cases} z_1 \rightarrow 0 \\ z_2 \rightarrow 0 \\ z_3 \rightarrow 0 \end{cases} \quad (۵۵)$$

در نتیجه (۵۵) بردار انتقال‌یافته خطای سامانه به صفر میل می‌کند، اما با نگاهی به تبدیل (۴۸) به روشنی می‌توان دریافت که این کنترل‌کننده تنها در بازه $|e_3| < \frac{\pi}{2}$ که عبارت $\tan e_3$ یک به یک است، خطای سامانه را به صفر میل می‌دهد و تنها در این بازه معتبر است. به عبارتی این کنترل‌کننده دارای محدودیت حوزه جذب است.

۴- طراحی کنترل‌کننده دینامیکی

در این قسمت از مقاله به طراحی کنترل‌کننده دینامیکی برای ربات چرخ‌دار می‌پردازیم. هدف کنترلی در این قسمت تولید سرعت‌های مورد نیاز کنترل سینماتیکی با استفاده از

ازای خطای اندازه‌گیری در پارامترهای دینامیکی سامانه شبیه‌سازی شده است. نامعینی‌های پارامتری مذکور برای تمام شبیه‌سازی‌های همراه با نامعینی به صورت معادلات (۵۰) اعمال شده است.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 1.1r & \bar{m} &= 1.1m \\ \bar{b} &= 1.1b & \bar{J} &= 1.1J \\ \bar{d} &= 1.1d \end{aligned} \quad (50)$$

که در این معادلات، $\bar{r}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{m}, \bar{J}$ پارامترهایی هستند که در کنترل‌کننده استفاده شده‌اند و نسبت به پارامترهای سامانه دارای خطا می‌باشند.

این خطاها در صورت عدم بهره‌مندی کنترل‌کننده‌های دینامیکی و سینماتیکی از قوام کافی، اثرات منفی روی عملکرد سامانه حلقه بسته در پی خواهند داشت.

در صورت مقاوم نبودن کنترل‌کننده دینامیکی سرعت‌های مورد نیاز کنترل‌کننده سینماتیکی تامین نخواهد شد و در صورت مقاوم نبودن کنترل‌کننده سینماتیکی سامانه حلقه بسته عملکرد مطلوبی نخواهد داشت.

باید توجه داشت که کنترل‌کننده مقاوم دینامیکی می‌تواند اثر عدم قطعیت‌های مذکور را کاهش دهد اما تاثیر آن به‌طور کامل حذف نمی‌گردد. در نتیجه قوام کنترل‌کننده‌های سینماتیکی برای دستیابی به عملکرد مطلوب سامانه حلقه بسته ضروری است.

در این مقاله تلاش شده با استفاده از عبارات مقاوم‌ساز ($\text{sign}(\chi)$) در کنترل‌کننده‌های سینماتیکی و دینامیکی اثر نامعینی‌های پارامتری یادشده را کاهش دهیم و عملکرد مناسب کنترلی را در حضور نامعینی‌های محدود پارامتری ایجاد کنیم.

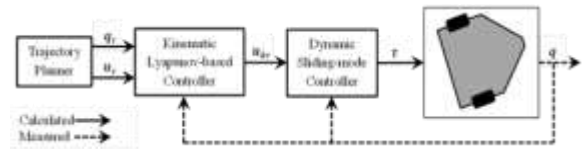
لازم به ذکر است، برای جلوگیری از پدیده زیگزگی که علاوه بر تاثیر منفی کنترلی و مصرف بالای انرژی، باعث فرسایش محرک‌ها نیز می‌شود، در تمام شبیه‌سازی‌ها، به جای استفاده از تابع $\text{sign}(\chi)$ عبارت $\Theta \tan^{-1}(v\chi)$ به کار گرفته شده است که در آن:

$$\Theta = 0.6, v = 10 \quad (67)$$

با جایگذاری معادلات (۱۳) و (۵۷) در معادله (۵۹) و اعمال جابجایی‌های مقدماتی خواهیم داشت:

$$\tau = \check{B}^{-1}(q)(\dot{u}_{kc} + \Sigma E_u + \check{M}(q)u + \check{C}(q, \dot{q}) + \begin{bmatrix} \varpi_1 & 0 \\ 0 & \varpi_2 \end{bmatrix} \text{sign}(S_{dc})) \quad (65)$$

دیگرام حلقه بسته کنترلی ربات چرخ‌دار با جزئیات در شکل ۲ بیان شده است.



شکل (۲): دیگرام حلقه بسته کنترلی ربات چرخ‌دار

۵- نتایج شبیه‌سازی

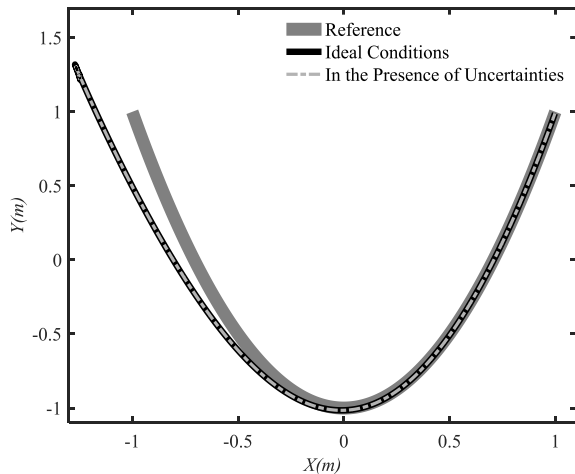
برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده‌های پیشنهاد شده، از شبیه‌سازی رایانه‌ای در نرم‌افزار متلب استفاده شده است. اندازه پارامترهای مدل در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول (۱): پارامترهای سامانه.

