

تعیین وفقی پارامتر مقیاس در فیلتر کالمن غیرملموس براساس مدل‌های چندگانه تعاملی

فرهاد معصومی گنجگاه^{۱*}، رضا فاطمی مفرد^۲، نادر قدیمی^۳

۱- دانشجوی دکتری، ۲- استادیار، ۳- استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

(دریافت: ۹۴/۰۴/۲۸؛ پذیرش: ۹۵/۰۲/۱۲)

چکیده

این مقاله در مورد استفاده از فیلتر کالمن غیرملموس (UKF) جهت تخمین دینامیک‌های غیرخطی است و در آن، روش‌های تعیین وفقی پارامتر مقیاس در این نوع از فیلترها به‌طور خاص بررسی شده است. با توجه به عدم وجود راه‌حل تحلیلی و استفاده از روش‌های عددی، بار محاسباتی این نوع از فیلترها به شدت افزایش می‌یابد. در این مقاله یک روش جدید براساس ساختار مدهای چندگانه تعاملی (IMM) پیشنهاد شده است که حجم محاسباتی کمتری نسبت به روش‌های قبل دارد. عملکرد این فیلتر در یک مسئله ردگیری با استفاده از شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت دقت، بار محاسباتی و پایداری این فیلتر با فیلتر UKF وفقی به روش‌های عددی و فیلتر UKF با پارامتر ثابت مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که عملکرد فیلتر پیشنهادی بهتر از فیلتر UKF با پارامتر ثابت و بسیار نزدیک به فیلتر UKF وفقی با روش‌های عددی است.

واژگان کلیدی

فیلتر با مدهای چندگانه تعاملی، فیلتر غیرخطی، فیلتر کالمن غیرملموس، روش بی‌زین

۱. مقدمه

است که از طریق روابط بازگشتی براساس رویکرد بی‌زین و محاسبه تابع چگالی احتمال حالت شرطی است.

$$p(x_k|Z^k) = \frac{p(x_k|Z^{k-1})p(z_k|x_k)}{\int p(x_k|Z^{k-1})p(z_k|x_k)dx_k} \quad (3)$$

$$p(x_{k+1}|Z^k) = \int p(x_{k+1}|x_k)p(x_k|Z^k)dx_k \quad (4)$$

در روابط (۳) و (۴)، بردار Z^k داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k ام و همچنین $p(x_k|Z^k)$ و $p(x_{k+1}|Z^k)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال بردار حالت و پیش‌بینی یک گام به جلو آن به شرط مشاهدات تا لحظه k ام است. راه‌حل بسته برای معادلات بی‌زین بالا در حالت‌های خاص مانند سامانه‌های خطی گوسی وجود دارد که منجر به معادلات فیلتر کالمن می‌شود. پس از موفقیت‌های قابل توجهی که در روش‌های تخمین در مسائل خطی حاصل شد، توسعه این روش‌ها برای مسائل غیرخطی نیز مورد توجه قرار گرفت. از طرفی راه‌حل بهینه برای حل مسئله تخمین غیرخطی منجر به بردار حالت با ابعاد نامحدود می‌شود [۱]، لذا روش‌های زیربهرینه‌ای نیز مانند روش مونت کارلو عددی [۲] و روش‌های تقریب تحلیلی توسعه یافته‌اند که البته برای سامانه‌هایی با بردار حالت بزرگ، غیرعملی هستند. در این میان، دو روش فیلتر

با توجه به این‌که بسیاری از سامانه‌های موجود دارای دینامیک غیرخطی هستند و یا به‌عبارتی، مدل‌سازی دقیق دینامیک بسیاری از سامانه‌ها، منجر به معادلات غیرخطی می‌شود، بنابراین موضوع تخمین دینامیک غیرخطی براساس داده‌های آغشته به نویز موضوع بسیاری از پژوهش‌ها بوده است. یک فرآیند تصادفی گسسته در زمان غیرخطی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$X_{k+1} = f(X_k) + W_k \quad (1)$$

$$Z_k = h(X_k) + v_k \quad (2)$$

که در آن $X_k \in R^{n_x}$ و $Z_k \in R^{n_z}$ به ترتیب بردار حالت و مشاهدات سامانه در لحظه k است و همچنین $f: R^{n_x} \rightarrow R^{n_x}$ و $h: R^{n_x} \rightarrow R^{n_z}$ توابع برداری شناخته شده مربوط به معادلات حالت و اندازه‌گیری هستند. $W_k \in R^{n_x}$ و $v_k \in R^{n_z}$ به ترتیب بردار نویز فرآیند و نویز اندازه‌گیری است که دارای توزیع گوسی مستقل با میانگین صفر و واریانس Q_k و R_k است.

روش رایج برای تخمین حالت سامانه، تخمین آن با استفاده از تابع چگالی احتمال حالت سامانه به شرط مقادیر اندازه‌گیری

استفاده است.

