

ارتعاشات آزاد و اجباری تیر چرخان از جنس FGM با لایه پیزوالکتریک با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول

علی اصغر جعفری^۱ و محمد سعید جعفری^۲

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۰۲)

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد و اجباری تیر چرخان از جنس FGM با لایه پیزوالکتریک با شرایط مرزی یکسرگیردار و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفته است. با محاسبه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سازه و به کار بردن روش ریلی-ریتز و به کمک سری‌های چبیشف، فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده است. نتایج نشان داده است که با حضور سرعت زاویه‌ای و یا اضافه شدن یک لایه پیزوالکتریک فرکانس طبیعی تیر افزایش می‌یابد. همچنین ملاحظه شد که ازدیاد ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک و نیز افزایش شعاع هاب باعث افزایش فرکانس طبیعی گردیده است. از طرف دیگر پاسخ دینامیکی تیر در اثر شرایط اولیه جابجایی و سرعت بررسی شده است. نتایج حاصل تطابق خوبی با نتایج حاصل از مرجع معتبر و نرم‌افزار Abaqus داشته است. در بخش ارتعاش اجباری اثر نیروهای هارمونیک، پله‌ای و شبه ضربه روی خیز تیر بررسی شده است. نتایج نشان داده است که با افزایش سرعت زاویه‌ای تیر و همچنین افزایش ولتاژ لایه پیزوالکتریک، دامنه ارتعاشات تیر FGM با لایه پیزوالکتریک کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد و اجباری، تیر چرخان، FGM، لایه پیزوالکتریک، تئوری برشی مرتبه اول، فرکانس طبیعی

Free and forced vibration of rotating FGM beam with piezoelectric layer using FSDT

A. A. Jafari¹ and M. S. Jafari²

Mechanical Engineering Department

K.N.Toosi University

(Received: 07/February/2019 ; Accepted: 22/April/2019)

ABSTRACT

The free and forced vibration of rotating FGM beam with piezoelectric layer using first order shear deformation theory and fixed-free boundary condition have been studied in this article. Rayleigh-Ritz method with Chebyshev series are applied to find the natural frequencies. The results showed the natural frequencies are increased as a result of increasing angular velocity or adding piezoelectric layer. More increasing the natural frequencies are caused by applying the voltage on piezoelectric layer or by increasing hub radius. Moreover, the dynamic response of the beam cause by initial conditions is studied. The frequency of the dynamic response was very near to the first natural frequency of the beam. The results had a good agreement with known reference and Abaqus software results. Also, the influence of harmonic, step and impulse force on forced vibration of the beam has been studied. Decreasing the vibration amplitude of the beam is caused by applying angular velocity and piezoelectric voltage.

Keywords: Free and forced vibration, Rotating beam, FGM, Piezoelectric layer, FSDT, Natural frequency

۱- استاد (نویسنده پاسخگو): ajafari@kntu.ac.ir

۲- کارشناس ارشد: saeid_jafari@email.kntu.ac.ir

۱- مقدمه

ساختارهای انعطاف پذیر که دارای حرکت دورانی می باشند، در بسیاری از صنایع مانند پره های هلیکوپتر، توربین های گازی، سازه های فضایی مانند آنتن ماهواره ها و صفحات خورشیدی کاربرد دارند و لذا تحلیل این سازه ها و بررسی ویژگی های مودال آن ها ضروری می باشد. در واقع امروزه نیاز به تحلیل ویژگی های مودال این سیستم ها بیشتر از گذشته شده است زیرا مهندسان به طراحی ساختارهایی با وزن کم روی آورده اند و کم شدن وزن ساختار سبب می شود که سیستم ها پاسخ دینامیکی بزرگی به ازای تحریک کوچکی داشته باشند. ویژگی های مودال ساختارهای انعطاف پذیر هنگامی که تحت حرکت دورانی قرار می گیرند به طور قابل ملاحظه ای تغییر می کنند. به طور مثال می توان به تیر یک سر گیردار اشاره نمود که وقتی تحت حرکت دورانی قرار می گیرد به علت نیروی مرکزگرا و تغییر سختی آن، فرکانس های آن تغییر می کنند که به این پدیده اثر سختی دورانی ناشی از سرعت دورانی گفته می شود.

به دلیل کاربرد فراوان تیرها در صنایع مختلف، تحقیقات وسیعی روی ارتعاش آن ها انجام شده است. در سال ۱۹۲۰ ساوتسول و گوگ [۱] به صورت تحلیلی فرکانس های تیر چرخان را به دست آوردند. سی چی هانسل [۲] برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی به صورت دقیق تر، معادله دیفرانسیل جزئی که ارتعاشات خمشی تیر را مورد نظر قرار داشت را به روش ریلی-ریتز به دست آورد. یو و شین [۳] معادلات حرکت تیر یکسرگیردار چرخان با در نظر گرفتن اثر همزمان کشیدگی و خمش تیر را به کمک روش انرژی به دست آورده و حل نمودند. نتایج نشان داده است که این عوامل اثر زیادی روی فرکانس طبیعی دارد. لین و هیساو [۴] ارتعاش تیر چرخان بر اساس تئوری برشی مرتبه اول را با استفاده از سری پاور محاسبه کردند. همچنین تاثیر تغییر شعاع هاب روی فرکانس های طبیعی را مورد بررسی قرار دادند. چوی و همکاران [۵] ارتعاش تیر چرخان با زاویه پیچش اولیه از جنس کامپوزیت و کنترل با لایه پیزوالکتریک را به روش المان محدود محاسبه نمودند و نشان دادند که تغییر زاویه پیچش اولیه، موجب تغییر پاسخ و فرکانس طبیعی می شود. زرین زاده و همکاران [۶] ارتعاش تیر چرخان مخروطی شکل از جنس FGM را مورد بررسی

قرار دادند. این تحقیق برای ۶ شرط مرزی مختلف و با استفاده از روش المان محدود انجام گرفته است. همچنین اثر جرم متمرکز و شعاع هاب را بر فرکانس طبیعی را نیز مورد مطالعه قرار دادند. فتح آبادی [۷] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر از جنس FGM با لایه های پیزوالکتریک را بر مبنای تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار داد. وی اثر ضریب لاغری، ضریب بهره، ضخامت لایه و پیزوالکتریک بر روی فرکانس پایه را تحقیق نمود. فانگ و ژو ارتعاش آزاد تیر چرخان از جنس FGM در راستای محوری را با استفاده از روش ریلی ریتز [۸] و چبیشف ریتز [۹] مورد بررسی قرار دادند. آن ها نتایج را برای ۶ شرایط مرزی مورد بررسی قرار دادند. اکسنسر و آیدوگندو [۱۰] ارتعاش آزاد تیر چرخان از جنس کامپوزیت بر اساس تئوری های کلاسیک و برشی مرتبه اول و با استفاده از روش ریتز مورد بررسی قرار دادند. ژیانگ و یانگ [۱۱] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر تیموشنکو از جنس FGM با در نظر گرفتن انتقال حرارت را تحلیل نمودند. سیمسک و کوکاترک [۱۲] ارتعاش اجباری تیر FGM تحت بار متمرکز متحرک هارمونیک را بررسی نمودند. جعفری و همکاران [۱۳] ارتعاش اجباری تیر از جنس FGM تحت تاثیر بار متحرک با استفاده از روش ترکیبی ریتز و DQM را مورد بررسی قرار دادند و تاثیر سرعت های مختلف و اینرسی بار متحرک را روی پاسخ سیستم مورد مطالعه قرار دادند.