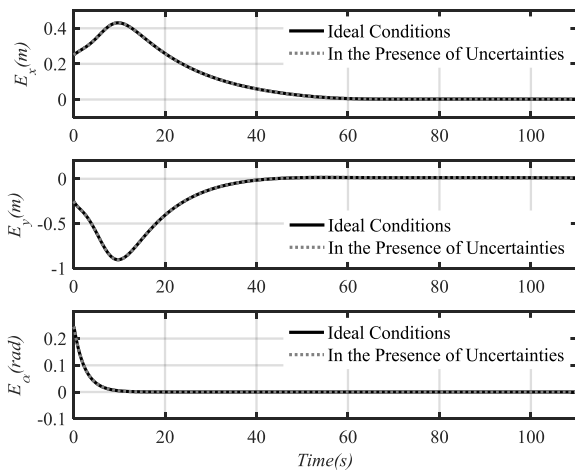
پارامتر	مقدار	واحد
r, b, d	$0.26, 0.0595, 0.29$	m
m	0.9	kg
J	0.025	$kg.m^2$

برای هر یک از کنترل‌کننده‌های طراحی شده، دو مسیر مرجع و شرایط اولیه در نظر گرفته شده است. این دو مسیر مرجع و شرایط اولیه به صورتی انتخاب شده‌اند که یکی از آن‌ها احراز کننده عملکرد کنترل‌کننده در ناحیه‌های معتبر خود باشد و دیگری نقاط ضعف و قوت کنترل‌کننده‌ها را نسبت به هم به نمایش گذارد.

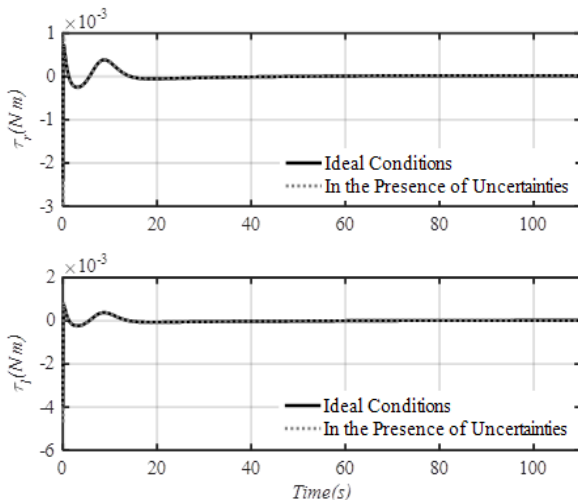
پیاده‌سازی عملی کنترل‌کننده‌ها همواره با نامعینی‌هایی همراه است. بخش عمده‌ای از این نامعینی‌ها مربوط به خطا در محاسبه پارامترهای مدل دینامیکی سامانه می‌باشد. از این رو برای شبیه‌سازی هرچه دقیق‌تر سامانه حلقه بسته و همچنین بررسی قوام کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، تمام کنترل‌کننده‌ها در دو حالت پارامترهای دقیق و همچنین به



شکل (۳): مسیر ربات در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۴): خطاهای تعقیب در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۵): سیگنال‌های کنترل در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

۶-۱-۱- مسیر مرجع سهموی

در این سناریو مسیر سهموی (۵۱) به‌عنوان مسیر مرجع در نظر گرفته شده است و ربات باید از شرایط اولیه (۵۲) خود را به مسیر برساند و مسیر را تعقیب کند.

لازم به ذکر است در این سناریو مطلوب است ربات با سرعت خطی مثبت مسیر مرجع را تعقیب کند.

$$\begin{cases} x_r = t/55 - 1 \\ y_r = 2(t/55 - 1)^2 - 1 \end{cases} \quad (51)$$

$$q_0 = [-1.2 \quad 1.2 \quad -\pi/2]^T \quad (52)$$

پارامترهای کنترلی مورد استفاده در سناریوی مسیر مرجع سهموی برای تمامی کنترل‌کننده‌های سینماتیکی و دینامیکی مطابق جدول ۲ می‌باشد.

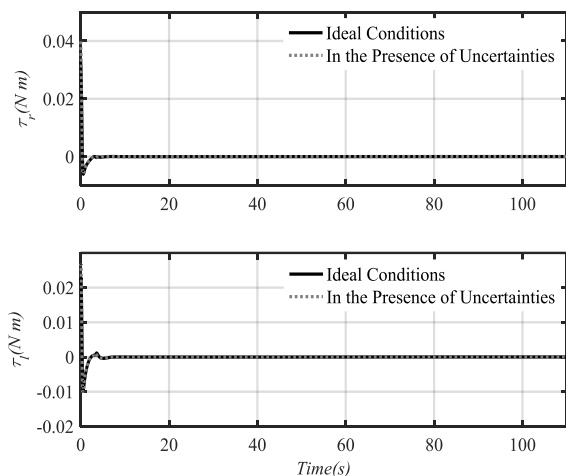
مقدار	پارامتر
۰/۲, ۰/۰۵, ۰/۴	k_1, k_2, k_3
۲, ۲	γ_1, γ_2
۰/۱, ۰/۱	μ_1, μ_2
۱۲, ۲	$\varepsilon_1, \varepsilon_2$
۰/۰۱, ۰/۱۵	λ_1, λ_2
۱, ۱	σ_1, σ_2
۲, ۲	ω_1, ω_2

۶-۱-۱- کنترل‌کننده پسگام

در شکل ۳ مسیر ربات در دو حالت ایده‌آل و همچنین حضور نامعینی‌های پارامتری برای کنترل‌کننده پسگام نمایش داده شده است. در شکل ۴ نیز خطای متغیرهای حالت ربات نشان داده شده که نمایش‌دهنده همگرایی خطای متغیرهای حالت به صفر است. نکته قابل توجه در این شکل دینامیک همگرایی خطای زاویه ربات است که مطابق انتظاری که از طراحی کنترل‌کننده داشتیم می‌باشد. خطای این متغیر حالت به صورت بسیار مشابه تابع نمایی به صفر همگرا می‌شود. در شکل ۵ نیز گشتاورهای چرخ‌های راست و چپ ربات به نمایش گذاشته شده است که در محدوده منطقی گشتاوری قرار دارند.