فرض کنید که $x \in R^{n_x}$ و $y \in R^{n_y}$ به ترتیب بردار ورودی و خروجی تابع غیرخطی g است.

$$y = [g_1(x) \quad \dots \quad g_{n_y}(x)] \quad (5)$$

در این صورت برای حل مسئله بی‌زین، مقدار متوسط و همبستگی و همبستگی متقابل توزیع خروجی بایستی براساس دو ممان اول شناخته شده بردار ورودی یعنی متوسط آن، \bar{x} و همبستگی متناظر با آن، P_{xx} ، تقریب زده شود.

$$\hat{y} = E[y] = E[g(x)] \quad (6)$$

$$P_{yy} = cov(y) = E[(y - \hat{y})(y - \hat{y})^T] \quad (7)$$

$$P_{xy} = cov(y) = E[(x - \hat{x})(y - \hat{y})^T] \quad (8)$$

در صورتی که n_x اندازه بردار حالت باشد برای تبدیل غیرملموس نیاز به $2n_x + 1$ نقطه نمونه است. مقدار هر کدام از این نقاط به همراه وزن دهی هر نقطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \bar{x} & w_0 &= \frac{\kappa}{n_x + \kappa} \\ \chi_i &= \bar{x} + \left(\sqrt{(n_x + \kappa)P_{xx}} \right)_i & w_i &= \frac{1}{2(n_x + \kappa)} \\ \chi_{i+n_x} &= \bar{x} - \left(\sqrt{(n_x + \kappa)P_{xx}} \right)_i & w_{i+n_x} &= \frac{1}{2(n_x + \kappa)} \\ & & i &= 1, \dots, n_x \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن χ_i و w_i به ترتیب نقطه نمونه i ام و وزن دهی متناظر با آن و P_{xx} ماتریس کواریانانس بردار حالت و $\left(\sqrt{(n_x + \kappa)P_{xx}} \right)_i$ بیانگر ستون i ام متعلق به ریشه دوم ماتریس $P_{xx}(n_x + \kappa)$ است و همچنین κ ، میزان پارامتر مقیاس فیلتر می‌باشد که مقدار پخش‌شدگی نقاط نمونه را در اطراف میانگین متغیر تصادفی تعیین می‌کند و لذا در تعیین دقت تقریب موثر است. در ادامه نقاط نمونه بدست آمده، از تابع غیرخطی انتشار می‌یابند (شکل ۱) و در نهایت براساس این نقاط، میانگین کواریانانس و کواریانانس متقابل بردار تصادفی خروجی به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$Y_i = g(\chi_i) \quad (10)$$

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i Y_i \quad (11)$$

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i (Y_i - \hat{y})(Y_i - \hat{y})^T \quad (12)$$

$$P_{xy} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i (Y_i - \hat{y})(\chi_i - \hat{x})^T \quad (13)$$

با محاسبه میزان تقریبی متوسط و همبستگی بردار خروجی

کالمن توسعه یافته (EKF^1) و فیلتر کالمن غیرملموس (UKF^2) از نظر توازن بین عملیاتی بودن و عملکرد، از دیگر روش‌ها پیشی گرفته‌اند [۳].

در فیلتر کالمن توسعه یافته، تابع غیرخطی در نقطه امید ریاضی، خطی‌سازی می‌شود و این کار از طریق بسط تیلور مرتبه اول انجام می‌گیرد، بنابراین برای توابع به شدت غیرخطی، میزان خطای تقریب با افزایش مقدار جملات مرتبه بالاتر بسط تیلور، رشد می‌کند. برای مثال در کاربرد ردگیری رادار، متغیرهای حالت معمولاً در مختصات کارتیزین تعریف می‌شوند و مقادیر اندازه‌گیری در مختصات کروی، قطبی و یا مختصات کسینوس جهتی می‌باشند که منجر به یک تبدیل غیرخطی از مقادیر اندازه‌گیری به متغیرهای حالت می‌شود. تقریب مرتبه اول بسط تیلور در این تبدیل می‌تواند با خطای قابل توجهی همراه باشد [۴] و این درحالی است که فیلتر کالمن غیرملموس با وجود پیچیدگی محاسباتی برابر با فیلتر کالمن توسعه یافته، قادر است توابع غیر خطی را با دقت بسط تیلور مرتبه سوم تخمین بزند [۵] و از پایداری بهتری نیز برخوردار است [۶].

۲. فیلتر کالمن غیرملموس

ایده اصلی در فیلتر کالمن غیرملموس بر این اصل استوار است که تقریب توزیع احتمال ساده‌تر از تقریب تابع غیرخطی است [۷]. این در حالی است که اگر تابع توزیع احتمال خروجی تابع غیرخطی، گوسی فرض شود، تخمین دو ممان اول توزیع، یعنی میانگین و کواریانانس برای تعیین کل توزیع کافی خواهد بود، به همین دلیل مجموعه نقاط نمونه^۳ معینی در اطراف نقطه ورودی تابع غیرخطی تولید می‌شوند و با انتشار این نقاط از مدل غیرخطی (با هر مرتبه از غیرخطی بودن)، مقدار میانگین و کواریانانس محاسبه می‌شود.

۲-۱. تبدیل غیرملموس

به فرآیند تعیین نقاط نمونه مناسب جهت انتشار در تابع غیرخطی و تقریب میزان میانگین و کواریانانس خروجی براساس نقاط انتشار یافته، تبدیل غیرملموس گفته می‌شود. شایان ذکر است که مانند فیلتر کالمن توسعه یافته، در این جا نیز فرض می‌شود توزیع خروجی تابع غیرخطی، گوسی است که البته همواره فرض درستی نیست ولی برای تقریب توزیع خروجی قابل

¹ Extended Kalman Filter

² Unscented Kalman Filter

³ Sample Points

کواریانس $cov(f(\hat{x}_{k|k}))$ با استفاده از تبدیل غیرملموس روابط $(13-10)$ محاسبه می‌شود.

