

## جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازی‌های ماتریسی تک‌هدفی و چندهدفی با عایدی‌های فازی و تحلیل برخی موارد نظامی

حمید بیگدلی<sup>۱</sup>، حسن حسن‌پور<sup>۲\*</sup>، جواد طیبی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری، ۲- استادیار، دانشگاه بیرجند ۳- استادیار، دانشگاه صنعتی بیرجند

(دریافت: ۹۴/۱۲/۰۵، پذیرش: ۹۵/۱۰/۰۷)

### چکیده

در این تحقیق یک روش جدید برای حل مسائل بازی با مجموع صفر دو نفره تک‌هدفی و چندهدفی با عایدی‌های فازی پیشنهاد شده است. با استفاده از مفهوم تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، مسئله بازی تک‌هدفی به یک مسئله بازی تک‌هدفی با عایدی‌های بازه‌ای تبدیل می‌شود و یک جفت مسئله برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه هر یک از بازیکنان به دست می‌آید. با استفاده از قضیه قوی دوگانگی ثابت می‌شود که در بازی ماتریسی بازه مقدار، ارزش خوش‌بینانه بازی برای بازیکن ۱ با ارزش بدبینانه بازی برای بازیکن ۲، و ارزش بدبینانه بازی برای بازیکن ۱ با ارزش خوش‌بینانه بازی برای بازیکن ۲ برابرند. سپس دو مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفی برای تعیین ارزش‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازی چندهدفی بازه مقدار و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر آن‌ها برای هر یک از بازیکنان ارائه می‌شود. به عنوان یک کاربرد، نبرد بین نیروهای آمریکایی و آلمانی در جنگ جهانی دوم در شکاف آورانشه از دید نظریه بازی‌ها بررسی می‌شود و نشان داده می‌شود که با استفاده از روش مذکور راهبردهای بهینه به دست آمده از این مدل برای فرماندهان منطبق بر تحلیل دکترین نظامی آمریکا از این تصمیم است. در نهایت، مثال دیگری از یک نبرد نظامی بررسی می‌شود که در آن هر یک از فرماندهان دو هدف دارند.

**کلیدواژه‌ها:** بازی مجموع صفر فازی، راهبرد بهینه، عایدی فازی، تقریب نزدیک‌ترین بازه، تحلیل نبرد، بازی چندهدفی

## Optimistic and Pessimistic Solutions of Single and Multi-Objective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Analysis of Some Military Cases

H. Bigdeli, H. Hassanpour\*, J. Tayyebi

University of Birjand

(Received: 24/02/2016; Accepted: 27/12/2016)

### Abstract

A new method for solving single-objective and multi-objective two-person zero-sum game problems with fuzzy payoffs is proposed in this paper. The single-objective game problem with fuzzy payoffs is converted to a single-objective game problem with interval payoffs by considering the concept of nearest interval approximation of fuzzy numbers, and a pair of linear programming problems is obtained to compute the optimistic and pessimistic solutions for each of the players. By the strong duality theorem of linear programming, it is proved that the optimistic value of Player I is equal to the pessimistic value of Player II and also, the pessimistic value of Player I is equal to the optimistic value of Player II in interval-valued matrix game. Then, two multiobjective linear programming problems are introduced to compute the optimistic and pessimistic values of interval-valued multiobjective game and their corresponding Pareto optimal strategies for each of the players. As an application, the battle between U.S. and Germany forces in Avranches Gap in World War II is discussed by game theory and is concluded that the obtained optimal strategies of model by the mentioned method for commanders is identical with the analysis of the U.S. military doctrine. Finally, an example of a military battle is considered in which each of the commanders has two objectives.

**Keywords:** Fuzzy Zero-Sum Game, Optimal Strategy, Fuzzy Payoff, Nearest Interval Approximation, Analysis Of Battle, Multi-Objective Game.

\*Corresponding Author E-mail: hhasanpour@birjand.ac.ir

## ۱. مقدمه

نظریه بازی شاخه‌ای از تحقیق در عملیات است که رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت راهبردی را مورد بررسی قرار می‌دهد. پس از انتشار کتاب «نظریه بازی‌ها و رفتار اقتصادی» توسط وان‌نیومن و مورگنسترن [۱]، نظریه بازی به سرعت رشد یافت و کاربردهای وسیعی در علوم مختلف پیدا کرد. سرهنگ (بازنشسته) الیور هایوود [۲] در مقاله مشهور خود اهمیت نظریه بازی‌ها را در تصمیم‌گیری فرماندهی نشان داد. او نبردهای مختلفی از جنگ جهانی دوم را از دید نظریه بازی‌ها بررسی کرد و نتیجه گرفت که تحلیل دکترین تصمیم‌گیری نظامی مشابه با جواب به‌دست آمده از نظریه بازی‌هاست. ارزیابی سرهنگ هایوود انجمن تحقیق در عملیات را تشویق کرد که روش‌های نظریه بازی را بیشتر مورد بررسی قرار دهند و در تصمیم‌گیری‌های نظامی از این نظریه استفاده کنند. مسائل بازی به دو دسته مهم طبقه‌بندی می‌شوند: بازی‌های همکارانه و بازی‌های غیر همکارانه [۳ و ۴]. بازی‌های با مجموع صفر (بازی‌های ماتریسی) یک دسته مهم از بازی‌های غیر همکارانه می‌باشند. در نظریه بازی کلاسیک، اطلاعات بازیکنان به صورت قطعی است اما بسیاری از مسائل دنیای واقعی دارای عدم قطعیت می‌باشند. دو نوع عدم قطعیت در اطلاعات وجود دارد که یکی ناشی از تصادفی بودن اطلاعات است و دیگری ناشی از ابهام در اطلاعات می‌باشد. نظریه مجموعه‌های بازی برای بیان نادقیقی پدیده‌هایی که ناشی از شفاف نبودن و ابهام در اطلاعات است، مورد استفاده قرار می‌گیرد و نظریه احتمال در بیان عدم قطعیت در فرآیندهای تصادفی کاربرد دارد. در آزمایش‌هایی که خروجی آن‌ها به طور دقیق قابل مشاهده است (مانند نتیجه حاصل از پرتاب سکه یا تاس) از نظریه احتمال استفاده می‌شود و در مواردی که خروجی آن به طور دقیق قابل مشاهده نیست (مانند اطلاعات مربوط به میزان ادوات نظامی و نفرات دشمن) نظریه مجموعه‌های بازی وسیله مناسبی برای مدل‌سازی است. نظریه مجموعه‌های بازی به دلیل توانایی در مدل‌سازی مسائل دارای اطلاعات مبهم و استنتاج در شرایط نادقیق، امروزه به طور گسترده در مسائل کاربردی در حوزه‌هایی از قبیل مدیریت، اقتصاد، علوم نظامی و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵-۹]. اولین مطالعه از بازی‌های ماتریسی با عایدی‌های بازی توسط کامپوس [۱۰] انجام شد. بکتور و کاندرا [۱۱] روش‌های برنامه‌ریزی خطی را برای حل بازی‌های ماتریسی بازی ارائه دادند. لی [۱۲] یک روش برنامه‌ریزی خطی دوسطحی را برای حل بازی‌های ماتریسی با عایدی‌های بازی مثلثی ارائه داد. کلمنت و فرناندز [۱۳] روش دیگری برای تحلیل بازی‌های ماتریسی بازی پیشنهاد کردند که راهبردهای امنیتی بهینه پارتوی بازیکنان را به‌دست می‌آورد. کولینز و اچ یو [۱۴] بازی‌های ماتریسی بازی