۶-۱-۲- کنترل کننده مد لغزشی

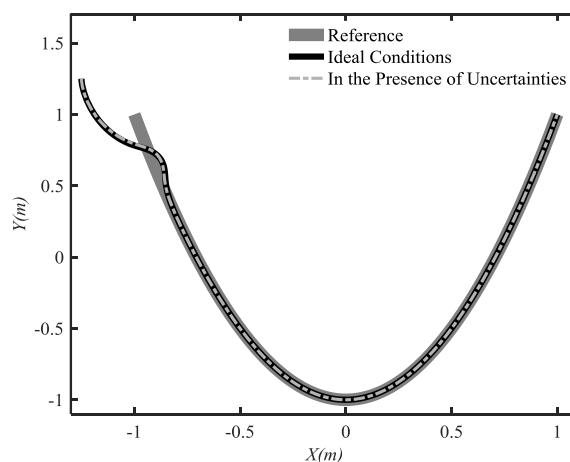
برای قابل قیاس بودن عملکرد کنترل کننده‌ها، کنترل کننده مد لغزشی نیز برای تعقیب مسیر حرکت زمانی (۵۱) از شرایط اولیه (۵۲) شبیه‌سازی شده است. شکل ۶ مسیر طی شده توسط ربات را نمایش می‌دهد. شکل ۷ خطای متغیرهای حالت را نمایش داده است. در شکل ۸ نیز سیگنال‌های کنترل تولید شده توسط کنترل کننده مد لغزشی ارائه شده است. سیگنال‌های کنترل تولید شده در محدوده قابل دستیابی برای محرک‌ها قرار می‌گیرند. کنترل کننده مد لغزشی بر مبنای صفر کردن e_{xp} و e_{yp} طراحی شده است و تضمینی جهت همگرایی جهت‌گیری ربات با جهت‌گیری ربات مرجع ارائه نمی‌دهد.



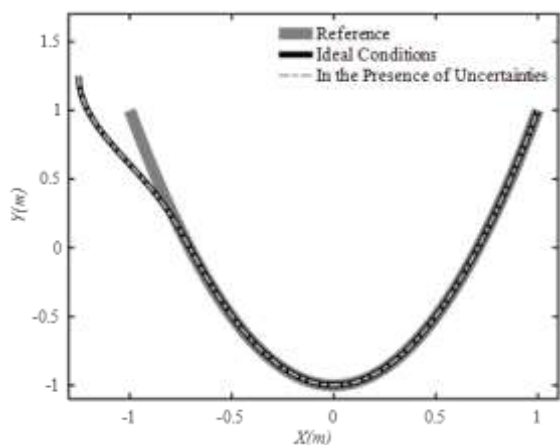
شکل (۸): سیگنال‌های کنترل در شرایط ایده آل و نامعینی پارامتری.

۶-۱-۳- کنترل کننده خطی ساز پسخور

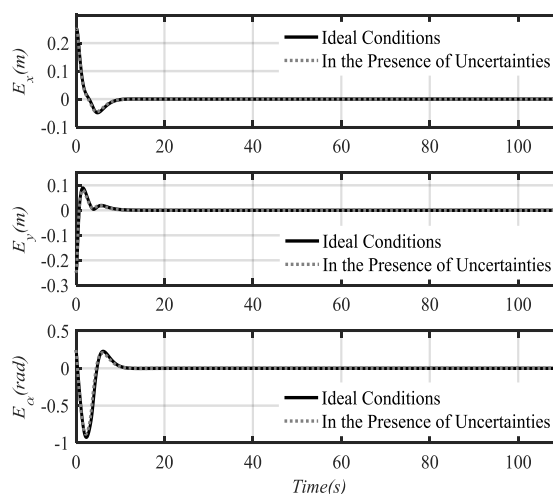
نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده خطی ساز پسخور نیز به منظور مقایسه پذیر بودن با سایر کنترل کننده‌ها، با مسیر مرجع (۵۱) از شرایط اولیه (۵۲) ارائه شده است. شکل ۹ مسیر طی شده توسط ربات را نمایش می‌دهد که در آن نحوه همگرایی ربات به ربات مرجع نمایان است. شکل ۱۰ خطای متغیرهای حالت را نمایش داده است، که در آن مشخص است که خطاها پس از یک حالت گذرا به صفر همگرا می‌شوند. در شکل ۱۱ نیز سیگنال‌های کنترل تولید شده توسط کنترل کننده ارائه شده است. سیگنال‌های کنترل تولید شده در محدوده سیگنال کنترل‌های مجاز قرار می‌گیرند.