در این مقاله، در ابتدا ارتعاشات آزاد تیر چرخان از جنس FGM با لایه پیزوالکتریک با شرایط مرزی یکسرگیردار و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفته است. سپس در بخش ارتعاش اجباری نیز پاسخ سازه به ازای ورودی های هارمونیک، پله، ضربه و متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. نوآوری و وجه تمایز بین این مقاله و مقاله های مشابه در چهار مورد بیان می شود:

- ماده FGM به کاررفته در تیر چرخان در جهت ضخامت تغییر می کند.
- قرار دادن لایه پیزوالکتریک روی تیر چرخان و بررسی تاثیری که روی فرکانس طبیعی و پاسخ سازه می گذارد.
- پاسخ دینامیکی ارتعاش آزاد تیر مورد بررسی در اثر شرایط اولیه جابجایی و سرعت.

ضرایب c_{ij} را طبق روابط الاستیسته به صورت رابطه (۴) می توان نوشت:

$$c_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad c_{55} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (4)$$

E و ν در روابط فوق به ترتیب مدول الاستیسته و ضریب پواسون تیر از جنس FGM است که تغییرات آن ها در راستای Z ضخامت می باشد. فرض می شود که توزیع جزء حجمی ماده FGM از نوع توزیع توانی و مرتبه آن $n = 2$ باشد:

$$E(z)_{FGM} = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + E_m \quad (5)$$

$$\nu(z)_{FGM} = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \nu_m$$

پارامتر h ، ضخامت تیر می باشد. در این مقاله زیروند m و c به ترتیب نماد فلز (آلومینیوم) و سرامیک (زیرکونیوم اکسید) می باشد:

همچنین چگالی (ρ) همانند رابطه E و ν برای جنس FGM تعریف می شود.

۲-۱- محاسبه انرژی پتانسیل [۱۴]

رابطه کلی انرژی پتانسیل برای تیر چرخان تیموشنکو به صورت رابطه (۶) می باشد:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L A_2 (\dot{\theta})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L Q (\dot{w})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L C (w' - \theta)^2 dx \quad (6)$$

که در رابطه فوق، A_2 و C به این صورت تعریف می شود:

$$A_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{11}(z^2) dA, \quad C = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k c_{55} dA \quad (7)$$

k نیز ضریب تصحیح تنش برشی است.

همچنین $Q(x)$ نیروی گریز از مرکز می باشد که در اثر چرخش تیر با سرعت زاویه ای Ω به وجود آمده است:

$$Q(x) = \int_x^L B_1 \Omega^2 (R + x) dx \quad (8)$$

$$B_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dA$$

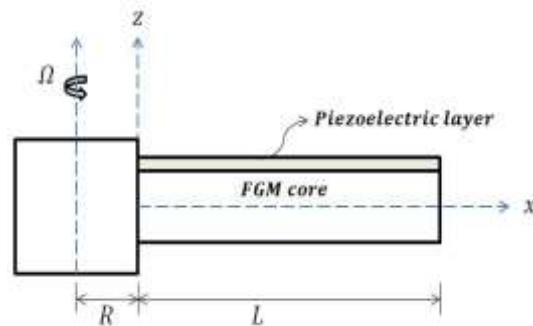
۲-۲- محاسبه انرژی جنبشی [۱۴]

رابطه کلی انرژی جنبشی برای تیر چرخان تیموشنکو به صورت رابطه (۹) می باشد:

• پاسخ دینامیکی ارتعاش اجباری تیر چرخان به ازای ورودی های مختلف.

۲- ارائه مدل های فیزیکی و ریاضی و استخراج معادلات

شکل ۱، یک تیر یکسرگیردار چرخان با لایه پیزوالکتریک با شعاع هاب R را نشان می دهد.



شکل (۱): تیر یکسرگیردار چرخان با لایه پیزوالکتریک.

رابطه کلی تنش و کرنش بر اساس قانون هوک برای یک ماده ناهمسانگرد به صورت رابطه (۱) می باشد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

c_{ij} ضرایب الاستیسته ماده می باشند که طبق قانون هوک تنش را به کرنش مربوط می سازند. در معادلات تیر تیموشنکو، کرنش در راستای X (ε_{xx}) و کرنش برشی در صفحه XZ (γ_{xz}) در نظر گرفته می شود و بقیه تانسورها صفر فرض می شود:

$$\sigma_{xx} = c_{11} \varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = c_{55} \gamma_{xz} \quad (2)$$

حال از روابط کرنش بر حسب جابجایی به دست آمده در مرجع [۱۴] برای تیر چرخان مدل شده بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، استفاده می شود:

$$\varepsilon_{xx} = u_0' - z\dot{\theta} + \frac{(\dot{w})^2}{2}, \quad \gamma_{xz} = \dot{w} - \theta \quad (3)$$

که در آن، Z فاصله هر نقطه از لایه میانی، u_0 جابجایی طولی لایه میانی، w جابجایی در راستای خمش تیر و θ چرخش در اثر خمش تیر می باشد. همچنین \dot{w} ، $\dot{\theta}$ و \dot{u}_0 مشتقات پارامترهای مذکور نسبت به X می باشند.

توزیع پتانسیل الکتریکی درون عملگر به صورت یک تابع مرتبه اول [۱۶] باشد که در رابطه (۱۵) آورده شده است:

$$\phi = \phi_0 + z\phi_1 \quad (15)$$

با توجه به این که در عملگر وجود اختلاف پتانسیل الزامی است، لذا شرایط مرزی الکتریکی زیر برای آن در نظر گرفته می شود:

$$\phi = 0 \quad \text{at} \quad z = \frac{h}{2} \quad (16)$$

$$\phi = V_0 \quad \text{at} \quad z = h_p + \frac{h}{2}$$

که در آن V_0 ولتاژ اعمالی خارجی و h_p نیز ضخامت لایه پیزوالکتریک است. حال با اعمال شرایط مرزی (۱۶) در رابطه (۱۵)، مقادیر ϕ_0 و ϕ_1 محاسبه می گردد و ϕ به صورت رابطه (۱۷) حاصل می شود:

$$\phi = -\frac{V_0}{2} + \left(\frac{V_0}{h_p}\right)z \Rightarrow E_z = -\frac{V_0}{h_p} \quad (17)$$

رابطه انرژی پتانسیل مکانیکی به صورت رابطه (۱۸) می باشد:

$$U_m = \iiint_V \frac{(\sigma_{xx}\epsilon_{xx})}{2} dV = \iiint_V \frac{(c_{11}\epsilon_{xx} - e_{31}E_z)(\epsilon_{xx})}{2} dV \quad (18)$$

که با ساده سازی آن، در نهایت U_m به صورت رابطه (۱۹) بازنویسی می شود:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^L \hat{A}_2(\dot{\theta})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \hat{Q}(\dot{w})^2 dx - \frac{1}{4} \int_A \int_0^L (e_{31}E_z)(\dot{w})^2 dx dA \quad (19)$$

که در رابطه فوق، \hat{A}_2 به این صورت تعریف می شود:

$$\hat{A}_2 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} c_{11}^{piezo} z^2 dA \quad (20)$$

همچنین $\hat{Q}(x)$ نیروی گریز از مرکز می باشد که در اثر چرخش تیر با سرعت زاویه ای Ω به وجود آمده است و رابطه آن به صورت رابطه (۲۱) تعریف می شود:

$$\hat{Q}(x) = \int_x^L \hat{B}_1 \Omega^2 (R+x) dx, \quad \hat{B}_1 = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho^{piezo}(z) dA \quad (21)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{v} \cdot \vec{v}) dV = \frac{1}{2} \int_0^L [B_2(\dot{\theta})^2 + B_2\Omega^2(\theta)^2 + B_1(\dot{w})^2] dx \quad (9)$$