مقدار را با مفاهیم بازی در نظر گرفتند. لی [۱۵] یک روش برای محاسبه ارزش‌های بازی با عایدی‌های مثلثی بدون تعیین راهبرد بهینه بازیکنان ارائه داد. کاندرا و آگاروال [۱۶] یک یادداشت بر روی کار لی نوشته و یک روش برای محاسبه راهبرد بهینه بازیکنان ارائه دادند. لی و نان [۱۷] یک روش برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای را برای حل بازی‌های مجموع صفر با عایدی‌های بازی ارائه دادند. دیوتا و گاپتا [۱۸] مدل‌های بازی ماتریسی مائدا [۱۹] و کانلین و کیونگ [۲۰] را با اعداد بازی مثلثی متقارن و نامتقارن توسعه دادند. سیخ و همکارانش [۲۱] یک روش بر اساس آلفا-برش‌های اعداد بازی برای حل این نوع از بازی‌ها ارائه دادند. در دنیای واقعی بازیکنان به دنبال بهینه‌سازی چندین هدف به طور هم‌زمان هستند. نیشیزاکی و ساکاو [۲۲] اولین کسانی بودند که به طور جدی بازی‌های چندهدفی را در محیط بازی مورد مطالعه قرار دادند. نویسندگان در مقاله دیگری مفهوم راهبردهای رضایت‌بخش را برای بازیکنان در یک بازی ماتریسی چندهدفی با عایدی‌های بازی معرفی نموده و روشی برای حل این مسائل ارائه کرده‌اند [۲۳].

در این مقاله، بازی‌های مجموع صفری در نظر گرفته می‌شود که در آن عایدی بازیکنان اعداد بازی و راهبردهای محض و آمیخته بازیکنان قطعی (غیرفازی) هستند. در این مقاله با استفاده از مفهوم تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد بازی، مسئله به صورت یک بازی تک‌هدفی و چندهدفی بازه‌ای تبدیل می‌شود و جواب‌های خوش‌بینانه و بدبینانه بازیکنان محاسبه می‌شود. سادگی و سرعت حل مسئله از امتیازات این روش است که این کار با ارائه چند مثال نظامی نشان داده می‌شود. ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در ادامه مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌های بازی، نظریه بازی‌ها و بهینه‌سازی چندهدفی ارائه می‌شود. در بخش ۲ یک روش برای حل بازی‌های مجموع صفر تک‌هدفی با عایدی‌های بازی ارائه می‌گردد. در بخش ۳، بازی‌های ماتریسی چندهدفی با عایدی‌های بازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۴ یک نبرد اتفاق افتاده در جنگ جهانی دوم مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد و سپس مثالی از بازی چندهدفی در حوزه نظامی در بخش ۵ بررسی می‌شود.

## ۱-۱. مفاهیم اولیه مجموعه‌های بازی و حساب بازه‌ای

در این زیر بخش برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌های بازی [۲۴] که مورد نیاز بخش‌های بعد است، یادآوری می‌شود.

یک مجموعه بازی به صورت زیرمجموعه  $\tilde{a}$  از مجموعه مرجع  $X \subset \mathbb{R}$  با تابع عضویت  $\mu_{\tilde{a}}: X \rightarrow [0,1]$  تعریف

که در آن،  $a^m$  نقطه میانی و  $a^l$  و  $a^r$  به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست  $Supp(\tilde{a})$  می‌باشند. از رابطه فوق به سادگی نتیجه می‌شود که هر عدد فازی مثلثی را می‌توان به طور مستقیم از  $-$  برش و  $-1$  برش آن به دست آورد. در واقع  $[a_\alpha^L, a_\alpha^R] = \alpha \tilde{a}_1 + (1-\alpha) \tilde{a}$  است.

در بخش‌های بعد، به بعضی از اعمال حسابی روی بازه‌ها [۲۱] نیاز است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌شود.

فرض کنید  $a = [a^L, a^R]$  و  $b = [b^L, b^R]$  دو بازه باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} a+b &= [a^L + b^L, a^R + b^R] \\ a-b &= [a^L - b^R, a^R - b^L] \\ \lambda a &= \begin{cases} [\lambda a^L, \lambda a^R] & \lambda \geq 0 \\ [\lambda a^R, \lambda a^L] & \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن،  $\lambda$  یک عدد حقیقی است.

مجموعه تمام اعداد فازی و مجموعه تمام بازه‌های بسته در  $\mathbb{R}$  به ترتیب با  $F(\mathbb{R})$  و  $P(\mathbb{R})$  نمایش داده می‌شود. با توجه به تبصره ۱ داریم:  $P(\mathbb{R}) \subset F(\mathbb{R})$

**تعریف ۲-۲** [۲۵]. عملگر  $C: F(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$  که برای هر  $\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ ، سه خاصیت زیر را داشته باشد، یک عملگر تقریب بازه نامیده می‌شود:

$$C(\tilde{a}) \subset Supp(\tilde{a}) \quad (1)$$

$$core(\tilde{a}) \subset C(\tilde{a}) \quad (2)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } d(\tilde{a}, \tilde{b}) < \delta \Rightarrow d(C(\tilde{a}), C(\tilde{b})) < \varepsilon \quad (3)$$

که در آن،  $d: F(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ ، یک متر تعریف شده روی خانواده اعداد فازی است.

**گزاره ۲-۱** [۲۵]. فرض کنید  $\tilde{a}$  یک عدد فازی و برای هر  $\alpha \in [0, 1]$ ،  $[a_\alpha^L, a_\alpha^R]$ ،  $\alpha$ -برش آن باشد. تقریب نزدیک‌ترین بازه  $\tilde{a}$ ، بازه  $C_d(\tilde{a}) = [c^L, c^R]$  است که در آن

$$c^R = \int_0^1 a_\alpha^R d\alpha, \quad c^L = \int_0^1 a_\alpha^L d\alpha.$$

**۲-۱. بازی با مجموع صفر**

یک بازی با مجموع صفر دو نفره به صورت سه‌تایی  $G = (X, Y, A)$  نمایش داده می‌شود که در آن،  $X$  و  $Y$

می‌شود که به هر عنصر  $x \in X$  یک عدد حقیقی  $\mu_{\tilde{a}}(x)$  را از بازه  $[0, 1]$  به نام درجه عضویت  $x$  تخصیص می‌دهد.

**تبصره ۱:** بدیهی است که هر مجموعه معمولی مانند  $A$  را می‌توان مجموعه‌ای فازی در نظر گرفت که تابع عضویت آن، همان تابع نشانگر مجموعه  $A$  است.

**تعریف ۲-۱** [۲۴]. مجموعه فازی  $\tilde{a}$  در مجموعه اعداد حقیقی را که تابع عضویت آن  $\mu_{\tilde{a}}(x)$  در شرایط زیر صدق کند، یک عدد فازی گویند.

•  $\mu_{\tilde{a}}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  یک تابع نیمه پیوسته باشد.

• در خارج از بازه‌ای مانند  $[a, d]$ ،  $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0$ .

• اعدادی حقیقی مانند  $b$  و  $c$  موجود باشند به طوری که  $a \leq b \leq c \leq d$  و

الف)  $\mu_{\tilde{a}}(x)$  در  $[a, b]$  صعودی باشد،

ب)  $\mu_{\tilde{a}}(x)$  در  $[c, d]$  نزولی باشد،

ج) در  $[b, c]$ ،  $\mu_{\tilde{a}}(x) = 1$ .