شکل (۶): مسیر ربات در شرایط ایده آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۹): مسیر ربات در شرایط ایده آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۷): خطاهای تعقیب در شرایط ایده آل و نامعینی پارامتری.

$$\begin{cases} x_r = \cos(2\pi t/110) \\ y_r = \sin(2\pi t/110) \end{cases} \quad (70)$$

$$q_0 = [1.25 \quad -0.25 \quad \pi/4]^T \quad (71)$$

لازم به ذکر است در این سناریو مطلوب است ربات با سرعت خطی منفی مسیر مرجع را تعقیب کند. در نتیجه زاویه اولیه ربات مرجع $-\pi/2$ خواهد بود. این امر ممکن است بسته به شرایط، در برخی ماموریت‌ها مورد استفاده قرار بگیرد. علاوه بر آن، این مسئله برای کنترل‌کننده‌های طراحی شده مسئله‌ای چالشی می‌باشد.

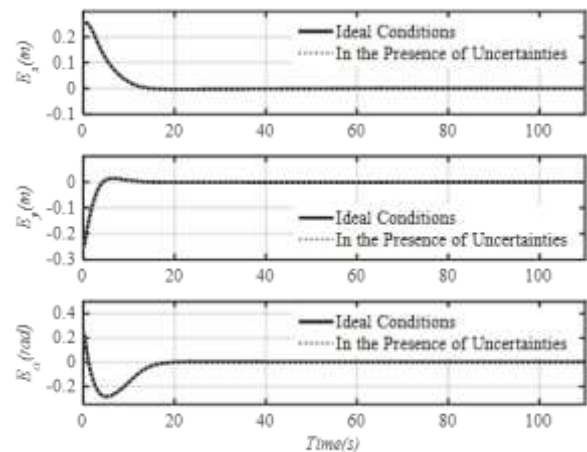
پارامترهای کنترلی مورد استفاده در سناریوی مسیر مرجع دایره‌ای برای تمامی کنترل‌کننده‌های سینماتیکی و دینامیکی مطابق جدول ۳ می‌باشد.

جدول (۳): پارامترهای کنترل‌کننده برای تعقیب مسیر دایره‌ای.

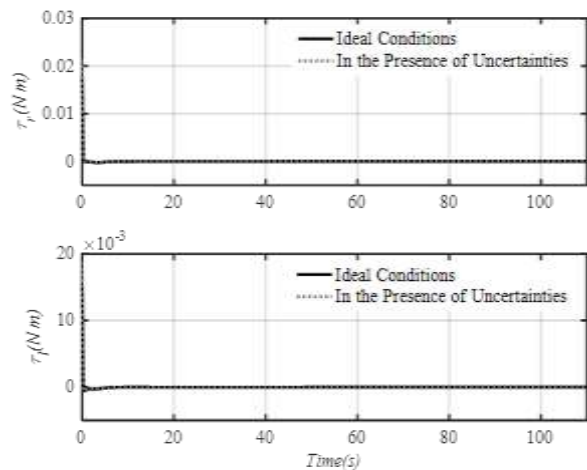
مقدار	پارامتر
۰/۱۵, ۰/۰۳, ۱/۶	k_1, k_2, k_3
۲, ۲	γ_1, γ_2
۰/۱, ۰/۱	μ_1, μ_2
۱۲, ۲	$\varepsilon_1, \varepsilon_2$
۰/۰۱, ۰/۲۲	λ_1, λ_2
۱, ۱	σ_1, σ_2
۲, ۲	ω_1, ω_2

۶-۲-۱- کنترل‌کننده پسگام

نتایج این شبیه‌سازی نیز در دو حالت ایده‌آل و همچنین در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری ارائه شده است که عدم قطعیت‌های مذکور به صورت معادلات (۵۰) به سامانه حلقه بسته اعمال شده است. در شکل ۱۲ مشخص است که ربات از خارج از مسیر وارد مسیر دایره‌ای شده است و مسیر مرجع را تعقیب می‌کند. در شکل ۱۳ خطای متغیرهای حالت نمایش داده شده است. خطای تمام متغیرهای حالت سامانه توسط کنترل‌کننده پسگام جبران و به صفر همگرا شده است. در شکل ۱۴ سیگنال‌های کنترل تولیدشده توسط کنترل‌کننده نمایش داده شده است. سیگنال‌های کنترل تولید شده برای ربات منطقی هستند. در این شبیه‌سازی مشاهده می‌شود که علی‌رغم سرعت خطی منفی و همچنین اختلاف زاویه اولیه قابل توجه، کنترل‌کننده در حالت ایده‌آل و همچنین در حضور عدم قطعیت‌های



شکل (۱۰): خطاهای تعقیب در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۱۱): سیگنال‌های کنترل در حالت ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، هر سه کنترل‌کننده در همگرا کردن خطای تعقیب به صفر موفق عمل کردند و نسبت به عدم قطعیت پارامتری نیز مقاوم هستند. باید توجه داشت که مسئله شبیه‌سازی شده مسئله‌ای بود که در محدوده عملکردی هر سه کنترل‌کننده قرار داشت و پاسخ مشاهده شده مطابق انتظار بوده است.

۶-۲-۲- مسیر مرجع دایره‌ای

برای بررسی دقیق‌تر قدرت کنترل‌کننده‌های پیشنهادی و مقایسه آن‌ها به بررسی مسئله تعقیب برای مسیر و شرایط اولیه‌ای متفاوت می‌پردازیم. در این سناریو مسیر دایره‌ای () به عنوان مسیر مرجع در نظر گرفته شده است و ربات باید از شرایط اولیه () خود را به مسیر برساند و مسیر را تعقیب کند.