که در رابطه فوق، \vec{v} و ρ به ترتیب بردار سرعت و چگالی می باشد. همچنین B_1 و B_2 به این صورت تعریف می شود:

$$(B_1, B_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)(1, z^2) dA \quad (10)$$

۳-۲- روابط حاکم بر لایه پیزوالکتریک

فرم اندیسی تنش و جابجایی الکتریکی برای لایه پیزوالکتریک به کاررفته در تیر به صورت رابطه های (۱۱) می باشد [۷]:

$$\sigma_{xx} = c_{11}^{piezo} \epsilon_{xx} - e_{31}E_z \quad (11)$$

$$D_z = e_{31}\epsilon_{xx} + \epsilon_{33}E_z$$

که در رابطه های (۱۱) σ_{xx} مؤلفه تنش، ϵ_{xx} مؤلفه کرنش، E_z شدت میدان الکتریکی، c_{11} تانسور الاستیسیته مواد پیزوالکتریک در یک میدان الکتریکی ثابت، e_{31} ثابت کرنش پیزوالکتریک، ϵ_{33} ثابت دی الکتریک و D_z جابجایی الکتریکی می باشد.

۳-۲-۱- محاسبه انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک

برای لایه پیزوالکتریک علاوه بر انرژی پتانسیل مکانیکی (U_m)، انرژی پتانسیل الکتریکی (U_e) نیز باید در نظر گرفته شود. لذا با توجه به این تعاریف [۱۵]:

$$U = U_m - U_e \quad (12)$$

رابطه کلی انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک به صورت رابطه (۱۳) می باشد:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\{\sigma\}^T \{\epsilon\}) dV - \frac{1}{2} \iiint_V (\{D\}^T \{E\}) dV = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx}\epsilon_{xx}) dV - \frac{1}{2} \iiint_V (D_z E_z) dV$$

E_z شدت میدان الکتریکی است و رابطه کلی آن به این صورت تعریف می شود [۷]:

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (14)$$

که در رابطه فوق، ϕ توزیع پتانسیل الکتریکی می باشد. برای به دست آوردن رابطه E_z ، ابتدا می توان فرض کرد که

۳- ارتعاشات آزاد

در این بخش فرکانس‌های طبیعی و پاسخ سازه به ازای شرایط اولیه برای سازه مورد نظر به ترتیب آورده می‌شود.

۳-۱- محاسبه فرکانس‌های طبیعی

ابتدا با استفاده از تفکیک متغیرها مجهولات مسئله یعنی $w(x, t)$ و $\theta(x, t)$ ، به صورت رابطه (۲۸) بیان می‌شود:

$$w(x, t) = \bar{w}(x)e^{i\omega_n t} \quad (28)$$

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x)e^{i\omega_n t}$$

که در آن، $\bar{w}(x)$ و $\bar{\theta}(x)$ شکل مدها و ω_n فرکانس طبیعی می‌باشد. سپس تابع فانکشنال Π به صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌شود:

$$\Pi = U_{max} - T_{max} = (U^{FGM} + U^{piezo})_{max} - (T^{FGM} + T^{piezo})_{max} \quad (29)$$

U_{max} و T_{max} به ترتیب بیشینه انرژی پتانسیل و بیشینه انرژی جنبشی می‌باشد.

حال شکل مدهای $\bar{w}(x)$ و $\bar{\theta}(x)$ به صورت سری‌هایی معروف به سری چبیشف مفروض می‌شود [۱۸]:

$$\bar{w}(x) = F_w(x) \sum_{i=1}^N c_i P_i(x) \quad (30)$$

$$\bar{\theta}(x) = F_\theta(x) \sum_{i=1}^N d_i P_i(x)$$

که در آن، c_i و d_i ضرایب مجهول شکل مد و N تعداد جملات فرض شده هستند.

همچنین $F_w(x)$ و $F_\theta(x)$ مربوط به شرایط مرزی مختلف می‌باشد که برای شرایط مرزی یکسرگیردار به صورت رابطه (۳۱) می‌باشد:

$$F_w(x) = F_\theta(x) = x \quad (31)$$

از طرف دیگر $P_i(x)$ هم به صورت رابطه (۳۲) تعریف می‌شود:

$$P_i(x) = \cos \left[(i-1) \arccos \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right) \right], \quad x \in [0, L] \quad (32)$$

حال سری‌های چبیشف $\bar{w}(x)$ و $\bar{\theta}(x)$ در رابطه Π جایگذاری می‌شود. روش حل ارتعاش آزاد، استفاده از روش ریلی ریتز می‌باشد که اساس کار آن بهینه‌سازی (مشتق نسبی) تابع فانکشنال Π نسبت به ضرایب شکل مد c_i و d_i

که در رابطه (۲۱) ρ^{piezo} چگالی لایه پیزوالکتریک می‌باشد. همچنین انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۲۲) می‌باشد:

$$U_e = \iiint_V \frac{(D_z E_z)}{2} dV \quad (22)$$

$$= \iiint_V \frac{(e_{31} \epsilon_{xx} + \epsilon_{33} E_z)(E_z)}{2} dV$$

حال با ساده‌سازی رابطه فوق، انرژی پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۲۳) بازنویسی می‌شود.

$$U_e = \frac{1}{4} \int_A \int_0^L (e_{31} E_z)(\dot{w})^2 dx dA \quad (23)$$

در نهایت انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک به دست می‌آید:

$$U^{piezo} = U_m - U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{A}_2(\dot{\theta})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \dot{Q}(\dot{w})^2 dx - \frac{1}{2} \int_A \int_0^L (e_{31} E_z)(\dot{w})^2 dx dA \quad (24)$$

۳-۲- محاسبه انرژی جنبشی لایه پیزوالکتریک

برای محاسبه انرژی جنبشی لایه پیزوالکتریک، مشابه آنچه که برای تیر FGM گفته شد، عمل می‌شود. رابطه کلی انرژی جنبشی به صورت رابطه (۲۵) می‌باشد [۱۴]:

$$T^{piezo} = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{B}_2(\dot{\theta})^2 + \dot{B}_2 \Omega^2(\theta)^2 + \dot{B}_1(\dot{w})^2 dx + cte \quad (25)$$

که در رابطه مذکور، \dot{B}_1 و \dot{B}_2 به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$(\dot{B}_1, \dot{B}_2) = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \rho^{piezo} \cdot (1, z^2) dA \quad (26)$$

۳-۴- انرژی پتانسیل و جنبشی یک تیر چرخان از جنس FGM با لایه پیزوالکتریک

در نهایت برای محاسبه انرژی پتانسیل و جنبشی یک تیر چرخان از جنس FGM با لایه پیزوالکتریک، بایستی انرژی پتانسیل و جنبشی تیر FGM و انرژی پتانسیل و جنبشی لایه پیزوالکتریک را با هم جمع نمود:

$$U = U^{FGM} + U^{piezo} \quad (27)$$

$$T = T^{FGM} + T^{piezo}$$

که در آن، $\bar{w}_i(x)$ و $\bar{\theta}_i(x)$ شکل مدهایی هستند که از ارتعاشات آزاد به دست می آیند. برای این کار، لازم است که در رابطه (۳۵) به ازای هر ω_n معلوم، مجهولات c_i و d_i مربوط به این فرکانس طبیعی به دست آیند. از آنجا که این معادلات همگن هستند، لازم است که مجهولات را برحسب یکی از آن‌ها مانند c_1 محاسبه نمود و سپس از قضیه تعامد مدها برای تعیین c_1 استفاده نمود. $q_i(t)$ نیز توابع زمانی هستند که در ارتعاشات آزاد به صورت تابع هارمونیک (۳۹) تعریف می شود:

$$q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t) \quad (39)$$

ω_i در رابطه (۳۹) همان فرکانس‌های طبیعی می باشد و همچنین ضرایب A_i و B_i نیز از شرایط اولیه به دست می آیند.