برای هر  $\alpha \in (0, 1]$ ، برش  $\alpha$  فازی  $\tilde{a}$  که با  $\tilde{a}_\alpha$  نمایش داده می‌شود یک مجموعه معمولی است که به صورت  $\tilde{a}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$  و چنانچه  $\alpha = 0$ ،  $\tilde{a}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\}$  به صورت  $cl\{\tilde{a}_\alpha\}$  تعریف می‌شود که  $cl$  به معنی بستار مجموعه است. تکیه‌گاه  $\tilde{a}$  که با  $Supp(\tilde{a})$  نمایش داده می‌شود، مجموعه تمام نقاط  $x \in X$  است که  $\mu_{\tilde{a}}(x) > 0$  هر  $\alpha$ -برش عدد فازی  $\tilde{a}$  یک بازه بسته به صورت  $[a_\alpha^L, a_\alpha^R]$  است که در آن

$$a_\alpha^L = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\},$$

$$a_\alpha^R = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}.$$

هسته عدد فازی  $\tilde{a}$  با  $core(\tilde{a})$  نمایش داده شده و به صورت  $core(\tilde{a}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) = 1\}$  تعریف می‌شود. عدد فازی مثلثی  $\tilde{a} = (a^l, a^m, a^r)$ ، یک عدد فازی خاص است که تابع عضویت آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-a^l)}{(a^m-a^l)} & a^l \leq x \leq a^m \\ \frac{(a^r-x)}{(a^r-a^m)} & a^m \leq x \leq a^r \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (1)$$

اگر مفهوم جواب بهینه برنامه ریزی خطی تک‌هدفی برای این مسئله به کار برده شود، تعریف زیر را داریم:

**تعریف ۲-۳ [۲۴].**  $x^* \in X$  جواب بهینه کامل مسئله برنامه ریزی خطی چندهدفی گفته می‌شود هرگاه برای هر  $x \in X$

$$z_i(x^*) \leq z_i(x) \quad i = 1, \dots, k.$$

در حالت کلی چنین جوابی برای مسائل برنامه ریزی چندهدفی وجود ندارد. زیرا در این مسائل چندین هدف به طور هم‌زمان کمینه می‌شوند و اهداف معمولاً در تقابل یکدیگرند. بنابراین، جواب بهینه پارتو (جواب کارا) به صورت زیر برای این مسائل تعریف می‌شود:

**تعریف ۲-۴ [۲۴].**  $x^* \in X$  جواب بهینه پارتوی مسئله برنامه ریزی چندهدفی نامیده می‌شود هرگاه نقطه‌ای مانند  $x \in X$  موجود نباشد به طوری که  $z(x) \leq z(x^*)$ .

## ۲. بازی مجموع صفر تک‌هدفی با عایدی‌های فازی

در این بخش مسئله بازی تک‌هدفی در محیط فازی در نظر گرفته می‌شود. به منظور بیان ابهام و نادقیقی اطلاعات در مسائل تصمیم‌گیری، عایدی‌های بازیکنان اعداد فازی در نظر گرفته می‌شود. زمانی که یک بازیکن راهبرد خود را انتخاب می‌کند، عایدی او به صورت یک عدد فازی نمایش داده می‌شود. خروجی بازی یک ساختار مجموع صفر دارد به طوری که وقتی یک بازیکن سودی را کسب می‌کند بازیکن دیگر به همان اندازه از دست می‌دهد. ماتریس عایدی فازی زیر نمایش دهنده بازی ماتریسی با عایدی‌های فازی است:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

فضاهای راهبردهای آمیخته بازیکنان ۱ و ۲ در روابط (۲) و (۳) نمایش داده شده است. برای حل چنین مسئله بازی با عایدی‌های فازی، هر عایدی فازی  $\tilde{a}_{ij}$  به کمک تقریب نزدیک‌ترین بازه به عایدی بازه‌ای  $a_{ij} \equiv [a_{ij}^L, a_{ij}^R]$  تبدیل می‌شود. بنابراین با یک مسئله بازی با عایدی‌های بازه‌ای مواجه می‌شویم. با انتخاب  $x \in X$  و  $y \in Y$  به ترتیب توسط بازیکنان ۱ و ۲، عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} y_j = [x^T A^L y, x^T A^R y] \quad (6)$$

فضاهای راهبردهای آمیخته برای بازیکنان ۱ و ۲ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, m \right\}, \quad (2)$$

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (3)$$

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$  ماتریس عایدی بازی نامیده می‌شود.  $a_{ij}$  عایدی بازیکن ۱ است در صورتی که بازیکن ۱ راهبرد  $i$  و بازیکن ۲ راهبرد  $j$  را انتخاب نماید. فرض می‌شود که بازیکن ۱ به دنبال بیشینه‌سازی عایدی و بازیکن ۲ در پی کمینه‌سازی زیان است. زمانی که بازیکن ۱ راهبرد آمیخته  $x \in X$  و بازیکن ۲ راهبرد آمیخته  $y \in Y$  را انتخاب می‌کنند، اسکالر  $x^T A y$  عایدی مورد انتظار بازیکن ۱ خواهد بود و طبیعتاً  $-x^T A y$  عایدی بازیکن ۲ می‌باشد. نیومن نشان داد که در بازی‌های با مجموع صفر دو نفره داریم:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y \quad (4)$$

زوج راهبردهای  $(x^*, y^*)$  که در رابطه فوق صدق کنند یک جواب تعادل (نقطه تعادل) نامیده می‌شود.

## ۱-۳. بهینه‌سازی چندهدفی

قبل از بررسی ساختار مسئله چندهدفی، چند نماد به صورت زیر معرفی می‌شود که در تعریف مفاهیم جواب مسائل بهینه‌سازی چندهدفی به کار گرفته می‌شوند.

برای دو بردار  $z, z' \in \mathbb{R}^n$

$$z = z' \Leftrightarrow z_i = z'_i \quad i = 1, \dots, n;$$

$$z \leq z' \Leftrightarrow z_i \leq z'_i \quad i = 1, \dots, n;$$

$$z < z' \Leftrightarrow z_i < z'_i \quad i = 1, \dots, n;$$

$$z \leq z' \Leftrightarrow z \leq z' \quad z \neq z'.$$

مسئله برنامه ریزی خطی چندهدفی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min z(x) &= (z_1(x), z_2(x), \dots, z_k(x)) \\ \text{s.t. } x &\in X = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} \end{aligned}$$

که در آن، برای  $i = 1, \dots, k$ ،  $z_i(x) = c_i x$

$$c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})^T, b = (b_1, \dots, b_m)^T, x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

و  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس  $m \times n$  است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m x_i' \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^R x_i' \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & x_i' \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

جواب بهینه مسئله (۱۲) را می‌توان به روش سیمپلکس به دست آورد. ارزش خوش‌بینانه  $\underline{v}^{*R}$  و راهبرد بهینه  $x_i^{*R}$  مسئله از روابط

$$x_i^{*R} = x_i^* \underline{v}^{*R} \quad \text{و} \quad \underline{v}^{*R} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i^{*R}}$$

به دست می‌آیند، که  $(x_1^*, \dots, x_m^*)$  جواب بهینه مسئله (۱۲) است. مشابه با روند فوق، اگر بازیکن ۱ با دید بدبینانه به مسئله نگاه کند، ارزش بدبینانه بازی و راهبرد متناظر آن از حل مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{v}^L \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^L x_i \geq \underline{v}^L \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (13)$$

مجدد با فرض  $x_i = \frac{x_i}{\underline{v}^L}$  و  $\underline{v}^L > 0$ ، مسئله (۱۳) به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m x_i' \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^L x_i' \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & x_i' \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

جواب بهینه این مسئله را می‌توان به روش سیمپلکس به دست آورد. درنهایت، ارزش بدبینانه  $\underline{v}^{*L}$  و راهبرد بهینه  $x_i^{*L}$  توسط روابط

$$\underline{v}^{*L} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i^{*L}} \quad \text{و} \quad x_i^{*L} = x_i^* \underline{v}^{*L}$$

به دست می‌آیند که  $(x_1^*, \dots, x_m^*)$  جواب بهینه مسئله (۱۴) است.

که در آن،  $A^R = [a_{ij}^R]_{m \times n}$  و  $A^L = [a_{ij}^L]_{m \times n}$  می‌باشد.