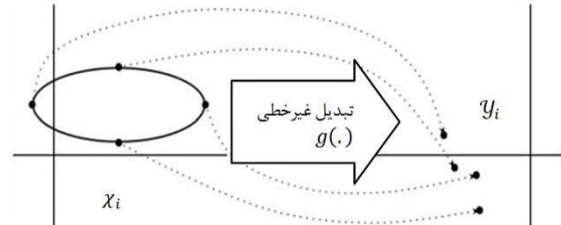
شایان ذکر است که برای گام‌های بعدی، $k = k + 1$ ، الگوریتم از مرحله دوم اجرا می‌شود.

۲-۲. تعیین پارامتر مقیاس در فیلتر کالمن غیرملموس

پارامتر مقیاس، κ ، در فیلتر کالمن غیرملموس یک پارامتر طراحی محسوب می‌شود و مقدار آن براساس تحلیل نوع تبدیل غیر ملموس پیشنهاد می‌شود [۸]. در این تحلیل بسط تیلور میانگین و کواریانس واقعی تابع غیرخطی با میانگین و کواریانس به‌دست‌آمده از تبدیل غیرملموس روابط (۱۳-۱۱) مورد مقایسه قرار می‌گیرد و بر این اساس برای محاسبه مقدار پارامتر مقیاس جهت داشتن خطای کمتر از مرتبه چهارم بسط تیلور از رابطه $\kappa = 3 - n_x$ استفاده می‌شود که در آن n_x اندازه بردار حالت است. برای بردار حالت با ابعاد بزرگتر از ۳، مقدار κ منفی خواهد بود و در این شرایط ممکن است ماتریس کواریانس خروجی تبدیل، $P_{y,y}$ ، مثبت تعریف نباشد، لذا برای ابعاد بردار حالت بزرگتر از ۳، مقدار پارامتر مقیاس $\kappa = 0$ پیشنهاد شده است [۹] که در نهایت با وجود اختلاف در اصول اولیه طراحی، معادل فیلتر کاباچر^۱ می‌شود [۱۰]. از سویی دیگر برای توابع به شدت غیرخطی، دقت مرتبه چهارم بسط تیلور نیز می‌تواند خطای قابل توجهی داشته باشد لذا الگوریتم‌های متفاوتی برای محاسبه نقاط نمونه پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به تبدیل‌های غیرملموس با مرتبه بالا^۲ و تبدیلات مبتنی بر ربعی‌سازی گاوس^۳ هرमित^۴ اشاره کرد [۱۱-۱۲].

با توجه به این که پارامتر مقیاس روی دقت تخمین تاثیر می‌گذارد و براساس نوع تابع غیرخطی، مقدار و ابعاد بردار حالت، مقدار بهینه این پارامتر می‌تواند متفاوت باشد [۱۲]، متفاوت بودن مقدار بهینه پارامتر مقیاس براساس وضعیت بردار حالت باعث شده است که روش‌هایی برای تعیین وقتی پارامتر مقیاس پیشنهاد شود [۱۷-۱۴] که از جمله این روش‌ها می‌توان روش بیشینه درست‌نمایی^۴ (ML)، روش بیشینه احتمال پسین^۵ (MPP) و روش‌های مبتنی بر گشتاورها شامل روش حداقل خطای پیش‌بینی اندازه‌گیری^۶ (MMPE) و حداقل خطای پیش‌بینی اندازه‌گیری توسعه‌یافته^۷ (MEMPE) را نام برد، که در ادامه هر کدام به‌طور مختصر توضیح داده می‌شود.

و با تقریب تابع چگالی احتمال خروجی به صورت توزیع گاوسی، معادلات فیلتر کالمن قابل اجرا خواهد بود.



شکل ۱. انتشار نقاط نمونه از تابع غیرخطی

الگوریتم کلی فیلتر کالمن غیرملموس را می‌توان در سه مرحله زیر خلاصه کرد.

مرحله اول: پارامتر مقیاس تبدیل غیرملموس تعیین می‌گردد و شرایط اولیه شامل متوسط پیش‌بینی اولیه $\hat{x}_{0|-1} = E(x_0)$ و ماتریس کواریانس تخمین اولیه $P_{0|-1} = cov(x_0) = P_0$ تعریف می‌شود.

مرحله دوم: بردار حالت و ماتریس کواریانس حالت تخمینی سامانه براساس مقادیر اندازه‌گیری به‌روز رسانی می‌شود.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_{k|k}(z_k - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (14)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_{k|k}P_{z,k|k-1}K_{k|k}^T \quad (15)$$

که در آن $K_{k|k}$ میزان بهره فیلتر در لحظه k ام است.

$$K_{k|k} = P_{xz,k|k-1}(P_{z,k|k-1})^{-1} \quad (16)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = E[z_k | Z^{k-1}] = E[h(\hat{x}_{k|k-1})] \quad (17)$$

$$P_{z,k|k-1} = E[(z_k - \hat{z}_{k|k-1})(z_k - \hat{z}_{k|k-1})^T] = cov[h(\hat{x}_{k|k-1})] + R_k \quad (18)$$

$$P_{xz,k|k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(z_k - \hat{z}_{k|k-1})^T] \quad (19)$$

که در آن متوسط تخمین اندازه‌گیری، $\hat{z}_{k|k-1}$ ، و ماتریس کواریانس $cov[h(\hat{x}_{k|k-1})]$ و ماتریس کواریانس متقابل $P_{xz,k|k-1}$ با استفاده از تبدیل غیرملموس روابط (۱۳-۱۱) محاسبه می‌شود.