۴- ارتعاشات اجباری

در بخش ارتعاش اجباری مشابه ارتعاش آزاد از روش تحلیل مودال استفاده و $w(x, t)$ و $\theta(x, t)$ نیز به صورت سری های (۳۷) و (۳۸) فرض می شود. همان طور که در بخش قبل گفته شد، $\bar{w}_i(x)$ و $\bar{\theta}_i(x)$ شکل مدهایی هستند که از ارتعاشات آزاد به دست می آیند. باید توجه داشت که $q_i(t)$ توابع زمانی هستند که در ارتعاشات اجباری مجهول می باشند. برای به دست آوردن معادلات ارتعاشات اجباری از روش لاگرانژ استفاده می شود [۱۵]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (40)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

که در رابطه فوق، T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، W کار نیروی خارجی و q_i توابع زمانی می باشد. لذا بایستی روابط تغییر مکان (۳۷) و (۳۸) در روابط انرژی پتانسیل و جنبشی (۲۷) و کار نیروی خارجی که در ادامه گفته خواهد شد، جایگذاری شود تا همه روابط انرژی‌ها به صورت تابعی از ترم زمانی مجهول $q_i(t)$ به دست آیند.

W کار نیروی خارجی گسترده در جهت Z می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$W = \int_0^L f \cdot w(x, t) \cdot dx \quad (41)$$

است. برای این کار بایستی مشتق تابع فانکشنال Π نسبت به ضرایب شکل مد c_i و d_i محاسبه شود که در نهایت تعداد $2N$ معادله حاصل می شود:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial d_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (33)$$

با استفاده از معادلات به دست آمده (۲N معادله)، فرم ماتریسی معادلات به صورت رابطه (۳۴) تشکیل می شود:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2N_1} & a_{2N_2} & \dots & a_{2N,2N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (34)$$

که ماتریس فوق را نیز می توان به فرم کلی رابطه (۳۵) بیان کرد:

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \begin{Bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

که $[K]$ ماتریس سختی، $[M]$ ماتریس جرمی و ω_n فرکانس طبیعی سیستم می باشد. حال با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب معادله (۳۵)، معادله فرکانسی درجه $4N$ حاصل می شود:

$$\Rightarrow \det([K] - \omega_n^2 [M]) = 0 \quad (36)$$

و در نهایت با حل معادله فرکانسی فوق، فرکانس‌های طبیعی سیستم (ω_n)، به دست می آید.

۳-۲- پاسخ ارتعاشات آزاد سازه به ازای شرایط اولیه

در این بخش پاسخ ارتعاش آزاد تیر یکسرگیردار چرخان با لایه پیزوالکتریک به ازای شرایط اولیه مختلف مورد بررسی قرار می گیرد.

بر اساس روش تحلیل مودال ابتدا $w(x, t)$ و $\theta(x, t)$ به صورت سری های (۳۷) و (۳۸) فرض می شود:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i(x) q_i(t) \quad (37)$$

$$= \bar{w}_1 q_1 + \bar{w}_2 q_2 + \dots + \bar{w}_n q_n$$

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i(x) q_i(t) \quad (38)$$

$$= \bar{\theta}_1 q_1 + \bar{\theta}_2 q_2 + \dots + \bar{\theta}_n q_n$$

برای اطمینان از روش به کاررفته در این مقاله، از نتایج سینا و همکاران [۱۷] که مربوط به یک تیر FGM با رابطه توانی مشابه رابطه (۵) و مرتبه $n = 0/3$ می باشد، استفاده شده است. در مقاله [۱۷] که بر اساس پارامترها و نتایج بدون بعد تنظیم شده است از رابطه (۴۴) برای بی بعدسازی فرکانس طبیعی پایه استفاده گردیده است.

$$\bar{\omega} = \omega_n L^2 \sqrt{\frac{I_1}{h^2 \cdot I_2}} \quad (44)$$

که در رابطه (۴۴)، $\bar{\omega}$ فرکانس طبیعی بی بعد و I_1 و I_2 به صورت روابط (۴۵) و (۴۶) تعریف شده است:

$$I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \quad (45)$$

$$I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz \quad (46)$$

لذا در ابتدا برای صحت گذاری نتایج مقاله حاضر از مشخصات هندسی و مکانیکی مندرج در جدول ۱ مربوط به مرجع [۱۷] استفاده شده است.

جدول (۱): مشخصات مکانیکی تیر [۱۷] با هندسه

$$n = 0/3 \text{ و } L/h = 10$$

آلومینوم (Al)	آلومینا (Al_2O_3)	
۷۰	۳۸۰	E (GPa)
۲۷۰۰	۳۸۰۰	ρ (kg/m^3)
۰/۲۳	۰/۲۳	ν

در جدول ۲ فرکانس طبیعی اول بی بعد حاصل از تئوری مقاله حاضر با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس و همچنین نتایج [۱۷] مقایسه شده است که تطابق خوبی بین آنها مشاهده می گردد.

جدول (۲): آزمون همگرایی فرکانس طبیعی پایه و مقایسه با [۱۷] و آباکوس.

فرکانس طبیعی اول بی بعد		
۵/۰۹۰	$N = 1$	آزمون همگرایی
۱/۲۳۶	$N = 2$	
۱/۰۱۰	$N = 3$	
۱/۰۰۷	$N = 4$	

که f نیروی گسترده بر واحد طول و w نیز خیز تیر در راستای Z می باشد.

همان طور که در رابطه لاگرانژ (۴۰) نشان داده شد، به ازای هر t ، یک معادله به دست می آید و با تعیین t تعداد معادلات مشخص می شود. بنابراین، یک دستگاه معادلات به دست می آید که این دستگاه معادلات با استفاده از روش عددی Runge Kutta و توسط نرم افزار Matlab حل می شود تا مجهولات مسئله که همان توابع زمانی $q_i(t)$ هستند، به دست آیند. بعد از مشخص شدن این توابع زمانی، با قرار دادن آنها در روابط (۳۷) و (۳۸)، معادلات تغییر مکان نیز به دست می آید. تعداد t از طریق روش سعی و خطا و زمانی که نمودارهای پاسخ همگرا شدند، به دست می آید.

در این بررسی بر اساس شکل مد اول، سری های $w(x, t)$ و $\theta(x, t)$ محاسبه گردید. دلیل این امر هم شرایط مرزی تیر یکسرگیردار می باشد که با فرض بار عمودی یکنواخت در رابطه (۴۱)، همیشه در مد اول نوسان خواهد نمود. لذا سری های $w(x, t)$ و $\theta(x, t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{w}_i(x) q_i(t) \approx \bar{w}_1 q_1 \quad (42)$$

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_i(x) q_i(t) \approx \bar{\theta}_1 q_1 \quad (43)$$

روابط انرژی جنبشی و پتانسیل تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک بر اساس مد اول در پیوست آمده است.