برای یک بازی مجموع صفر دو نفره با عایدی‌های بازه‌ای  $x \in X$  را  $A = [A^L, A^R]$ ، وقتی بازیکن ۱ راهبرد انتخاب می‌کند بدترین عایدی مورد انتظارش به صورت زیر است:

$$v(x) = \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} [x^T A^L y, x^T A^R y] \quad (7)$$

بنابراین بازیکن ۱ باید راهبرد  $x$  را طوری انتخاب کند که  $v(x)$  را بیشینه سازد و عایدی

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} [x^T A^L y, x^T A^R y] \quad (8)$$

را به دست آورد.

اگر بازیکن ۱ مسئله فوق را با دید خوش‌بینانه در نظر بگیرد، ارزش خوش‌بینانه بازی و راهبرد متناظر آن، با حل مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر به دست می‌آید:

$$v_I^R = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A^R y \quad (9)$$

مسئله  $\min_{y \in Y} x^T A^R y$  یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با فضای جواب کراندار است، بنابراین جواب بهینه آن در یکی از نقاط راسی  $Y$  اتفاق خواهد افتاد و خواهیم داشت:

$$v_I^R = \max_{x \in X} \min_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m x_i a_{ij}^R \quad (10)$$

با استفاده از روش تبدیل مسائل مینیماکس به مسائل خطی [۲۶]، مسئله (۱۰) به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \underline{v}^R \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^R x_i \geq \underline{v}^R \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (11)$$

فرض کنید  $x_i = \frac{x_i}{\underline{v}^R}$  و بدون از دست دادن کلیت مسئله،

فرض کنید  $\underline{v}^R > 0$ . در این صورت به ازای  $\sum_{i=1}^m x_i' = \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\underline{v}^R} = \frac{1}{\underline{v}^R}$  و  $x_i' \geq 0, i=1, \dots, m$

بنابراین مسئله (۱۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

ماتریس های عایدی فازی چندگانه زیر نمایش دهنده بازی چندهدفی با عایدی های فازی هستند:

$$\tilde{A}^1 = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^1 & \dots & \tilde{a}_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}^1 & \dots & \tilde{a}_{mn}^1 \end{bmatrix}, \dots, \tilde{A}^p = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}^p & \dots & \tilde{a}_{1n}^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}^p & \dots & \tilde{a}_{mn}^p \end{bmatrix}$$

که در آن  $\tilde{A}^k$  ماتریس عایدی هدف  $k$ ام بازی است. فضاهای راهبرد آمیخته برای بازیکنان ۱ و ۲ به صورت تعریف شده در روابط (۲) و (۳) هستند.

برای حل این بازی ماتریسی با عایدی های فازی همانند بخش قبل ابتدا تقریب نزدیک ترین بازه هر عدد فازی به کمک گزاره ۱-۲ به دست می آید. با این کار مسئله بازی چندهدفی با عایدی های فازی به مسئله بازی چندهدفی با عایدی های بازه ای تبدیل می شود. اکنون با انتخاب راهبردهای  $x \in X$  و  $y \in Y$  به ترتیب توسط بازیکنان ۱ و ۲، عایدی مورد انتظار بازی به صورت زیر می باشد:

$$v(x, y) = x^T A y = [v^1(x, y), \dots, v^p(x, y)] \quad (17)$$

که در آن  $A = [A^1, \dots, A^p]$  و

$$v^k(x, y) = x^T A^k y = x^T [a_{ij}^{kL}, a_{ij}^{kR}] y, k = 1, \dots, p \quad (18)$$

بازیکن ۱ (بیشینه کننده) باید راهبرد خود را چنان انتخاب کند که بیشترین عایدی را در مقابل هر راهبرد  $y \in Y$  از بازیکن ۲ (کمینه کننده) کسب کند. بازیکن ۲ نیز به طریق مشابه عمل خواهد کرد. بنابراین با توجه به این رفتار منطقی، سطح امنیت هر بازیکن بدترین مقدار سود دریافتی آن بازیکن با انتخاب هر راهبردی از سوی بازیکن دیگر تعریف می شود. سطوح امنیتی برای بازیکنان ۱ و ۲ با توجه به تابع هدف  $k$ ام به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\underline{V}^k(x) = \min_{y \in Y} [v^{kL}(x, y), v^{kR}(x, y)], k = 1, \dots, p \quad (19)$$

$$\bar{V}^k(x) = \max_{x \in X} [v^{kL}(x, y), v^{kR}(x, y)], k = 1, \dots, p \quad (20)$$

برای هر راهبرد  $x \in X$ ،  $k$  امین سطح امنیت بازیکن ۱ با رابطه (۱۹) نشان داده می شود که یک مسئله برنامه ریزی خطی با تابع هدف بازه ای است. سطوح امنیتی دو بازیکن،  $p$  تایی هایی به صورت زیر هستند:

$$\underline{V}(x) = (\underline{V}^1(x), \dots, \underline{V}^p(x)) \quad (21)$$

$$\bar{V}(y) = (\bar{V}^1(y), \dots, \bar{V}^p(y)) \quad (22)$$

مشابه با روندی که برای بازیکن ۱ تشریح شد،  $\bar{w}^{*R}$ ، ارزش بدبینانه بازی ماتریسی بازه مقدار حاصل برای بازیکن ۲ و راهبرد بهینه متناظر آن  $y_j^{*R}$ ، از حل مسئله زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n y_j' \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}^R y_j' \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & y_j' \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (15)$$

$$\cdot \sum_{j=1}^n y_j' = \frac{1}{\bar{w}^R} \quad \text{و} \quad y_j' = \frac{y_j}{\bar{w}^R}$$

همچنین ارزش خوش بینانه  $\bar{w}^{*L}$  بازی ماتریسی بازه مقدار حاصل برای بازیکن ۲ و راهبرد متناظر آن  $y_j^{*L}$ ، از حل مسئله زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n y_j' \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}^L y_j' \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \\ & y_j' \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (16)$$

$$\cdot \sum_{j=1}^n y_j' = \frac{1}{\bar{w}^L} \quad \text{و} \quad y_j' = \frac{y_j}{\bar{w}^L}$$

**قضیه ۳-۱:** ارزش های خوش بینانه و بدبینانه بازی که از حل مسائل (۱۲) و (۱۵) و همچنین (۱۴) و (۱۶) به دست می آیند با هم برابرند. به عبارت دیگر  $\underline{v}^{*L} = \bar{w}^{*L}$  و  $\underline{v}^{*R} = \bar{w}^{*R}$ .

اثبات: به آسانی می توان دید که مسائل (۱۲) و (۱۵) و همچنین (۱۴) و (۱۶) مسائل اولیه و دوگان برنامه ریزی خطی هستند. بنابراین طبق قضیه قوی دوگانی برنامه ریزی خطی، مقادیر بهینه توابع هدف (۱۲) و (۱۵) و همچنین (۱۴) و (۱۶) با هم برابرند، یعنی  $\underline{v}^{*L} = \bar{w}^{*L}$  و  $\underline{v}^{*R} = \bar{w}^{*R}$ .

**تبصره ۲:** با توجه به این واقعیت که بازیکن ۱ شخص محتاطی است، توصیه می شود که راهبرد به دست آمده از حل مسئله (۱۴) را به کار گیرد و همچنین با توجه به اینکه بازیکن ۲ انسان محتاطی است، توصیه می شود که راهبرد به دست آمده از مسئله (۱۵) را لحاظ کند.