مرحله سوم: مقدار بردار و ماتریس کواریانس حالت پیش‌بینی، براساس مقادیر تخمینی به‌دست‌آمده در مرحله قبل محاسبه می‌شود.

$$\hat{x}_{k+1|k} = E[x_{k+1} | Z^k] = E[f(\hat{x}_{k|k})] \quad (20)$$

$$P_{k+1|k} = E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T] = cov(f(\hat{x}_{k|k})) + Q_k \quad (21)$$

که در آن متوسط پیش‌بینی بردار حالت، $\hat{x}_{k+1|k}$ ، و ماتریس

¹ Cubature Kalman Filter

² High Order Unscented Transform

³ Gauss_Hermit Quadrature Transform

⁴ Maximum Likelihood

⁵ Maximum Posterior Probability

⁶ Minimum Measurement Prediction Error

⁷ Minimum Extended Measurement Prediction Error

$$p(z_k|Z^{k-1}; \kappa) = \mathcal{N}(z_k, \hat{z}_{k|k-1}(\kappa), P_{z,k|k-1}(\kappa)) \quad (28)$$

از طرفی با توجه به این که $p(z_k|x_k)$ مستقل از پارامتر مقیاس است بنابراین رابطه (۲۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\hat{\kappa}_k = \underset{\kappa \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmax}} \left(\frac{p(x_k|Z^{k-1}; \kappa)}{p(z_k|Z^{k-1}; \kappa)} \right) \quad (29)$$

با توجه به این که تمامی توابع توزیع احتمال در رابطه (۲۹) از نوع نمایی است، لذا با گرفتن لگاریتم و ساده سازی خواهیم داشت [۱۴].

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_k = \underset{\kappa \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmin}} & \left(-\frac{1}{2} \log |p_{z,k|k-1}(\kappa)| + \right. \\ & \left. (z_k - h(\hat{x}_{k|k}(\kappa)))^T R_k (z_k - h(\hat{x}_{k|k}(\kappa))) + \right. \\ & \left. \hat{z}_k(\kappa)^T (M_{k|k-1}(\kappa) - p_{z,k|k-1}(\kappa)) \hat{z}_k(\kappa) \right) \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن داریم:

$$\hat{z}_k(\kappa) = z_k - \hat{z}_{k|k-1}(\kappa) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} M_{k|k-1}(\kappa) = & (p_{z,k|k-1}(\kappa)^{-1} p_{x,z,k|k-1}(\kappa)^T \dots \\ & \dots p_{k|k-1}(\kappa) p_{x,z,k|k-1}(\kappa) p_{z,k|k-1}(\kappa)^{-1}) \end{aligned} \quad (32)$$

• تعیین پارامتر مقیاس با روش حداقل خطای پیش بینی اندازه گیری [۱۶]:

در روش های مبتنی بر بیشینه درست نمایی و احتمال پسین، از فرض توزیع گوسی برای خروجی تابع غیر خطی استفاده شد که مقدار توزیع خروجی برای حالت های خاص مانند بردار حالت با ابعاد بزرگ می تواند مقادیر بسیار کوچکی را تولید کنند و لذا محاسبات به شدت تحت تاثیر خطای های عددی قرار می گیرند، لذا می توان به طور مستقیم خطای پیش بینی اندازه گیری، $\hat{z}_k(\kappa) = z_k - \hat{z}_{k|k-1}(\kappa)$ را به عنوان معیار تعیین پارامتر مقیاس به صورت زیر استفاده نمود.

$$\hat{\kappa}_k = \underset{\kappa \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmin}} (\hat{z}_k(\kappa) \hat{z}_k(\kappa)^T) \quad (33)$$

• تعیین پارامتر مقیاس با روش حداقل خطای پیش بینی اندازه گیری توسعه یافته [۱۷]:

در این روش، معیار تعیین پارامتر مقیاس بسیار شبیه به روش حداقل خطای پیش بینی اندازه گیری است با این تفاوت که در آن کوواریانس خطای پیش بینی اندازه گیری نیز لحاظ شده است.

• تعیین پارامتر مقیاس با روش بیشینه درست نمایی [۱۸]:

در این روش تابع درست نمایی مشاهدات، $p(z_k|Z^{k-1})$ ، به عنوان معیاری برای تعیین پارامتر مقیاس استفاده می شود. در صورتی که فرض گوسی بودن توزیع خروجی تابع غیر خطی را بپذیریم، تابع درست نمایی تقریبی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\kappa) & \triangleq P(z_k|Z^{k-1}; \kappa) \\ & = \mathcal{N}(z_k, \hat{z}_{k|k-1}(\kappa), P_{z,k|k-1}(\kappa)) \end{aligned} \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲)، $\hat{z}_{k|k-1}(\kappa)$ و $P_{z,k|k-1}(\kappa)$ به ترتیب میانگین و کوواریانس تقریبی حاصل از تبدیل غیر ملموس فیلتر بر اساس پارامتر مقیاس، κ ، است در نهایت می توان مقدار پارامتر مقیاس را بر اساس داده z_k طوری تخمین زد که بالاترین مقدار درست نمایی بدست آید.

$$\hat{\kappa}_k = \underset{\kappa \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmax}} (\Lambda_k(\kappa)) \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) $\hat{\kappa}_k$ عضوی از مجموعه اعداد حقیقی مثبت خواهد بود چرا که بایستی مثبت تعریف بودن ماتریس کوواریانس خطا، تضمین شود و $\operatorname{argmax}(f(x))$ تابعی است که خروجی آن متغیری می باشد که به ازای آن متغیر، تابع $f(x)$ بیشینه می شود.