۶-۲-۲- کنترل کننده مد لغزشی

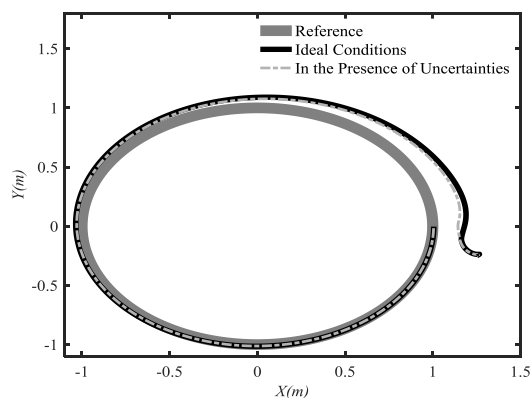
برای بررسی بیشتر عملکرد کنترل کننده مد لغزشی و همچنین مقایسه پذیر بودن شبیه‌سازی‌ها، عملکرد کنترل کننده مد لغزشی در مسیر دایره‌ای (۷۰) با شرایط اولیه (۷۱) شبیه‌سازی شده است.

در شکل ۱۵ مسیر ربات و همچنین نحوه جبران خطا و ورود ربات به مسیر مرجع مشخص است. اما همان‌طور که از شکل مشخص است، ربات نتوانسته ربات مرجع را به شکل صحیح تعقیب کند. با توجه به دایره‌ای بودن مسیر، این مهم فقط از انتهای مسیر قابل برداشت است. برای درک بهتر ناموفق بودن ربات در تعقیب ربات مرجع می‌توان به شکل ۱۶ اشاره کرد که در آن خطای متغیرهای حالت گزارش شده است. همان‌طور که از شکل قابل برداشت است، خطاهای تعقیب به صفر همگرا نشده‌اند و کنترل کننده قادر به همگرا کردن نقاط Q از ربات و ربات مرجع نبوده است. در شکل ۱۷ نیز سیگنال‌های کنترل تولیدشده توسط کنترل کننده مد لغزشی نمایش داده شده است که در آن سیگنال‌های کنترل تولیدشده، در محدوده منطقی محرک‌های ربات قرار دارند.

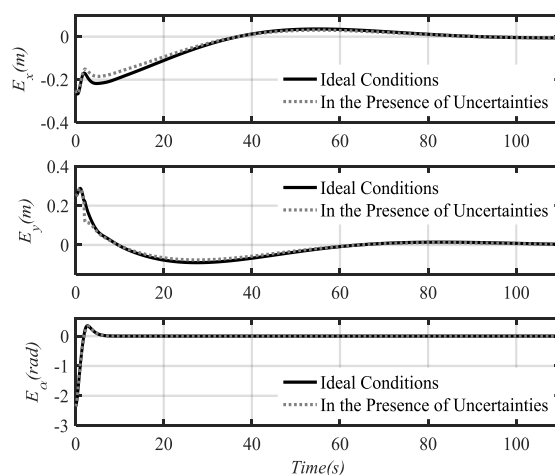
باید توجه داشت کنترل کننده مد لغزشی پیشنهادی ضمانتی در مورد همگرایی نقاط Q از ربات و ربات مرجع نمی‌دهد و تنها تضمین می‌کند نقاط P از ربات و ربات مرجع همگرا شوند. همگرایی نقاط Q مطابق معادله (۳۳) تنها زمانی صورت می‌گیرد که خطای جهت‌گیری بین ربات و ربات مرجع به صفر همگرا شود. با توجه به شکل ۱۶ واضح است، این مهم محقق نشده است.

برای درک بهتر سناریوی اتفاق افتاده در شبیه‌سازی ارائه شده، به بررسی خطای نقطه P می‌پردازیم. همان‌طور که از شکل قابل ملاحظه است، خطای نقطه P در هر دو محور به صفر همگرا شده است. به عبارت دیگر کنترل کننده تضمین خود را برآورده کرده است اما با سرعت خطی مثبت. به همین دلیل ربات با اختلاف زاویه‌ای نزدیک به π (rad) ربات

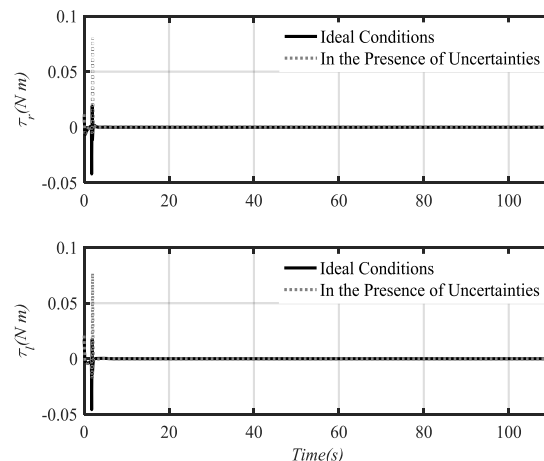
پارامتری قادر به هدایت ربات به سمت مسیر مرجع بوده است و خطاهای تعقیب را به صفر همگرا کرده است.