### ۳. بازی ماتریسی چندهدفی با عایدی های فازی

در این بخش بازی ماتریسی چندهدفی با عایدی های فازی بررسی می شود. فرض کنید هر بازیکن  $p$  هدف داشته باشد.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}^{1R} x_i &\geq v_{-}^{1R} & j = 1, \dots, n \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}^{pR} x_i &\geq v_{-}^{pR} & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

از طرف دیگر، محدودیت‌های باقی‌مانده یعنی محدودیت‌های متناظر با  $Y \setminus S$  زایدند. زیرا  $\geq$  تحت ترکیبات محدب حفظ می‌شود و در نتیجه هر یک از محدودیت‌ها می‌توانند به صورت یک ترکیب محدب از محدودیت‌های فوق‌بازنویسی شوند. بنابراین مسئله (۲۶) با مسئله زیر معادل است که تعداد متناهی محدودیت دارد:

$$\begin{aligned} \max \quad & (v_{-}^{1R}, \dots, v_{-}^{pR}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^{1R} x_i \geq v_{-}^{1R} & j = 1, \dots, n \\ & \vdots \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^{pR} x_i \geq v_{-}^{pR} & j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (27)$$

برای حل مسئله (۲۷)، روش‌های مختلفی در بهینه‌سازی چند هدفی پیشنهاد شده است [۲۱]. در اینجا از روش مجموع وزنی به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k v_{-}^{kR} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^{1R} x_i \geq v_{-}^{1R} & j = 1, \dots, n \\ & \vdots \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^{pR} x_i \geq v_{-}^{pR} & j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{که در آن } \lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^p \mid \lambda \geq 0, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \right\}$$

مؤلفه  $\lambda_k$  از بردار  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \Lambda$  را می‌توان به عنوان اهمیت نسبی تابع هدف  $k$ ام برای بازیکن ۱ تعبیر کرد. با حل این مسئله، راهبردهای بهینه پارتو  $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$  و ارزش خوش‌بینانه بازی  $v_{-}^{*R}$  بازیکن ۱ به دست می‌آیند.

مفهوم فوق‌اجازه می‌دهد که بازی‌های ماتریسی چندهدفی تحت منطق بدترین حالت رفتار حریف تحلیل شوند. بازیکن ۱ باید راهبرد  $x$  خود را طوری انتخاب کند که سطوح امنیتی بازی بیشینه شود. بنابراین بازیکن ۱ با مسئله برنامه‌ریزی ریاضی زیر مواجه می‌شود:

$$\max_{x \in X} V_{-}(x) \quad (23)$$

یا به طور معادل

$$\begin{aligned} \max \quad & \left( \min_{y \in Y} [v^{1L}(x, y), v^{1R}(x, y)], \dots, \min_{y \in Y} [v^{pL}(x, y), v^{pR}(x, y)] \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (24)$$

در حالت خوش‌بینانه، بازیکن ۱ فرض می‌کند که بازیکن ۲ می‌خواهد حداکثر مقدار سطوح امنیتی بازیکن ۱ را کمینه کند. بنابراین بازیکن ۱ تصمیم می‌گیرد تا راهبرد خود را طوری انتخاب کند که آن‌ها را بیشینه نماید. بنابراین باید مسئله زیر را حل نماید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \left( \min_{y \in Y} v^{1R}(x, y), \dots, \min_{y \in Y} v^{pR}(x, y) \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (25)$$

با استفاده از شیوه تبدیل مسائل مینیماکس به مسائل خطی، مسئله (۲۵) به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & (v_{-}^{1R}, \dots, v_{-}^{pR}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m x_i a_{ij}^{1R} y_j \geq v_{-}^{1R} \quad \forall y \in Y \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m x_i a_{ij}^{pR} y_j \geq v_{-}^{pR} \quad \forall y \in Y \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (26)$$

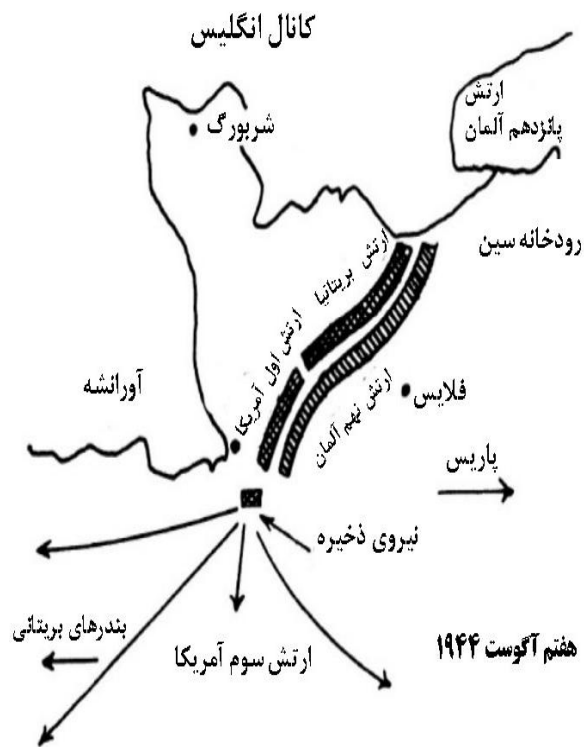
مسئله (۲۶) یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی چندهدفی است که در آن هر عنصر  $y \in Y$  متناظر با دقیقاً  $p$  محدودیت می‌باشد. بنابراین مسئله شامل تعداد نامتناهی محدودیت است. مجموعه نقاط راسی  $Y$  یعنی  $S = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  را در نظر بگیرید.

به وضوح محدودیت‌های متناظر با عناصر  $y \in S$  به صورت زیر هستند:

تبصره ۳: با توجه به این واقعیت که بازیکنان ۱ و ۲ اشخاص محتاطی هستند و رفتاری منطقی دارند توصیه می‌شود تا بدترین حالت از بازی را لحاظ کنند. بدین سبب توصیه می‌شود که راهبردهای به دست آمده از مسائل (۲۹) و (۳۰) را به کار گیرند.

#### ۴. کاربرد نظامی: موقعیت شکاف آورانسه<sup>۱</sup>

در این بخش یک مثال عددی در زمینه نظامی ارائه شده و برای حل آن روش پیشنهاد شده در بخش ۲ مورد استفاده قرار می‌گیرد. موقعیتی که در جنگ جهانی دوم در آگوست ۱۹۴۴ پیش آمده است، در شکل (۱) نمایش داده شده است.



شکل ۱. موقعیت شکاف آورانسه

ژنرال برادلی<sup>۲</sup> (فرمانده نیروهای آمریکایی، بازیکن ۱) تخمین پنج گامی خود را در گزارش جنگش به صورت زیر بیان می‌کند:

مرحله ۱. مأموریت: برادلی مأموریت دارد تا نیروهای دشمن را در میدان از بین ببرد.

مرحله ۲. موقعیت و اقدامات: فرمانده آلمان ژنرال وان کلاگ<sup>۳</sup> (بازیکن ۲) دو اقدام منطقی دارد: حمله به غرب برای نفوذ به دریا و امن ساختن جناح غربی و برش نیروهای واقع در جنوب شکاف؛

اگر بازیکن ۱ مسئله را به صورت بدبینانه نگاه کند به این معنی است که فرض می‌کند که بازیکن ۲ راهبرد خود را طوری انتخاب می‌کند که حداقل عایدی او را از اهداف کمینه کند. بنابراین، بازیکن ۱ تصمیم می‌گیرد تا راهبرد خود را طوری انتخاب کند تا این مقادیر را بیشینه کند. بنابراین با در پیش گرفتن روندی مشابه حالت خوش بینانه، ارزش بدبینانه بازی،  $\underline{v}^{*L}$  و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر آن  $x^{*L} = (x_1^{*L}, \dots, x_m^{*L})$  از حل مسئله برنامه ریزی خطی زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k \underline{v}^{kL} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij}^{iL} x_i \geq \underline{v}^{jL} \quad j=1, \dots, n \\ & \vdots \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij}^{iL} x_i \geq \underline{v}^{pL} \quad j=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (29)$$

به طور مشابه می‌توان ارزش بدبینانه و خوش بینانه بازیکن ۲ و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر را به ترتیب از حل مسائل زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{v}^{kR} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}^{jR} y_j \leq \bar{v}^{iR} \quad i=1, \dots, m \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}^{jR} y_j \leq \bar{v}^{pR} \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (30)$$

و

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{v}^{kL} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}^{jL} y_j \leq \bar{v}^{iL} \quad i=1, \dots, m \\ & \vdots \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}^{jL} y_j \leq \bar{v}^{pL} \quad i=1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (31)$$