• تعیین پارامتر مقیاس با روش بیشینه احتمال پسین [۱۶]:

در روش بیشینه درست نمایی، میزان تطبیق داده های اندازه گیری با مقدار پیش بینی آن به عنوان معیار تعیین پارامتر مقیاس بهینه استفاده می شود، در حالتی که میزان تطبیق متغیر حالت به ازای آخرین داده اندازه گیری، معیار تصمیم گیری انتخاب شود، مقدار پارامتر مقیاس طوری انتخاب می شود که تابع چگالی احتمال پسین بیشینه شود.

$$\hat{\kappa}_k = \underset{\kappa \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmax}} (p(x_k|Z^k; \kappa)) \quad (24)$$

که در آن تابع چگالی احتمال پسین با استفاده از روش بی زین به صورت زیر خواهد بود.

$$p(x_k|Z^k; \kappa) = \frac{p(z_k|x_k)p(x_k|Z^{k-1}; \kappa)}{p(z_k|Z^{k-1}; \kappa)} \quad (25)$$

در صورتی که فرض گوسی بودن توزیع خروجی تابع غیر خطی را بپذیریم، تمامی توابع چگالی رابطه (۲۵) دارای توزیع گوسی خواهد بود.

$$p(z_k|x_k; \kappa) = \mathcal{N}(z_k; h(\hat{x}_{k|k}(\kappa)), R_k) \quad (26)$$

$$p(x_k|Z^{k-1}) = \mathcal{N}(x_k; \hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \quad (27)$$

با استفاده از رابطه بیزین، احتمال پسین درست بودن پارامتر مقیاس κ به ازای مقادیر اندازه‌گیری تا زمان k به صورت رابطه (۳۶) به دست می‌آید [۱۹].

$$\mu_k(\kappa_i) \triangleq P\{\kappa = \kappa_i | Z^k\} = \frac{P\{z_k | Z^{k-1}, \kappa = \kappa_i\} \mu_{k-1}(\kappa_i)}{\sum_{j=1}^r P\{z_k | Z^{k-1}, \kappa = \kappa_j\} \mu_{k-1}(\kappa_j)} \quad (36)$$

همان‌طور که از رابطه بالا مشخص است میزان احتمال درستی پارامتر مقیاس κ_i در لحظه k تابعی از مقدار درست‌نمایی در آن لحظه، $P\{z_k | Z^{k-1}, \kappa_i\}$ ، و احتمال درست بودن همان پارامتر در گام قبلی، $\mu_{k-1}(\kappa_i)$ ، است و در نهایت میزان تخمین نهایی به صورت ترکیب تخمین‌های به دست آمده به ازای هر کدام از پارامترهای مقیاس خواهد بود:

$$\hat{\kappa}_{k|k} = \sum_{i=0}^r \hat{\kappa}_{k|k}(\kappa = \kappa_i) \mu_{k-1}(\kappa_i) \quad (37)$$

که در آن، $\hat{\kappa}_{k|k}^0(\kappa = \kappa_i)$ تخمین خروجی از فیلتر کالمن غیرملموس با پارامتر مقیاس κ_i است و همچنین ماتریس کواریانس خطای نهایی نیز طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$P_{k|k} = \sum_{i=0}^r \mu_k(\kappa_i) \{P_{k|k}(\kappa = \kappa_i) + [\hat{\kappa}_{k|k}(\kappa = \kappa_i) - \hat{\kappa}_{k|k}] [\hat{\kappa}_{k|k}(\kappa = \kappa_i) - \hat{\kappa}_{k|k}]^T\} \quad (38)$$

که در آن $P_{k|k}(\kappa = \kappa_i)$ کواریانس خطای فیلتر کالمن غیرملموس با پارامتر مقیاس κ_i و اندیس T نیز عملگر ترانپوز ماتریس^۳ است.

استفاده از روش بیزین باعث افزایش محاسبات به صورت نمایی خواهد شد، به طوری که در زمان k ، تعداد حالاتی که بایستی در نظر گرفته شود برابر r^k خواهد بود، لذا می‌توان مانند فیلترهای هیبریدی از روش‌های زیربهمینه مانند روش بیزین کاذب تعمیم‌یافته (GPB^۴) و روش IMM استفاده کرد که در این میان روش IMM دارای عملکرد بهتری از لحاظ دقت و پیچیدگی محاسباتی می‌باشد [۲۰]. بر همین اساس فیلتر کالمن غیرملموس با پارامتر مقیاس چندگانه تعاملی (IMS_UKF^۵) پیشنهاد می‌شود که در ادامه مراحل مختلف اجرای یک گام زمانی از این فیلتر در هفت مرحله توضیح داده شده است.

مرحله اول: شرایط اولیه شامل متوسط پیش‌بینی اولیه $\hat{x}_{0|0} = E(x_0) = \bar{x}_0$ و ماتریس کواریانس تخمین اولیه $\hat{P}_{0|0} = cov(x_0) = P_0$ تعریف می‌شود و نیز مجموعه گسسته

$$\hat{\kappa}_k = \arg \min_{\kappa \in \mathbb{R}^+} \left(\bar{z}_k(\kappa) \bar{z}_k(\kappa)^T + tr(p_{z,k|\kappa-1}(\kappa)) \right) \quad (34)$$

که در آن عملگر $tr(\cdot)$ مقدار اثر ماتریس مربعی^۱ را محاسبه می‌کند.

در این میان، روش بیشینه درست‌نمایی نسبت به سایر روش‌ها از عملکرد و عمومیت بیشتری برخوردار است [۱۸] لذا در این مقاله نیز از این روش به عنوان معیار مقایسه الگوریتم پیشنهادی استفاده خواهد شد.