شکل (۱۱): مسیر ربات در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری

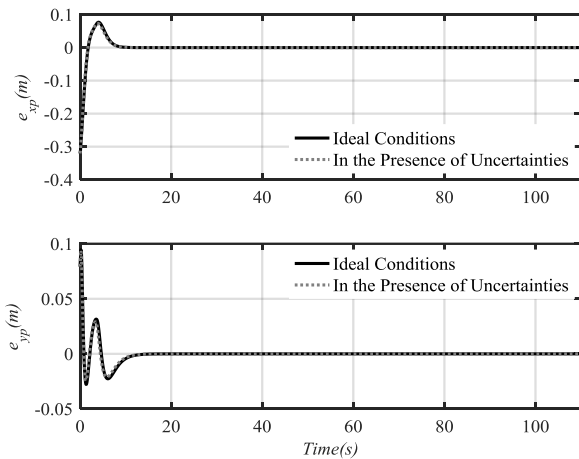


شکل (۱۲): مسیر ربات در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری

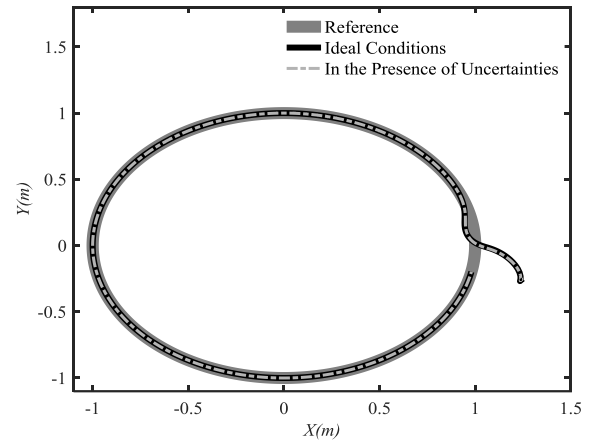


شکل (۱۳): سیگنال‌های کنترل در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

مرجع را دنبال کرده است و این امر منجر به عدم تعقیب صحیح ربات مرجع توسط ربات شده است.



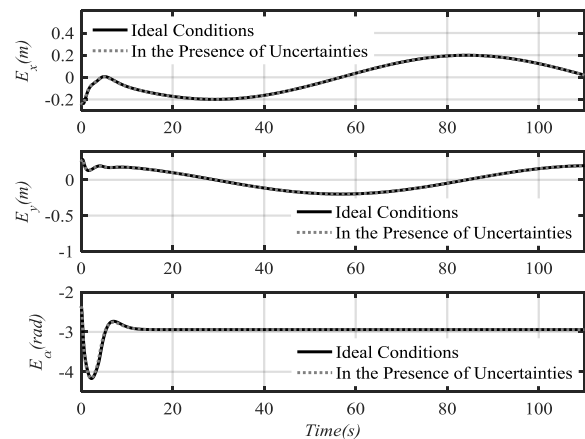
شکل (۱۸): خطاهای تعقیب نقطه P در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۱۵): مسیر ربات در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

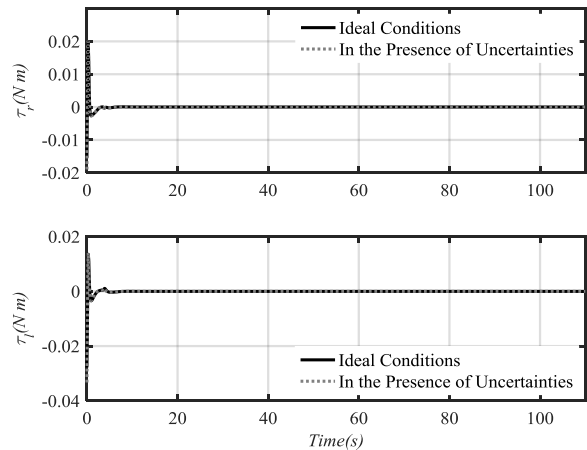
۶-۲-۳- کنترل کننده خطی ساز پسخور

برای بررسی بیشتر عملکرد کنترل کننده خطی ساز پسخور، عملکرد این کنترل کننده نیز در مسیر دایره‌ای (۷۰) با شرایط اولیه (۷۱) شبیه‌سازی شده است. باید توجه داشت اختلاف زاویه اولیه ربات از ربات مرجع خارج از بازه $|\epsilon_3| < \frac{\pi}{2}$ است و این کنترل کننده قادر نخواهد بود تضمین‌های پایداری خود را برآورده کند.



شکل (۱۶): خطاهای تعقیب در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

در شکل ۱۹ مسیر ربات و همچنین نحوه جبران خطا و ورود ربات به مسیر مرجع ترسیم شده است. در شکل ۲۰ خطای متغیرهای حالت ارائه شده است. در این شکل مشخص است که اگر چه ربات مرجع را دنبال می‌کند اما این تعقیب با π (rad) اختلاف زاویه نسبت به ربات مرجع صورت می‌پذیرد. در صورتی که اگر شرایط اولیه در محدوده زاویه‌ای مجاز این کنترل کننده قرار داشت، خطای تمامی متغیرهای حالت ربات از ربات مرجع به صفر همگرا می‌شد. در شکل ۲۱ سیگنال‌های کنترل تولیدشده توسط کنترل کننده خطی ساز پسخور نمایش داده شده است.



شکل (۱۷): سیگنال‌های کنترل در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

همان‌طور که در نتایج قابل ملاحظه است، هر سه طراحی ارائه شده، مسیر مرجع سهمی (۵۱) با شرایط اولیه (۵۲) را به خوبی دنبال کردند. باید توجه داشت که این شبیه‌سازی محدودیت‌های کنترل کننده‌های مد لغزشی و خطی ساز پسخور را رعایت کرده است. اما مسیر دایره‌ای (۷۰) با شرایط اولیه (۷۱) مسئله‌ای است که در محدوده عملکردی کنترل کننده‌های مد لغزشی و خطی ساز پسخور نیست که مطابق انتظار نتایج شبیه‌سازی هم برتری کنترل کننده