<sup>1</sup> Avranches-Gap situation

<sup>2</sup> General Bradley

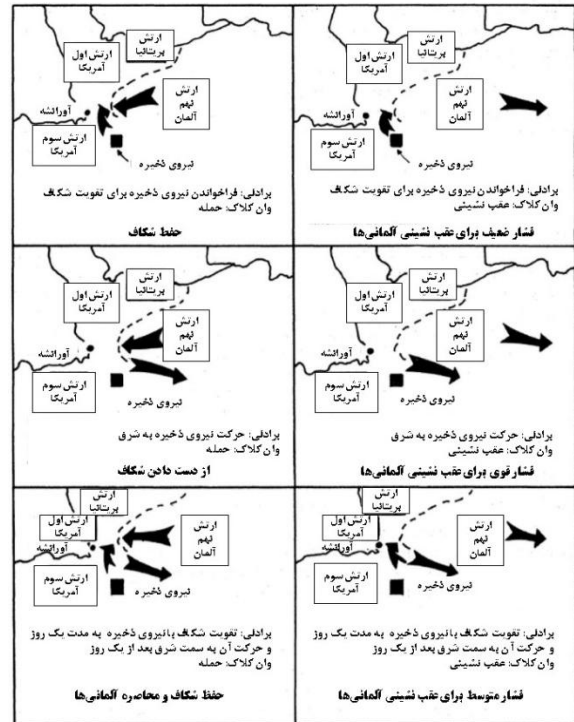
<sup>3</sup> General von Kluge



یا عقب نشینی به شرق و قرار گرفتن در موقعیت دفاعی قوی در نزدیکی رودخانه سین.

ژنرال برادلی سه اقدام در نظر داشت: (۱) فراخواندن نیروهای ذخیره برای دفاع از شکاف و کمک به ارتش، (۲) فرستادن نیروهای ذخیره برای محاصره نیروهای آلمانی، (۳) ترک موقعیت به مدت یک روز و آمدن به کمک ارتش و بعد از یک روز حرکت به شرق برای محاصره نیروهای آلمان.

مرحله ۳. تحلیل اقدامات دو طرف: با دو اقدام وان کلاگ و سه اقدام برادلی شش نبرد اتفاقی خواهد افتاد که در شکل (۲) نمایش داده شده است. برادلی سطر و وان کلاگ ستون را انتخاب می‌کنند. دو انتخاب مستقل تعیین خواهد کرد که نیروها در میدان نبرد به چه صورتی ظاهر خواهند شد.



شکل ۲. نبردهای ممکن از انتخاب راهبردها

خروجی احتمالی در شکل (۲) به صورت مختصر بیان شده است. ترتیب ترجیح خروجی‌های ممکن از خوب به بد از نظر آمریکایی‌ها به صورت زیر است:

- ۱- نگه داشتن شکاف، محاصره آلمانی‌ها
- ۲- فشار قوی برای عقب نشینی آلمان
- ۳- فشار متوسط برای عقب نشینی آلمان

۴- فشار ضعیف برای عقب نشینی آلمان

۵- نگه داشتن شکاف

۶- از دست دادن شکاف

مرحله ۴. مقایسه اقدامات: با داشتن یک ترتیب ترجیح، برادلی توانست اقداماتش را مورد مقایسه قرار دهد. تحت دکترین نظامی آمریکا او می‌خواست راهبرد خود را طوری انتخاب کند تا بیشترین موفقیت را با توجه به توانایی‌های دشمن به دست آورد.

مرحله ۵. تصمیم: با توجه به ملاحظات فوق برادلی راهبرد سومش را انتخاب کرد.

وان کلاگ با تحلیل موقعیت به این نتیجه رسید که باید عقب‌نشینی کند ولی این اقدام هیچگاه صورت نگرفت. هیتلر<sup>۱</sup> که مایل‌ها از موقعیت فاصله داشت دستور داد تا به شکاف حمله کنند.

برادلی بازیکن بیشینه کننده است زیرا خروجی نبردهای ممکن از نقطه نظر او تجزیه و تحلیل شده‌اند. بنابراین وان کلاگ بازیکن کمینه کننده است. وان کلاگ می‌داند که نبرد سختی خواهد داشت بنابراین به دنبال آن است که شکست سختی نبیند. خروجی احتمالی از شش نبرد ممکن در ماتریس زیر نمایش داده شده است:

نگه داشتن شکاف	فشار ضعیف برای عقب نشینی آلمانی‌ها
برش شکاف	فشار قوی برای عقب نشینی آلمانی‌ها
نگه داشتن شکاف و محاصره نیروهای آلمانی	فشار متوسط برای عقب نشینی آلمانی‌ها

برادلی فکر می‌کند که وان کلاگ راهبرد خود را طوری انتخاب خواهد کرد که شکست کمتری ببیند یعنی به دنبال آن است که میزان موفقیت فرمانده آمریکایی را تا حد ممکن کم کند. بنابراین، برادلی راهبرد خود را طوری انتخاب خواهد کرد که بیشترین عایدی را به دست آورد. وان کلاگ نیز به طور مشابه فکر می‌کند. با توجه به این‌که این بازی نقطه زینی ندارد (یعنی  $\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$ )، بنابراین، باید از راهبردهای آمیخته برای حل بازی استفاده کرد. بازیکنان با در نظر گرفتن توزیع احتمال برای راهبردهای محض به دنبال انتخاب راهبرد بهینه خود هستند.

<sup>۱</sup> Hitler

جواب بهینه این مسئله به صورت

$$(x_1^{*R}, x_2^{*R}, x_3^{*R}) = (0.027, 0.093)$$

به دست می آید. بنابراین:

$$v^{*R} = 8/33 \text{ و } (x_1^{*R}, x_2^{*R}, x_3^{*R}) = (0.225, 0.775)$$

همچنین مسئله (۱۴) برای بازیکن ۱ در این مثال به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1' + x_2' + x_3' \\ \text{s.t.} \quad & 2/5x_1' + 0/5x_2' + 9/5x_3' \geq 1 \\ & 3/5x_1' + 8x_2' + 6/5x_3' \geq 1 \\ & x_1', x_2', x_3' \geq 0 \end{aligned}$$

با استفاده از روش سیمپلکس جواب زیر برای این مسئله به دست می آید:

$$(x_1^{*L}, x_2^{*L}, x_3^{*L}) = (0.041, 0.103)$$

بنابراین:

$$v^{*L} = 6/94 \text{ و } (x_1^{*L}, x_2^{*L}, x_3^{*L}) = (0.28, 0.71)$$

به طور مشابه برای بازیکن ۲، از حل مسائل برنامه ریزی خطی (۱۵) و (۱۶) می توان به دست آورد:

$$\begin{aligned} (y_1^{*R}, y_2^{*R}) &= (0.13, 0.87), \quad \bar{w}^{*R} = 8/33, \\ (y_1^{*L}, y_2^{*L}) &= (0.15, 0.86), \quad \bar{w}^{*L} = 6/94 \end{aligned}$$

همان گونه که مشاهده می شود، بهترین راهبرد برای بازیکن ۱ راهبرد سوم او و برای بازیکن ۲ راهبرد دومش می باشد. همچنین مقادیر تابع هدف در حالت های خوش بینانه یک بازیکن با بدبینانه بازیکن دیگر برابرند.

#### ۵. یک کاربرد نظامی از بازی دوهدفی

در این بخش، کاربردی از بازی های چندهدفی با ارائه یک مثال بیان می شود. سناریوی بحث شده در این مثال تنها برای نمایش کاربرد این نوع از بازی ها و محاسبه راهبردهای بهینه برای بازیکنان است و داده های آن واقعی نیستند.

نیروهای دو کشور در حال جنگ را در موقعیتی به صورت نمایش داده شده در شکل (۳) در نظر بگیرید. بازیکنان بازی همان فرماندهان نیروهای ۱ و ۲ هستند.