در چهار روش عددی تعیین وفقی پارامتر مقیاس، مجموعه‌ای از مقادیر ممکن از این پارامتر بایستی مشخص شود تا مقدار بهینه از میان آن‌ها انتخاب گردد، بنابراین یک مقدار حداقل و یک مقدار نهایی برای پارامتر مقیاس بایستی تعریف شود ($\kappa_{min} < \kappa < \kappa_{max}$) که اندازه آن با در نظر گرفتن نوع تابع غیرخطی و اندازه بردار حالت به دست می‌آید، ولی به طور معمول حداقل پارامتر مقیاس برابر صفر در نظر گرفته می‌شود ($\kappa_{min} = 0$) و مقدار آن از نه برابر اندازه بردار حالت تجاوز نمی‌کند ($\kappa_{max} = 9n_x$) که در این شرایط مقدار وزن نقطه نمونه مرکزی در تبدیل غیرملموس، w_0 ، برابر $0/9$ خواهد بود و وزن سایر نقاط به $0/1$ کاهش می‌یابد و این بدان معناست که نقطه مرکزی بیشترین نقش را در تعیین دو گشتاور تابع خروجی ایفا خواهد کرد.

متأسفانه راه حل تحلیلی برای حل رابطه (۲۳) وجود ندارد، لذا در تمامی مقالات، روش‌هایی عددی پیشنهاد شده است که از بهترین نمونه‌های آن می‌توان به روش جستجوی تصادفی نقطه بیشینه اشاره کرد [۱۵]. عدم وجود یک راه‌حل تحلیلی برای تعیین وفقی پارامتر مقیاس فیلتر کالمن غیرملموس باعث شده است که تمامی روش‌های مطرح‌شده در مقالات، در عمل قابل استفاده نباشند در همین راستا در این مقاله روشی مبتنی بر رویکرد مدهای چندگانه تعاملی (IMM^۲) پیشنهاد می‌شود که از لحاظ الگوریتم، پیچیدگی کمتری دارد و از رویکرد تحلیلی برخوردار است.

۲-۳. روش تعیین پارامتر مقیاس براساس مدهای چندگانه تعاملی

در صورتی که برای یک تابع غیرخطی خاص، ضرایب فیلتر کالمن غیرملموس را به صورت مجموعه گسسته از مقادیر مثبت در نظر بگیریم.

$$\kappa \in \{\kappa_i\} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (35)$$

³ Matrix Transpose

⁴ Generalized Pseudo-Bayesian

⁵ Interactive Multiple Scaling parameters_UKF

¹ Matrix Trace

² Interactive Multiple Modes

استفاده از شرایط اولیه به دست آمده در مرحله قبل، $\hat{x}_{k-1|k-1}^0(K=K_i)$ و $P_{k-1|k-1}^0(K=K_i)$ ، مقدماتی می شود و تخمین خروجی فیلتر، $\hat{x}_{k-1|k-1}(K=K_i)$ و $P_{k-1|k-1}(K=K_i)$ ، به دست می آید. شایان ذکر است در این مرحله، عملیات فیلترینگ برای r پارامتر مقیاس توسط r فیلتر به طور موازی صورت می گیرد.

مرحله پنجم: در این مرحله برای هر کدام از r پارامتر مقیاس، میزان احتمال درست‌نمایی براساس رابطه زیر به دست می آید.

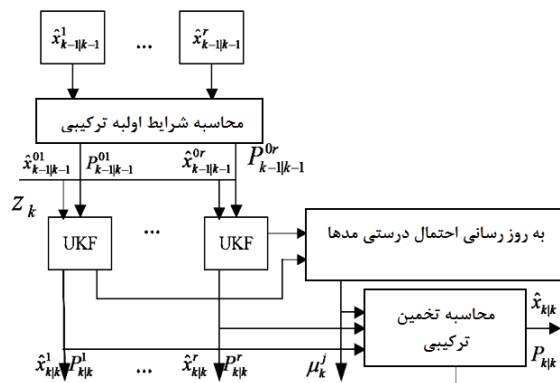
$$\Lambda_k(K=K_i) \triangleq P(Z_k|Z^{k-1}; K_i) = \mathcal{N}(Z_k, \hat{Z}_{k|k-1}(K_i), P_{Z, k|k-1}(K_i)) \quad (45)$$

مرحله ششم: به روزرسانی احتمال پسین مربوط به درست بودن پارامتر مقیاس K_i براساس مقدار آن در گام قبلی که طبق رابطه (36) و مقداری ساده‌سازی، به صورت رابطه (46) محاسبه می شود.

$$\mu_k(K_i) \triangleq P\{K=K_i|Z^k\} = \frac{1}{c} P\{Z_k|K=K_i, Z^{k-1}\} P\{K=K_i|Z^{k-1}\} \quad (46)$$

که در آن، $c = \sum_{i=1}^r \{\Lambda_k(K_i) \sum_{j=1}^r P_{ji} \mu_{k-1}(K_j)\}$ ثابت نرمال سازی است.

مرحله هفتم: تخمین ترکیبی با ترکیب مقدار تخمین به دست آمده از هر یک از فیلترها و احتمال پسین هر پارامتر مقیاس محاسبه می شود. در این مرحله میزان تخمین و کواریانس خطای نهایی براساس روابط (37) و (38) به دست می آید. بلوک دیاگرام الگوریتم IMS_UKF در شکل 2 نمایش داده شده است.