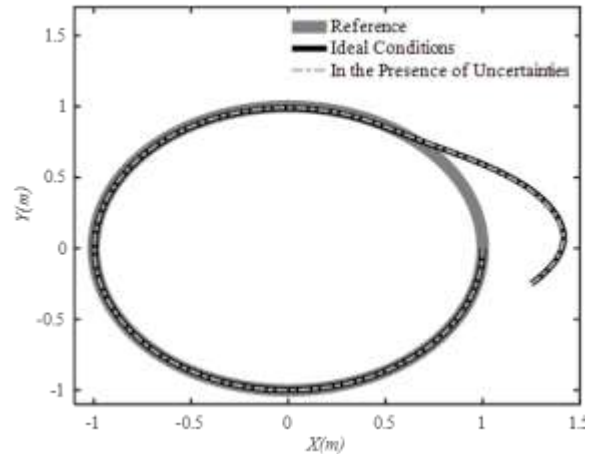
جدول (۴): ناحیه‌های عملکردی کنترل‌کننده‌ها

کنترل‌کننده	محدوده عملکردی
پسگام	کل فضا
مد لغزشی	$u_{1r} \geq 0$
خطی‌ساز پسخور	$ e_3 < \frac{\pi}{2}$

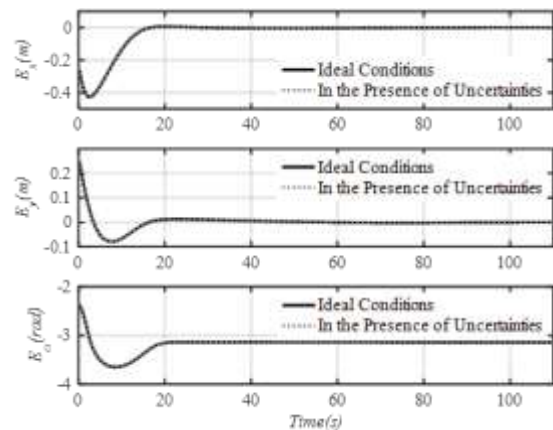
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا مدل سینماتیکی ربات چرخ‌دار با رانش نفاذی بیان شده است. سپس برای اولین بار کنترل‌کننده پسگامی نوین ارائه شده است که به صورت سراسری پایداری تمام متغیرهای حالت را تضمین می‌کند. پس از آن کنترل‌کننده مد لغزشی ارائه شده است، که همگرایی نقطه‌ای از ربات را به نقطه متناظر آن در ربات مرجع و همچنین کران‌دار بودن تمام متغیرهای حالت سامانه را تضمین می‌کند، اما به علت عدم ارائه تضمین همگرایی برای زاویه ربات و ربات مرجع تنها برای مسیرهای مرجعی پاسخ مناسب دارد که سرعت خطی آن‌ها غیرمنفی ($u_{1r} \geq 0$) باشد. به عبارتی کنترل‌کننده مد لغزشی در انجام ۵۰ درصد از ماموریت‌های محوله ناتوان است. سپس کنترل‌کننده خطی‌ساز پسخور طراحی شده است. این کنترل‌کننده پایداری تمام متغیرهای حالت سامانه را تضمین می‌کند اما برای $|e_3| < \frac{\pi}{2}$ معتبر است. از این رو با محدودیت دامنه جذب همراه است. در واقع کنترل‌کننده خطی‌ساز پسخور پیشنهادی برای ۵۰ درصد از مسائل که مربوط است به $|e_3| \geq \frac{\pi}{2}$ پاسخ مناسبی نخواهد داشت. برای بررسی هرچه واقعی‌تر مسئله کنترل‌کننده‌ای با استفاده از روش مد لغزشی در سطح دینامیکی برای تولید سرعت‌های مورد نیاز کنترل‌کننده‌های سینماتیکی توسط گشتاور چرخ‌های چپ و راست طراحی شد. در ادامه برای بررسی صحت عملکرد کنترل‌کننده‌های ارائه‌شده و همچنین بررسی قوام کنترل‌کننده‌ها، شبیه‌سازی‌ها در شرایط ایده‌آل و همچنین در حضور نامعینی‌های پارامتری ارائه شده است. این نامعینی‌های پارامتری در معادلات دینامیکی سامانه اعمال شده‌اند. شبیه‌سازی‌ها صحت عملکرد کنترل‌کننده‌های ارائه شده را تایید می‌کند و همچنین برتری کنترل‌کننده پسگام

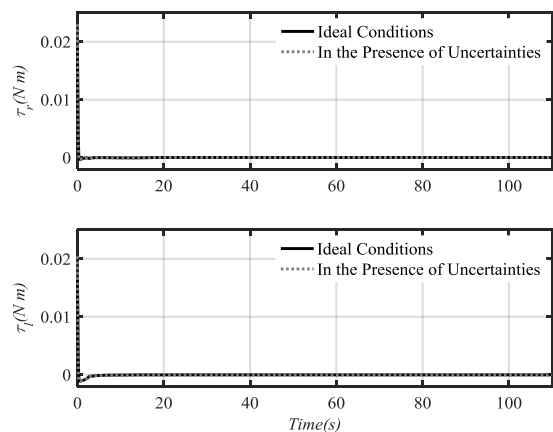
پسگام نسبت به دو کنترل‌کننده دیگر را تایید می‌کند. نتیجه‌گیری از نتایج شبیه‌سازی را می‌توان به شکل جدول جمع‌بندی نمود.



شکل (۱۹): مسیر ربات در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.



شکل (۲۰): خطاهای تعقیب در شرایط ایده‌آل و نامعینی پارامتری.



شکل ۲۱: سیگنال‌های کنترل در حالت ایده‌آل و نامعینی پارامتری.