۵- نتایج

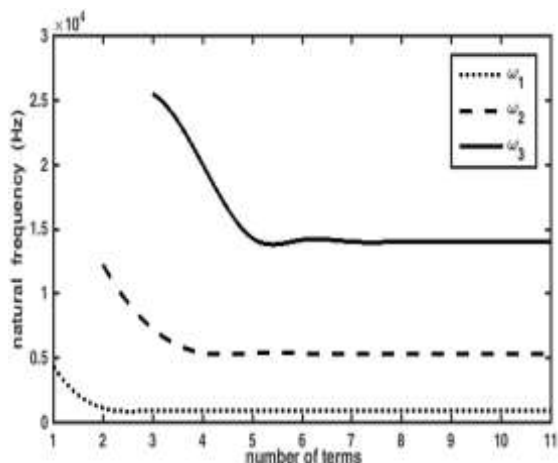
در این بخش نتایج ارتعاشات آزاد و اجباری تیر مورد نظر به ترتیب عرضه می گردد.

۵-۱- ارتعاشات آزاد تیر FGM

در این قسمت به ترتیب صحت گذاری فرکانس های طبیعی، اثر متغیرهای مختلف روی فرکانس طبیعی و پاسخ ارتعاش آزاد مورد بررسی قرار گرفته است.

۵-۱-۱- صحت گذاری

طبیعی اول و دوم و سوم به ترتیب وقتی تعداد جملات از ۳، ۴ و ۶ بیشتر می‌شود، مقادیر فرکانس‌های طبیعی ثابت مانده و همگرا می‌شوند (شکل ۲).



شکل (۲): آزمون همگرایی جملات سری چیشف برای سه مد اول.

برای صحه‌گذاری نتایج از نرم‌افزار المان محدود آباکوس استفاده شده است. در ابتدا تیر مورد نظر بدون لایه پیزوالکتریک در نرم‌افزار مدل شده و از المان دو بعدی Beam برای المان‌بندی استفاده شده است. سپس یک لایه پیزوالکتریک (المان Beam) روی تیر اصلی قرار داده و به کمک قید Tie به هم چسبانده شده است. برای مدل‌سازی ماده FGM، تیر اصلی به ۱۶ لایه با خواصی مطابق رابطه (۵) تقسیم شده است.

مقایسه بین نتایج حل تحلیلی و المان محدود برای هر دو حالت بدون پیزوالکتریک و با پیزوالکتریک به ترتیب در جدول‌های ۵ و ۶ آمده است. ملاحظه می‌شود صحه‌گذاری با روش المان محدود قابل قبول است. همچنین اضافه کردن لایه پیزوالکتریک باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

جدول (۵): مقایسه فرکانس طبیعی تیر چرخان با نرم‌افزار Abaqus

Difference	Abaqus (Hz)	Present (Hz)	
% ۰/۰۷	۹۰۳/۴۷	۹۰۴/۰۷	First natural frequency
% ۰/۰۱	۵۳۳۱/۲	۵۳۳۱/۱۸	Second natural frequency

۱/۰۰۷	$N = 5$	
۰/۹۹۶	سینا و همکاران [۱۷]	
۱/۰۰۶۷۸	نرم‌افزار آباکوس	

برای صحه‌گذاری نتایج بخش‌های بعدی مقاله از مقایسه با نتایج آباکوس استفاده شده است.

۵-۱-۲- مشخصات و نتایج حاصل از تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک

در این بخش از تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک به مشخصات هندسی و مکانیکی مندرج در جداول ۳ و ۴ استفاده شده است.

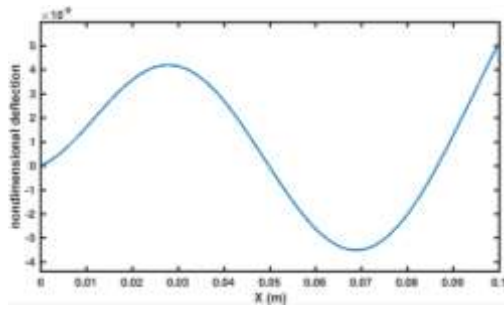
جدول (۳): مشخصات هندسی.

لایه پیزوالکتریک	تیر FGM	
۰/۱ m	۰/۱ m	طول (L)
۰/۰۱ m	۰/۰۱ m	عرض (b)
۰/۰۰۱ m	۰/۰۱ m	ضخامت (h)
۰/۰۱ m	۰/۰۱ m	شعاع هاب (R)

جدول (۴): مشخصات مکانیکی [۷].

ماده پیزوالکتریک (PZT-5H)	سرامیک (ZrO_2)	آلومینیوم (Al)	
۱۲۶	۲۰۰	۷۰	E (GPa)
۷۵۰۰	۵۷۰۰	۲۷۰۰	ρ (kg/m^3)
-	۰/۳	۰/۳	ν
-۶/۵	-	-	e_{31} (Coulomb/ m^2)
$1/30.2 \times 10^{-8}$	-	-	ϵ_{33} (C/Volt.m)

از معادله (۳۶) برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر چرخان بدون لایه پیزوالکتریک و با لایه پیزوالکتریک با سرعت زاویه‌ای $\Omega = 1000 \text{ rad/sec}$ استفاده شده است. البته در ابتدا لازم است که تعداد جملات سری چیشف (۳۰) را محدود کرد. ملاحظه می‌شود که برای فرکانس‌های



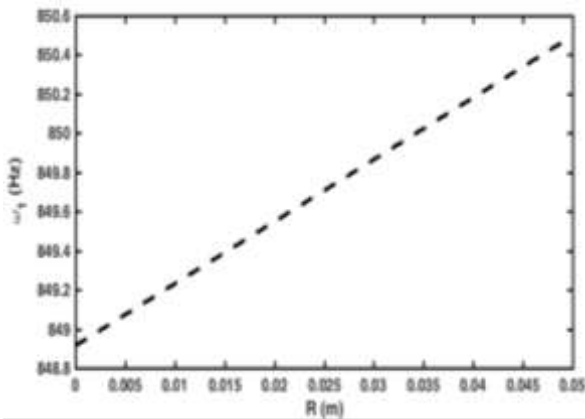
شکل مد سوم

شکل (۳): شکل مدهای اول تا سوم تیر.

ملاحظه می‌شود که اشکال فوق با شکل مدهای یک تیر یکسرگردار در مرجع [۱۸] تطابق دارد.

۵-۱-۳- بررسی اثر متغیرها بر روی فرکانس طبیعی

در شکل ۴، اثر شعاع هاب روی فرکانس طبیعی تیر چرخان بدون پیزو نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با ازدیاد شعاع هاب، فرکانس پایه تیر تقریباً به‌طور خطی افزایش می‌یابد که دلیل آن افزایش نیروی کششی محوری گریز از مرکز و در نتیجه افزایش سفتی خمشی تیر می‌باشد. این مطلب در فصل یازدهم مرجع [۱۸] اثبات شده است.



شکل (۴): اثر شعاع هاب بر روی فرکانس پایه.

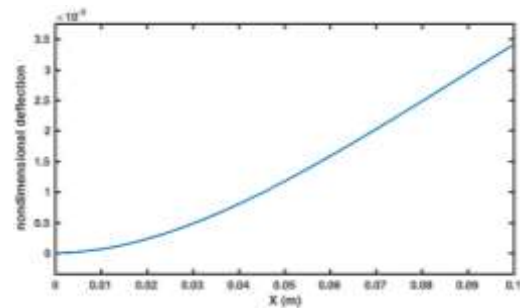
در شکل ۵، اثر افزایش ولتاژ روی فرکانس طبیعی تیر چرخان با پیزو نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با ازدیاد ولتاژ، فرکانس پایه تیر تقریباً به‌طور خطی افزایش می‌یابد که دلیل آن رابطه خطی انرژی پتانسیل لایه پیزوالکتریک تیر با ولتاژ بر اساس روابط (۱۷) و (۲۴) و در نهایت افزایش سختی تیر می‌باشد.