شکل 2. بلوک دیاگرام فیلتر IMS_UKF

3. ارزیابی عملکرد فیلتر پیشنهادی

در این قسمت برای بررسی تاثیر پارامتر مقیاس بر روی دقت تخمین، از یک مدل غیرخطی برای ردگیری براساس مقادیر

از پارامترهای مقیاس، $K \in \{K_i, K_{min} < K < K_{max}\}$ ، تعیین می گردد و برای شروع، احتمال درستی اولین پارامتر مقیاس از مجموعه، به صورت $\mu_0(K_0) = 1$ در نظر گرفته می شود، روشن است که با این انتخاب احتمال درستی سایر اعضای مجموعه صفر خواهد بود.

مرحله دوم: احتمالات ترکیب به صورت احتمال درست بودن پارامتر مقیاس K_i در زمان $k-1$ به شرط درست بودن پارامتر مقیاس K_j در زمان k و مقادیر اندازه گیری Z^{k-1} محاسبه می شود.

$$\mu_{k-1|k-1}(K_i|K_j) \triangleq P\{K_{k-1}=K_i|K_k=K_j, Z^{k-1}\} = \frac{1}{c_j} P\{K_k=K_j|K_{k-1}=K_i, Z^{k-1}\} P\{K_{k-1}=K_j|Z^{k-1}\} \quad (39)$$

در رابطه (39)، $P\{K_k=K_j|K_{k-1}=K_i, Z^{k-1}\}$ ماتریس انتقال پارامتر مقیاس (مد) است و فرض می شود که مقدار آن مستقل از مقادیر اندازه گیری و ثابت می باشد و به صورت تجربی به دست می آید.

$$P_{ij} \triangleq P\{K_k=K_j|K_{k-1}=K_i, Z^{k-1}\} \quad (40)$$

در رابطه (39)، \bar{c}_j ثابت نرمالیزه است و مقدار آن براساس رابطه (41) به دست می آید.

$$\bar{c}_j = \sum_{i=0}^r P_{ij} \mu_{k-1}(K_i) \quad (41)$$

در نهایت احتمال ترکیب در قالب رابطه (42) در می آید.

$$\mu_{k-1|k-1}(K_i|K_j) = \frac{1}{\bar{c}_j} P_{ij} \mu_{k-1}(K_i) \quad (42)$$

مرحله سوم: شرایط اولیه ترکیبی که به صورت مجموع حاصل ضرب تخمین در گام قبلی و احتمالات ترکیب به دست می آید.

$$\hat{x}_{k-1|k-1}^0(K=K_i) = \sum_{i=0}^r \hat{x}_{k-1|k-1}(K=K_i) \mu_{k-1|k-1}(K_i|K_j) \quad (43)$$

$$P_{k-1|k-1}^0(K=K_i) = \sum_{i=0}^r \mu_{k-1|k-1}(K_i|K_j) \{P_{k-1|k-1}(K=K_i) + [\hat{x}_{k-1|k-1}^0(K=K_i) - \sum_{i=0}^r \hat{x}_{k-1|k-1}(K=K_i)] \cdot [\hat{x}_{k-1|k-1}^0(K=K_i) - \sum_{i=0}^r \hat{x}_{k-1|k-1}(K=K_i)]^T\} \quad (44)$$

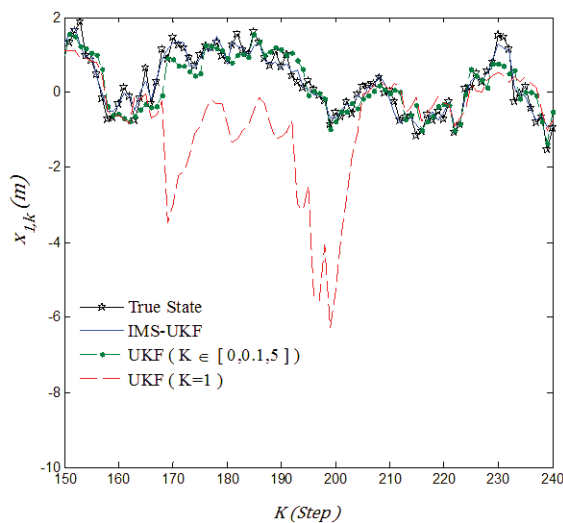
در روابط (43) و (44)، $\hat{x}_{k-1|k-1}(K=K_i)$ و $P_{k-1|k-1}(K=K_i)$ به دست آمده از فیلتر کالمن غیرملموس با پارامتر مقیاس K_i در لحظه $k-1$ کام است و نیز $\hat{x}_{k-1|k-1}^0(K=K_i)$ و $P_{k-1|k-1}^0(K=K_i)$ شرایط اولیه فیلتر با پارامتر مقیاس K_i برای گام قبلی (لحظه $k-1$) کام است.