پس از اینکه که اولویت های فرمانده آمریکایی مشخص شد این موارد باید به صورت کمی در ماتریس بازی وارد شوند. توجه شود که بازی از نوع آمیخته است یعنی فرمانده ممکن است از تلفیقی از راهبردهایش در نبرد استفاده کند. همچنین این ترجیحات بر اساس اطلاعات کاملاً قطعی به دست نیامده است و در بیان ترجیحات، قضاوت و داوری انسان ها به کار گرفته شده است که همراه با نادقیقی و ابهام در تصمیم گیری است و این مسئله باعث خواهد شد که در کمی سازی ترجیحات از اعداد فازی استفاده شود. برای بیان عباراتی از قبیل «فشار قوی برای عقب نشینی آلمان، فشار متوسط و غیره» از نظریه مجموعه های فازی استفاده می شود. استفاده از نوع عدد فازی خاص بستگی به نوع و میزان اطلاعات به دست آمده از کارشناسان دارد. در این مثال با توجه به اولویت ها اعداد فازی تقریباً ۱۰ تا ۰/۵ به ترتیب از خوب به بد به کار گرفته شده است و برای سادگی به صورت اعداد فازی مثلثی نمایش شده اند. در حقیقت علاوه بر این که ترجیحات فرماندهان آمریکایی لحاظ شده است بیان نادقیقی ترجیحاتشان نیز اعمال شده است و این مطلب باعث بهبود در تصمیم نهایی خواهد شد.

بنابراین، ماتریس عایدی بازی به صورت زیر بیان می شود:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (2, 3, 5) & (3, 4, 6) \\ (0.5, 1) & (7, 9, 10) \\ (9, 10, 11) & (6, 7, 9) \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از تقریب نزدیک ترین بازه اعداد فازی، ماتریس فوق به ماتریس عایدی زیر تبدیل می شود:

$$A = \begin{bmatrix} [2/5, 4] & [3/5, 5] \\ [0.5, 0.75] & [8, 9/5] \\ [9/5, 10/5] & [6/5, 8] \end{bmatrix}$$

مسئله (۱۲) برای بازیکن ۱ در این مثال به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1' + x_2' + x_3' \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1' + 0.75x_2' + 10/5x_3' \geq 1 \\ & 5x_1' + 9/5x_2' + 8x_3' \geq 1 \\ & x_1', x_2', x_3' \geq 0 \end{aligned}$$

با استفاده از روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه ریزی خطی،

به صورت زیر ارائه شده‌اند:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} (175, 180, 190) & (150, 156, 158) \\ (80, 90, 100) & (175, 180, 190) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} (125, 130, 135) & (120, 130, 135) \\ (120, 130, 140) & (150, 160, 170) \end{bmatrix}.$$

با استفاده از مفهوم تقریب نزدیک‌ترین بازه اعداد فازی، ماتریس‌های فوق به صورت ماتریس‌های زیر با عایدی‌های بازه‌ای تبدیل می‌شوند:

$$A_1 = \begin{bmatrix} [177/5, 185] & [153, 157] \\ [89, 95] & [177/5, 185] \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} [127/5, 132.5] & [125, 132.5] \\ [125, 135] & [155, 165] \end{bmatrix}.$$

برای محاسبه راهبردهای بهینه پارتو و ارزش بازی در حالات خوش‌بینانه و بدبینانه بازیکن ۱، دو مسئله زیر حل می‌شود. فرض کنید که اهمیت اهداف بازی برای بازیکن ۱ یکسان باشد. بنابراین

$$(\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5) \text{ (حالت خوش‌بینانه)}$$

$$\max \quad \lambda_1 v_1^R + \lambda_2 v_2^R$$

$$s.t. \quad 185x_1 + 95x_2 \geq v_1^R$$

$$157x_1 + 185x_2 \geq v_2^R$$

$$132/5x_1 + 132.5x_2 \geq v_1^R$$

$$132/5x_1 + 165x_2 \geq v_2^R$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(حالت بدبینانه)

$$\max \quad \lambda_1 v_1^L + \lambda_2 v_2^L$$

$$s.t. \quad 177/5x_1 + 185x_2 \geq v_1^L$$

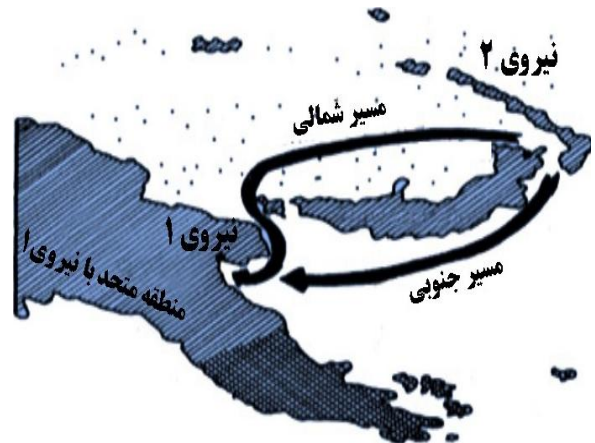
$$153x_1 + 177/5x_2 \geq v_2^L$$

$$127/5x_1 + 125x_2 \geq v_1^L$$

$$125x_1 + 155x_2 \geq v_2^L$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



شکل ۳. موقعیت نبرد

نیروی ۲ برای رسیدن به منطقه مورد نظر باید یکی از دو مسیر شمالی یا جنوبی را انتخاب کند. نیروی ۱ نیز باید یکی از دو مسیر را برای قرار دادن جنگنده‌ها و نیروی زمینی خود انتخاب کند. البته هر یک از فرماندهان می‌توانند در هر دو مسیر نیز حرکت کنند و با این اقدام نیز به دنبال این هستند که در کدام مسیر تمرکز بیشتری داشته باشند.

بنابراین هر یک از فرماندهان دو راهبرد دارند: ۱- مسیر شمالی ۲- مسیر جنوبی. مسیر شمالی مسیری با امنیت کم از لحاظ حرکت و آب و هوا است ولی مسیر جنوبی دارای مسیر حرکت مناسب و آب و هوای مناسب می‌باشد. نیروی ۲ دارای تجهیزات مدرن است و فرمانده این نیرو در پی آن است که با کمترین شکست و آسیب، وارد منطقه شود. این منطقه در دست نیروی ۱ است و فرمانده این نیرو در پی آن است که علاوه بر وارد کردن ضربات سنگین به نیروی ۲ تجهیزات آن‌ها را به صورت سالم به‌دست آورد. به اسارت گرفتن برخی از نفرات نیروی ۲ موفقیت سیاسی بالایی برای کشور ۱ خواهد داشت. ساختار بازی به صورت مجموع صفر و دوهدفی است و فرمانده ۱ به دنبال بیشینه‌سازی موفقیت و فرمانده ۲ در پی کمینه کردن شکست است. یعنی فرمانده ۱ علاوه بر اینکه در تلاش است تا از ورود نیروی ۲ به منطقه ۱ جلوگیری کند در پی به اسارت گرفتن برخی افسران نیروی ۲ و به‌دست آوردن تجهیزات مدرن نیروی ۲ نیز می‌باشد. فرمانده ۲ نیز در تلاش است تا موفقیت فرمانده ۱ را تا حد ممکن کم کند.