% ۰/۱	۱۴۰۰۶	۱۳۹۹۱/۴۱	Third natural frequency
-------	-------	----------	-------------------------

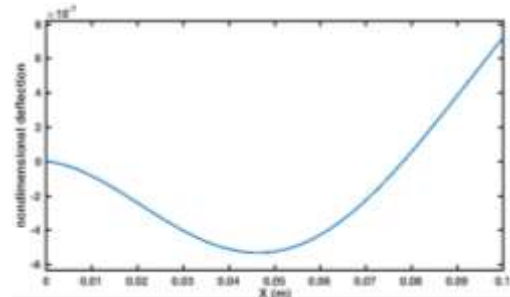
جدول (۶): مقایسه فرکانس طبیعی تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک بدون ولتاژ الکتریکی با نرم‌افزار Abaqus.

Difference	Abaqus (Hz)	Present (Hz)	
% ۰/۲۲	۹۷۱/۹۳	۹۷۴/۱۵	First natural frequency
% ۰/۰۶	۵۶۷۸/۳	۵۶۷۴/۸۳	Second natural frequency
% ۰/۴۴	۱۴۷۴۲	۱۴۶۷۵/۷۲	Third natural frequency

از طرف دیگر بر اساس سه فرکانس طبیعی اول تیر FGM چرخان مندرج در جدول ۵، شکل مدهای سه‌گانه به کمک حل تحلیلی حاضر محاسبه شده و در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل مد اول.



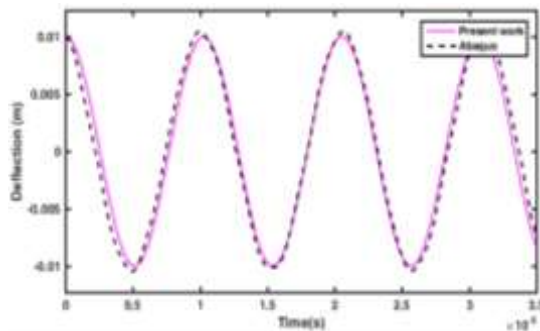
شکل مد دوم.

در ابتدا شرایط اولیه به صورت توزیع جابجایی روی تیر و بدون سرعت اولیه با رابطه (۴۷) در نظر گرفته می شود [۱۹]:

$$w_0(x) = \frac{x_0}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \quad (47)$$

شکل ۷ پاسخ ارتعاش آزاد انتهای تیر و همچنین مقایسه با نتایج نرم افزار Abaqus را نشان می دهد.

همان طور که ملاحظه می شود، نتایج به دست آمده تطابق خوبی با نرم افزار المان محدود دارد که گواه بر درستی نتایج است. همچنین فرکانس پاسخ نزدیک فرکانس طبیعی اول تیر می باشد که علت آن شباهت توزیع خیز اولیه با شکل مد اول تیر می باشد.



شکل (۷): پاسخ ارتعاش آزاد انتهای تیر به ازاء جابجایی اولیه.

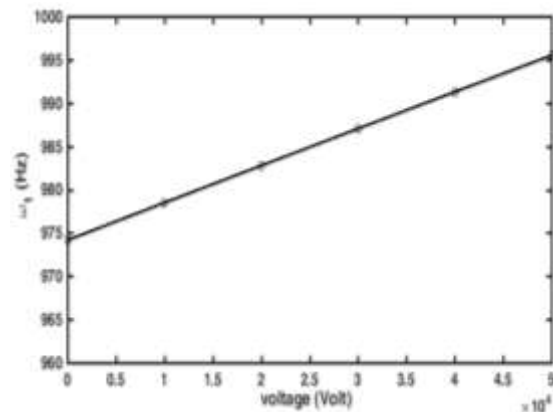
۵-۴-۱-۲- پاسخ به ازای ($x_0 = 0$ و $V_0 = 100 \text{ m/s}$)

در این مرحله شرایط اولیه بدون جابجایی و به صورت توزیع سرعت با معادله (۴۸) در نظر گرفته می شود [۱۹]:

$$\dot{w}_0(x) = \frac{V_0}{2L^3}(3Lx^2 - x^3) \quad (48)$$

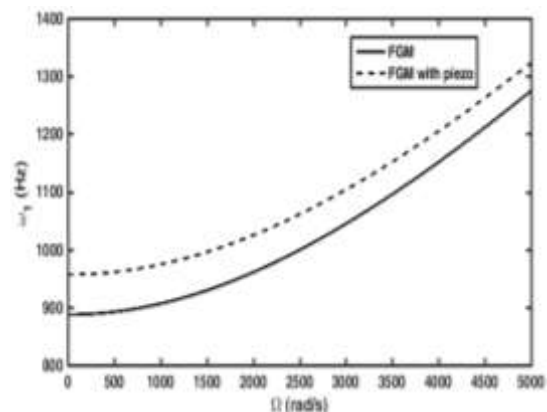
در شکل ۸ پاسخ ارتعاش آزاد انتهای تیر با شرایط اولیه مذکور آورده شده است.

در اینجا نیز فرکانس پاسخ نزدیک فرکانس طبیعی اول تیر می باشد. زیرا توزیع سرعت اولیه روی تیر در رابطه (۴۸) مشابه توزیع جابجایی در رابطه (۴۷) فرض شده است.



شکل (۵): اثر ولتاژ اعمالی بر پیزوالکتریک بر روی فرکانس پایه.

در نهایت در شکل ۶، اثر سرعت زاویه ای تیر در دو حالت بدون لایه پیزوالکتریک و با لایه پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی را با در نظر گرفتن شعاع هاب $R = 0.01 \text{ m}$ نشان می دهد. همان طور که در شکل ۶ مشاهده می شود، با افزایش سرعت زاویه ای تیر، فرکانس پایه افزایش می یابد. دلیل این امر افزایش نیروی گریز از مرکز که معادل یک نیروی کششی در تیر است می باشد که باعث افزایش سفتی خمشی تیر می شود. نتیجه دیگر نمودار، این است که فرکانس پایه تیر با لایه پیزوالکتریک از حالت بدون لایه پیزوالکتریک بیشتر است.

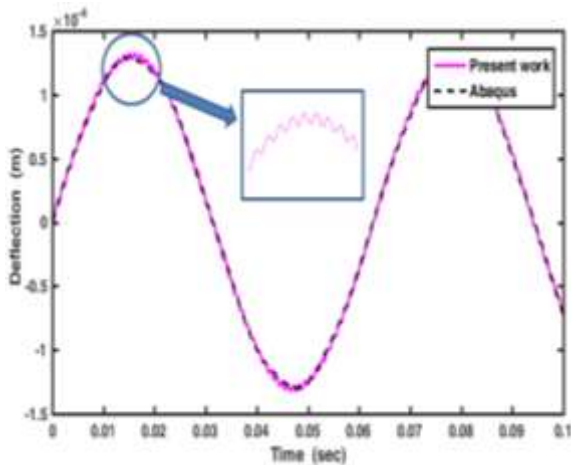


شکل (۶): اثر سرعت زاویه ای بر روی فرکانس پایه تیر.

۵-۴-۱-۳- پاسخ سازه به ازای شرایط اولیه

در این قسمت پاسخ سازه در اثر جابجایی اولیه انتهای تیر (x_0) و با سرعت اولیه انتهای تیر (V_0) مورد بررسی قرار می گیرد.