11. Klančar, G. and Škrjanc, I. "Tracking-Error Model-Based Predictive Control for Mobile Robots in Real Time", *Rob. and auto. sys.* Vol. 55, No. 6, pp. 460-469, 2007.
12. Škrjanc, I. and Klančar, G., "A Comparison of Continuous and Discrete Tracking-Error Model-Based Predictive Control for Mobile Robots", *Rob. and auto. sys.* Vol. 87, No. 10, pp. 177-187, 2017.
13. Ye, J. "Adaptive Control of Nonlinear PID-Based Analog Neural Networks for a Nonholonomic Mobile Robot", *Neuro.* Vol. 71, No. 7, pp. 1561-1565, 2008.
14. Fierro, R. and Lewis, F. L., "Control of a Nonholonomic Mobile Robot: Backstepping kinematics into dynamics", *J. of Rob. Sys.* Vol. 14, No. 3, pp. 149-163, 1997.
15. Ye, J. "Tracking Control for Nonholonomic Mobile Robots: Integrating the Analog Neural Network into the Backstepping Technique", *Neuro.* Vol. 71, No. 16, pp. 3373-3378, 2008.
16. Park, B. S., Yoo, S. J., Park, J. B. and Choi, Y. H. "Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots with Model Uncertainty", *IEEE Trans. on Cont. Sys. Tech.* Vol. 17, No. 1, pp. 207-214, 2009.
17. Das, T. and Kar, I. N. "Design and Implementation of an Adaptive Fuzzy Logic-Based Controller for Wheeled Mobile Robots", *IEEE Trans. on Cont. Sys. Tech.* Vol. 14, No. 3, pp. 501-510, 2006.
18. Martins, F. N., Celeste, W. C., Carelli, Sarcinelli-Filho, R., M. and Bastos-Filho, T. F. "An Adaptive Dynamic Controller for Autonomous Mobile Robot Trajectory Tracking", *Cont. Eng. Prac.* Vol. 16, No. 11, pp. 1354-1363, 2008.
19. Chen, C. Y., Li, T. H. S., Yeh, Y. C. and Chang, C. C., "Design and Implementation of an Adaptive Sliding-Mode Dynamic Controller for Wheeled Mobile Robots", *Mech.* Vol. 19, No. 2, pp. 156-166, 2009.
20. Khalaji, A. K. and Moosavian, S. A. A. "Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot", *IEEE/ASME Trans. on Mech.* Vol. 19, No. 3, pp. 943-953, 2014.
21. Sangdani, M. H. and Tavakolpour-Saleh, A. R. "Modeling and Control of a Vision-Based Target Tracker Robot with Active Force Control Capability", *Aero. Mech. J.* Vol. 13, No. 4, pp. 89-98, 2017.
22. Khalaji, A. K. and Moosavian, S. A. A., "Design and Implementation of a Fuzzy Sliding Mode Control Law for a Wheeled Robot Towing a

پیشنهادی در حوزه جذب را نسبت به دو کنترل کننده دیگر نمایان می کند.

۷- مراجع

1. Moosavian, S. A. A., Kalantari, A., Semsarilar, H., Aboosaeedan, E. and Mihankhah, E. "ResQuake: a Tele-Operative Rescue Robot", *J. of mech. des.* Vol. 131, No. 8, pp. 081005-0810016, 2009.
2. Russo, S., Harada, K., Ranzani, T., Manfredi, L., Stefanini, C., Menciassi, A. and Dario, P. "Design of a Robotic Module for Autonomous Exploration and Multimode Locomotion", *IEEE/ASME Trans. on Mech.* Vol. 18, No. 6, pp. 1757-1766, 2013.
3. Champion, G., Bastin, G. and Dandrea-Novel, B. "Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots", *IEEE trans. on rob. and auto.*, Vol. 12, No. 1, pp. 47-62, 1996.
4. Bidgoli, M. R., Khalaji, A. K. and Moosavian, S. A. "Trajectory Tracking Control of a Wheeled Mobile Robot by a Non-Model-Based Control Algorithm Using PD-Action Filtered Errors", *Mod. Mech. Eng.* Vol. 14, No. 12, 2015.
5. Keymasi, A. Khalaji, R. and Moosavian, S. A. A. "Adaptive Sliding Mode Control of a Wheeled Mobile Robot Towing a Trailer", *Proc. of the Inst. of Mech. Eng., Part I: J. of Sys. and Cont. Eng.* Vol. 229, No. 2, pp. 169-183, 2015.
6. Wang, D. and Xu, G. "Full-State Tracking and Internal Dynamics of Nonholonomic Wheeled Mmobile Robots", *IEEE/ASME Trans. on mech.* Vol. 8, No. 2, pp. 203-214, 2003.
7. Luca, A. D., Oriolo, G. and Samson, C. "Feedback Control of a Nonholonomic Car-Like Robot", Springer, Berlin, Heidelberg, Germany, 1998.
8. Weigu, W., Huitang, C. and Yuejuan, W., "Backstepping Design for Path Tracking of Mobile Robots", in *Int. Rob. and Sys. IROS'99. Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. USA*, 1999.
9. Chwa, D., Seo, J. H., Kim, P. and Choi, J. Y. "Sliding Mode tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots", *Proc. Conf. American. Cont. IEEE. Anchorage, AK, USA*, 2002.
10. Wang, T. Y., Tsai, C. C. and Pang, J. L. "Nonlinear Regulation and Path Tracking of a Wheeled Mobile Robot in Polar Coordinates", *J. of the Chin. Inst. of Eng.*, Vol. 28, No. 6, pp. 925-933, 2005.

Trailer”, Mod. Mech. Eng. Vol. 14, No. 4, pp. 81-88, 2014.

23. Olfati, R. S. “Global Configuration Stabilization for the VTOL Aircraft with Strong Input Coupling”, IEEE trans. on Auto. Cont. Vol. 47, No. 11, pp. 1949-1952, 2002.