فرض کنید که تحلیلگران نظامی پس از بررسی موقعیت و نبردهای احتمالی، خروجی ممکن از هر نبرد را با اعداد تقریبی بیان کرده باشند. فرض کنید ماتریس‌های عایدی این بازی

صفر با عایدی های فازی مورد بررسی قرار گرفت و ملاحظه گردید راهبردهای بهینه به دست آمده از این روش با تحلیل دکترین نظامی آمریکا مطابقت دارد. کاربردهای گسترده بازی های چندهدفی در مسائل نظامی در دنیای امروز اهمیت این تحقیق را نشان می دهد. به ویژه، تحقیق در این زمینه ها در ساخت سامانه شبیه سازی و نرم افزاری بازی جنگ پیشرفته و مدرن می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

## ۷. مراجع

- [1] Neumann, J., V.; Morgenstern, O. "Theory of Games and Economic Behavior"; Wiley, New York, 1944.
- [2] Haywood, O. G. "Military Decision and Game Theory"; J. Oper. Res. Soc. Am. 1989, 2, 365-385.
- [3] Fudenberg, D.; Tirole, J. "Game Theory"; The MIT Press, 1991.
- [4] Owen, G. "Game Theory"; Academic Press, San Diego, Third Ed. 1995.
- [5] Aplac, H.; Kabak, M.; Kose, E. "A Two Person Zero Sum Game Oriented to Integration of Objectives"; J. Military Studies 2014, 5, 65-85.
- [6] Türksen, I. B. "An Ontological and Epistemological Perspective of Fuzzy Set Theory"; Elsevier, 2006.
- [7] Cheng, C. H.; Lin, Y. "Evaluating the Best Main Battle Tank Using Fuzzy Decision Theory With Linguistic Criteria Evaluation" Eur. J. Oper. Res. 2002, 142, 174-186.
- [8] Sakawa, M.; Nishizaki, I. "Cooperative and Noncooperative Multi-Level Programming"; Springer, 2009.
- [9] Pamucar, D.; Bozanic, D.; Dorovic, B. "Fuzzy Logic in Decision Making Process in the Armed Forces of Serbia, Fuzzy Sets, Fuzzy Logic in Military Decision Making Process, Modeling of Fuzzy Logic System to Support Decision Making"; Lambert Academic Publishing, 2011.
- [10] Campos, L. "Fuzzy Linear Programming Models to Solve Fuzzy Matrix Games"; Fuzzy Sets Syst. 1989, 32, 275-289.
- [11] Bector, C. R.; Chandra, S. "Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games"; Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [12] Li, D. F. "Lexicographic Method For Matrix Games with Payoffs of Triangular Fuzzy Numbers"; Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Syst. 2008, 16, 371-389.
- [13] Clemente, M.; Fernandez, F. R.; Puerto, J. "Pareto-Optimal Security Strategies in Matrix Games with Fuzzy Payoffs"; Fuzzy Sets Syst. 2011, 176, 36-45.
- [14] Collins, W. D.; Hu, C. Y. "Studying Interval Valued Matrix Games with Fuzzy Logic"; Soft Comput. 2008, 12, 147-155.
- [15] Li, D. F. "A Fast Approach to Compute Fuzzy Values of Matrix Games with Payoffs of Triangular Fuzzy Numbers"; Eur. J. Oper. Res. 2012, 223, 421-429.
- [16] Chandra, S.; Aggarwal, A. "On Solving Matrix Games With Payoffs of Triangular Fuzzy Numbers: Certain Observations and Generalizations"; Eur. J. Oper. Res. 2015, 246, 575-581.
- [17] Li, D. F.; Nan, J. X. "An Interval-Valued Programming Approach to Matrix Games with Payoffs of Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers"; Iranian J. of Fuzzy Syst. 2014, 11, 2, 45-57.

از حل مسائل فوق جواب های زیر به دست می آید:

$$(x_1^{*L}, x_2^{*L}) = (0.79, 0.21), (v_1^{*L}, v_2^{*L}) = (158/13, 126/98)$$

$$(x_1^{*R}, x_2^{*R}) = (0.76, 0.24), (v_1^{*R}, v_2^{*R}) = (163/64, 133/0.9)$$

به طور مشابه، برای بازیکن ۲ جواب های خوش بینانه و بدبینانه به صورت زیر به دست می آید (در اینجا نیز فرض می شود  $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5)$ ):

$$(y_1^{*L}, y_2^{*L}) = (0.92, 0.08), (\bar{v}_1^{*L}, \bar{v}_2^{*L}) = (175/61, 127/31)$$

$$(y_1^{*R}, y_2^{*R}) = (1, 0), (\bar{v}_1^{*R}, \bar{v}_2^{*R}) = (185, 135)$$

طبق نتایج به دست آمده هر دو فرمانده با تمرکز بر استراتژی اولشان شانس موفقیت بالاتری دارند.

برای حل مسائل فوق از نرم افزار لینگو<sup>۱</sup> استفاده شده است.

**تبصره ۴:** روش های ارائه شده در بخش ۲ و ۳ برای تمام انواع اعداد فازی معتبر است. با توجه به سادگی محاسبات در این مثال ها ترجیحات فرماندهان از خروجی بازی به صورت اعداد فازی مثلثی برای بازیکنان نمایش داده شد. این اعداد با توجه به خروجی احتمالی از نبرد و اولویت بندی آن ها توسط آمریکایی ها (در مثال بخش ۴) در نظر گرفته شد و ممکن است به صورت های دیگری نیز نمایش داده شوند. در دنیای واقعی برای بیان مناسب این عایدی ها باید با افراد خبره نظامی و درگیر موقعیت مورد نظر مشورت شود. هر چند در این مقاله سعی شده است تا از اعداد فازی مثلثی مناسب استفاده شود، بیان این مدل ها برای اعداد فازی دیگر نیز به صورت مشابه خواهد بود چرا که اعداد فازی با استفاده از تقریب نزدیک ترین بازه به صورت بازه ای نوشته می شوند.

## ۶. نتیجه گیری

در این مقاله یک روش برای یافتن راهبردهای بهینه و ارزش بازی در مسائل بازی با یک و چند هدف به همراه عایدی های فازی ارائه شد. با استفاده از تقریب نزدیک ترین بازه، مسئله بازی تک هدفی با عایدی های فازی به یک بازی با عایدی های بازه ای تبدیل شد و با حل دو مسئله برنامه ریزی خطی جواب های خوش بینانه و بدبینانه بازیکنان به دست آمد. دو مسئله برنامه ریزی خطی چندهدفی نیز برای محاسبه ارزش های خوش بینانه و بدبینانه و راهبردهای بهینه پارتوی متناظر آن ها در بازی های چندهدفی با عایدی های فازی پیشنهاد شد. سادگی حل مسئله از امتیازات روش پیشنهادی می باشد. نحوه تصمیم گیری در یک نبرد اتفاق افتاده در جنگ جهانی دوم به صورت یک بازی مجموع

<sup>1</sup> Lingo

- [23] Bigdeli, H.; Hassanpour, H. "A Satisfactory Strategy of Multi-Objective Two Person Matrix Games with Fuzzy Payoffs"; Iranian J. Fuzzy Syst. 2016, 13, 17-33.
- [24] Sakawa, M. "Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization"; Plenum Press, New York and London, 1993.
- [25] Grzegorewski, P. "Nearest Interval Approximation of a Fuzzy Number"; Fuzzy Sets Syst. 2002, 130, 321-330.
- [26] Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J. "Linear Programming and Network Flows"; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.
- [18] Dutta, B.; Gupta, S. K. "On Nash Equilibrium Strategy of Two Person Zero Sum Games with Trapezoidal Fuzzy Payoffs"; Fuzzy Information and Eng. 2014, 6, 299-314.
- [19] Maeda, T. "On Characterization of Equilibrium Strategy of Two-Person Zero Sum Games With Fuzzy Payoffs"; Fuzzy Sets Syst. 2003, 139, 283-296.
- [20] Cunlin, L.; Qiang, Z. "Nash Equilibrium Strategy For Fuzzy Noncooperative Games"; Fuzzy Sets Syst. 2011, 176, 46-55.
- [21] Seikh, M. R.; Nayak, P. K.; Pal, M. "An Alternative Approach for Solving Fuzzy Matrix Games"; Int. J. Math. Soft Comput. 2015, 5, 79-92.
- [22] Nishizaki, I.; Sakawa, M. "Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution"; Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001.