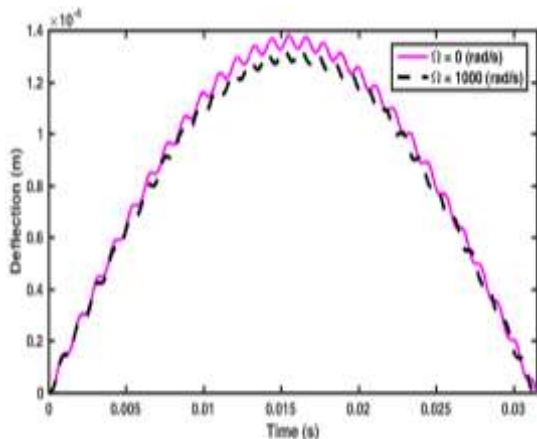
۵-۴-۱-۴- پاسخ به ازای ($V_0 = 0$ و $x_0 = 0.01 \text{ m}$)



شکل (۹): مقایسه پاسخ ارتعاشی انتهای تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک با Abaqus در اثر بار هارمونیک.

۵-۲-۱-۲- تاثیر سرعت زاویه‌ای در ارتعاش اجباری تیر

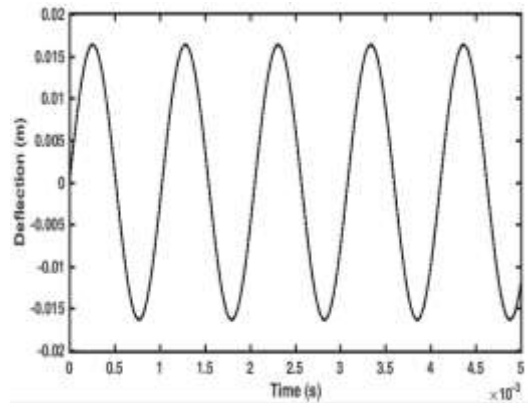
در شکل ۱۰ پاسخ ارتعاشی انتهای تیر با تحریک هارمونیک معرفی شده در بخش ۵-۲-۱-۱ برای دو حالت چرخان و غیرچرخان با هم مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که در غیرچرخان با هم مقایسه شده است. $\Omega = 1000 \text{ rad/sec}$ بیشینه خیز دینامیکی تیر چرخان نسبت به تیر غیرچرخان ۴٪ کاهش یافته است. علت آن تحت کشش قرار گرفتن تیر چرخان و ازدیاد سفتی خمشی می‌باشد.



شکل (۱۰): مقایسه پاسخ ارتعاشی انتهای تیر غیرچرخان با چرخان در اثر بار هارمونیک.

۵-۲-۱-۳- تاثیر ولتاژ الکتریکی در ارتعاش اجباری تیر چرخان

شکل ۱۱، اثر اضافه کردن ولتاژ را به لایه پیزوالکتریک به‌عنوان عملگر نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است می‌توان با اضافه کردن ولتاژ به لایه پیزوالکتریک، ارتعاش تیر را کنترل نموده و کاهش داد. علت کاهش دامنه با



شکل (۸): پاسخ ارتعاش آزاد انتهای تیر به‌ازای سرعت اولیه.

۵-۲-۲- ارتعاشات اجباری تیر FGM با لایه پیزوالکتریک

در این بخش ارتعاشات اجباری تیر مورد نظر به‌ازای بارگذاری‌های هارمونیک، پله و شبه ضربه بررسی گردیده است.

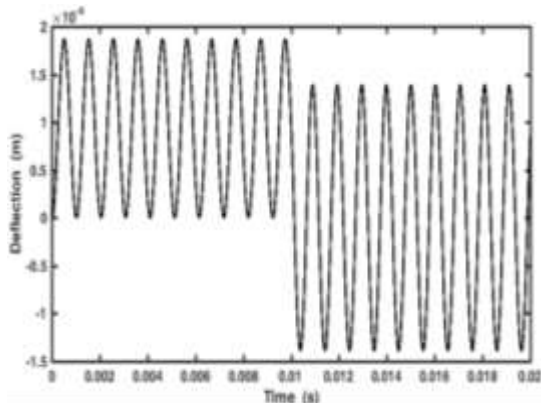
۵-۲-۱- بارگذاری هارمونیک

در این قسمت در ابتدا صحنه‌گذاری پاسخ ارتعاش اجباری تیر مورد بررسی قرار گرفته و سپس تاثیر سرعت زاویه‌ای و ولتاژ لایه پیزوالکتریک روی آن نشان داده شده است.

۵-۲-۱-۱- صحنه‌گذاری

در این قسمت برای صحنه‌گذاری ارتعاش اجباری، نتایج حاصل از شبیه‌سازی در نرم‌افزار Matlab برای تیر چرخان با سرعت زاویه‌ای $\Omega = 1000 \text{ rad/sec}$ و با لایه پیزوالکتریک با نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus در شکل ۹ مقایسه شده است. نوع نیرو به‌صورت هارمونیک گسترده $F = F_0 \sin \omega t$ می‌باشد که در آن، $F_0 = 1000 \text{ N/m}$ و $\omega = 100 \text{ rad/s}$ فرض شده است. ملاحظه می‌شود که تطابق خوبی بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نرم‌افزار Abaqus وجود دارد. لازم به‌ذکر است که در این نمودار دو فرکانس دیده می‌شود که فرکانس کمتر (فرکانس اصلی) مربوط به فرکانس تحریک و فرکانس بالاتر (بزرگنمایی شده در شکل) مربوط به فرکانس طبیعی پایه تیر می‌باشد.

در اینجا بار پله‌ای به مقدار $F = 1000 N/m$ در مدت زمان $t = 0.01 \text{ sec}$ به تیر وارد می‌گردد. شکل ۱۳ پاسخ انتهای تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک را در بازه‌های زمانی $t < 0.01$ و $t > 0.01$ نشان می‌دهد. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود، فرکانس پاسخ در هر دو حالت همان فرکانس طبیعی پایه تیر می‌باشد. البته در بخش $t < 0.01$ نوع ارتعاش گذرا (اجباری) و در بخش $t > 0.01$ ارتعاش آزاد می‌باشد. از طرف دیگر دامنه ارتعاش در دو حالت با هم متفاوت است.



شکل (۱۳): پاسخ ارتعاشی انتهای تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک در اثر بار شبه ضربه.

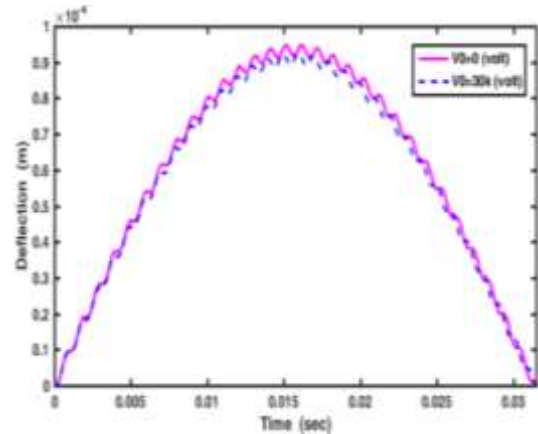
۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج کلی در تحلیل ارتعاش آزاد تیر FGM چرخان و با لایه پیزوالکتریک به صورت زیر می‌باشد:

- با افزایش سرعت زاویه‌ای تیر FGM بدون لایه پیزوالکتریک و با لایه پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- با افزایش شعاع هاب تیر چرخان، فرکانس طبیعی تقریباً به صورت خطی افزایش می‌یابد.
- با افزودن لایه پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی تیر چرخان افزایش می‌یابد.
- با افزودن ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی تیر چرخان تقریباً به صورت خطی افزایش می‌یابد.
- فرکانس پاسخ ارتعاش آزاد تیر چرخان در اثر شرایط اولیه جابجایی و سرعت، نزدیک فرکانس طبیعی اول می‌باشد.

همچنین نتایج کلی در تحلیل ارتعاش اجباری تیر FGM چرخان و با لایه پیزوالکتریک به صورت زیر است

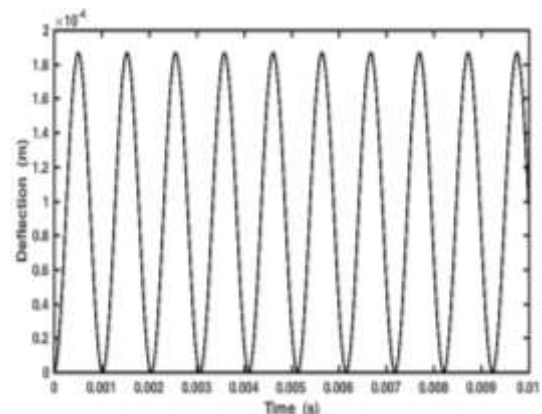
افزایش ولتاژ، افزایش سختی خمشی تیر می‌باشد که قبلاً برای شکل ۵ بیان شده بود.



شکل (۱۱): تاثیر ولتاژ الکتریکی در پاسخ ارتعاشی انتهای تیر چرخان در اثر بار هارمونیک.

۵-۲-۲- بارگذاری پله

در اینجا فرض می‌شود که بار گسترده پله‌ای با مقدار ثابت $F = 1000 N/m$ یکبار به تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک وارد گردد. شکل ۱۲ پاسخ انتهای تیر را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرکانس پاسخ برابر فرکانس پایه تیر می‌باشد. این نتیجه قبلاً در مراجع از جمله مرجع [۲۰] دیده شده است. دلیل این امر ثابت بودن و شبه ضربه‌ای بودن بار در فواصل کوتاه زمانی است که فرکانس پاسخ را شبیه فرکانس ارتعاش آزاد در اثر سرعت اولیه می‌نماید.



شکل (۱۲): پاسخ ارتعاشی انتهای تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک در اثر بار پله.

۵-۲-۳- بارگذاری شبه ضربه (پله‌ای با زمان محدود)

10. Aksencer, T. and Aydogdu, M., "Flapwise Vibration of Rotating Composite Beams," *Composite Structures*, Vol. 134, pp. 672-679, 2015.
11. Xiang, H.J. and Yang, J., "Free and Forced Vibration of a Laminated FGM Timoshenko Beam of Variable Thickness Under Heat Conduction," *Composites*, Vol. 39, pp. 292-303, 2008.
12. Simsek, M. and Kocaturk, T., "Free and Forced Vibration Of a Functionally Graded Beam Subjected to a Concentrated Moving Harmonic Load," *Composite Structures*, Vol. 90, pp. 465-473, 2009.
13. Khalili, S.M.R. and Jafari, A.A. and Eftekhari, S.A., "A Mixed Ritz-DQ Method for Forced Vibration of Functionally Graded Beams Carrying Moving Loads," *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 2497-2511, 2010.
14. Kaya, M.O., "Free Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam by Differential Transform Method," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Vol. 78, No. 3, pp. 194-203, 2006.
15. Tavakolian, M. and Jafari, A.A. and Khalili, M.R., "Nonlinear Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells Embedded with a Piezoelectric Layer," *Thin-walled structure*, Vol. 79, pp. 8-15, 2014.
16. Chandiramani, N.K. and Librescu, L.I. and Saxena, V. and Kumar, A., "Optimal Vibration Control of a Rotating Composite Beam with Distributed Piezoelectric Sensing and Actuation," *Smart Materials and Structures*, Vol. 13, No. 2, pp. 433-442, 2004.
17. Sina, S.A., Navazi, H.M. and Haddadpour, H., "An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams," *Materials and Design*, Vol. 30, No. 3, pp. 741-747, 2009.
18. Rao, S.S., "Vibration of Continuous Systems," 2th ed., John Wiley & Sons, India, 2019.
19. Beer, F.B. and Johnston, E.R. and Dewolf, J.T. and Mazurek, D.F., "Mechanics of Material," 6th ed., Mc Graw Hill, America, 2014.
20. Fathabadi, M., "Vibration Analysis of a Functionally Graded Beam with Piezoelectric Layers", Msc Thesis, KNT University, Faculty of Mechanical Engineering, 2011..

- در ارتعاشات اجباری تیر چرخان با تحریک هارمونیک، دو فرکانس مشاهده می‌گردد که فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی پایه می‌باشند.
- دامنه ارتعاشات تیر چرخان از حالت غیرچرخان به علت افزایش نیروی محوری کمتر است.
- دامنه ارتعاشات تیر با لایه پیزوالکتریک با افزایش ولتاژ کاهش می‌یابد.
- فرکانس ارتعاشات تیر چرخان با لایه پیزوالکتریک با تحریک شبه ضربه و پله، همان فرکانس طبیعی پایه می‌باشد.

۷- مراجع

1. Southwell, R. and Gough, F., "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blade," *British A.R.C. Reports and Memoranda*, Vol. 76, No. 6, 1921.
2. Schilhansl, M., "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28-30, 1958.
3. Yoo, H.H. and Shin, S.H., "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 5, pp. 807-828, 1998.
4. Lin, S.C. and Hsiao, K.M., "Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 2, pp. 303-322, 2001.
5. Choi, S.C. and Park, J.S. and Kim, J.H., "Vibration Control of Pre-Twisted Rotating Composite Thin-Walled Beams With Piezoelectric Fiber Composites," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300, No. 1-2, pp. 176-196, 2007.
6. Zarrinzadeh, H. and Attarnejad, R. and Shahba, A., "Free Vibration of Rotating Axially Functionally Graded Tapered Beams," *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 226, No. 4, pp. 363-379, 2011.
7. Fathabadi, M. and Jafari, A.A., "Forced Vibration of FGM Timoshenko Beam with Piezoelectric Layers Carrying Moving Load," In Persian, *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 9, No. 2, pp. 69-77, 2013.(in persian)
8. Fang, J.S. and Zhou, D., "Free Vibration Analysis of Rotating Axially Functionally Graded Tapered Timoshenko Beams," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 16, No. 5, 19 pages, 2015.
9. Fang, J.S. and Zhou, D., "Free Vibration Analysis of Rotating Axially Functionally Graded-Tapered Beams Using Chebyshev – Ritz Method," *Materials Research Innovations*, Vol. 19, pp. 1255-1262, 2015.

$$U^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L A_2 (\dot{\bar{\theta}}_1 q_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L Q (\dot{\bar{w}}_1 q_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L C (\dot{\bar{w}}_1 q_1 - \dot{\bar{\theta}}_1 q_1)^2 dx$$

$$U^{piezo} = \frac{1}{2} \int_0^L \hat{A}_2 (\dot{\bar{\theta}}_1 q_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \hat{Q} (\dot{\bar{w}}_1 q_1)^2 dx - \frac{1}{2} \int_A \int_0^L (e_{31} E_z) (\dot{\bar{w}}_1 q_1)^2 dx$$

$$T^{FGM} = \frac{1}{2} \int_0^L [B_2 (\bar{\theta}_1 \dot{q}_1)^2 + B_2 \Omega^2 (\bar{\theta}_1 q_1)^2 + B_1 (\bar{w}_1 \dot{q}_1)^2] dx$$

$$T^{piezo} = \frac{1}{2} \int_0^L [\hat{B}_2 (\bar{\theta}_1 \dot{q}_1)^2 + \hat{B}_2 \Omega^2 (\bar{\theta}_1 q_1)^2 + \hat{B}_1 (\bar{w}_1 \dot{q}_1)^2] dx$$