مرحله چهارم: فیلتر کالمن غیرملموس با پارامتر مقیاس K_i

شبیه‌سازی مونت کارلو، میزان توان دوم خطای فیلتر پیشنهادی به‌همراه فیلتر UKF با پارامتر مقیاس عددی و فیلتر با پارامتر ثابت در جدول ۲ نمایش داده شده است. شایان ذکر است که پارامتر مقیاس فیلتر عددی در بازه ۰ تا ۵ با دقت ۰/۱ تعیین می‌گردد و همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد از معیار بیشینه درست‌نمایی به‌دلیل عمومیت و قابلیت بالای آن، برای تعیین وفقی پارامتر مقیاس عددی استفاده می‌شود. نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که عملکرد فیلتر IMS_UKF بسیار بهتر از UKF با پارامتر مقیاس ثابت است و فاصله قابل توجهی با فیلتر UKF با پارامتر مقیاس عددی ندارد، که در مقابل حجم عملیات بسیار کم فیلتر پیشنهادی بسیار ناچیز می‌باشد. در شکل ۳ نمونه‌ای از تخمین حالت توسط این سه فیلتر نمایش داده شده است. در این شکل می‌توان دید که در بخش‌هایی از شبیه‌سازی، مقدار تخمینی فیلتر با پارامتر مقیاس ثابت از مقدار واقعی متغیر حالت فاصله پیدا می‌کند که این مشکل در دو فیلتر وفقی دیگر وجود ندارد. همچنین در شکل ۴، میزان احتمال پسین درستی هرکدام از پارامترهای مقیاس، $\mu_k(K_i)$ ، نمایش داده شده است که در طول اجرای برنامه توسط فیلتر IMS_UKF محاسبه شده است. تغییر این احتمالات در طول اجرای فیلتر نشان‌دهنده میزان وفقی بودن فیلتر است.

جدول ۲. متوسط توان دوم خطای تخمین برای فیلتر IMS_UKF، UKF با پارامتر ثابت و UKF وفقی با پارامتر عددی

فیلتر	IMS_UKF	UKF ($\kappa = 1$)	UKF ($\kappa \in \{0, 0.1, 5\}$)
MSE (m^2)	1.64	32.16	1.23



شکل ۳. متغیر حالت و تخمین آن توسط فیلترهای UKF، IMS_UKF با پارامتر ثابت و UKF با پارامتر عددی

اندازه‌گیری زاویه^۱ استفاده می‌شود که سامانه تصادفی گسسته در زمان آن به‌صورت زیر است [۱۷، ۱۸ و ۲۱].

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X_k + w_k \quad (47)$$

$$Z_k = \tan^{-1} \left(\frac{x_{2,k} - \sin(k)}{x_{1,k} - \cos(k)} \right) + v_k \quad (48)$$

که در آن، w_k نویز سفید مدل‌سازی با میانگین صفر و کواریانس $Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$ و v_k نویز اندازه‌گیری سفید با میانگین صفر و واریانس $R = 0.025$ است. گام اجرای یک دوره الگوریتم برای شناسایی مکان هدف، $k = 1, 2, \dots, N$ می‌باشد که در آن $N = 240$ است و همچنین برای M بار شبیه‌سازی مونت کارلو^۲، میزان متوسط توان دوم خطای تخمین با رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$MSE(k) = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^2 (x_{i,k}^{(m)} - \hat{x}_{i,k}^{(m)}(k))^2}{2M(N+1)} \quad (49)$$

در رابطه (۴۹)، $x_{i,k}^{(m)}$ میزان واقعی متغیر حالت m ام در گام k ام و شبیه‌سازی m ام و $\hat{x}_{i,k}^{(m)}(k)$ میزان تخمین همان متغیر حالت به ازای پارامتر مقیاس κ است. با $M = 10^3$ بار شبیه‌سازی و $N = 100$ گام اجرا، مقدار متوسط توان دوم خطای برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس در جدول ۱ نمایش داده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که تعیین پارامتر مقیاس به‌صورت ثابت برای این مدل غیرخطی طبق رابطه پیشنهادی $\kappa = 3 - n_x$ بهترین انتخاب نیست.

جدول ۱. متوسط توان دوم خطای تخمین به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس

پارامتر مقیاس (κ)	0	1	2	3	4	5
MSE (m^2)	7.5	4.47	3.1	2.27	2.13	2.51

به‌منظور استفاده از فیلتر پیشنهادی، IMS_UKF، بایستی مجموعه گسسته از پارامتر مقیاس انتخاب شود، بر همین اساس در این شبیه‌سازی، سه پارامتر مقیاس، $\kappa \in \{1, 2, 4\}$ ، در ساختار IMS_UKF استفاده شده است و ماتریس انتقال پارامتر (رابطه ۴۰) به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (50)$$

با اجرای الگوریتم در $N = 1000$ گام و $M = 10^3$ بار

¹ Bearing-only Tracking
² Monte-Carlo Simulation

جدول ۳. تعداد مگا عملیات نقطه شناور موردنیاز برای اجرای UKF، IMS_UKF با پارامتر ثابت و UKF با پارامتر عددی

UKF ($\kappa \in \{0; 0.1; 5\}$)	UKF ($\kappa = 1$)	IMS_UKF	فیلتر
229.5	4.5	14.4	MFLOPS

۵. بررسی پایداری فیلتر

عملکرد الگوریتم‌های IMM در مقالات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [۲۵، ۲۴، ۲۳] و در این مقالات میزان پایداری الگوریتم با استفاده از معیارهایی نظیر میزان همگرایی خطای تخمین و همچنین مقدار بایاس موجود در تخمین، در شرایط خاص و با یک کاربرد ویژه ارزیابی شده است. در مقاله‌ای دیگر [۲۶]، پایداری IMM به صورت جامع تری تحلیل شده است و در آن شرایط کافی برای پایداری نمایی الگوریتم IMM براساس روش لیانوف^۳ به دست آمده است. البته لازم به ذکر است که شرایط پایداری مطرح شده در آن، بر مبنای شرایط پایداری فیلتر کالمن خطی تبیین شده است [۲۷] و در مورد تعیین شرایط پایداری الگوریتم IMM با فیلترینگ غیر خطی UKF در میان مراجع علمی، موردی مشاهده نمی‌شود، لذا استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و بررسی مولفه‌های پایداری می‌تواند یک روش ارزیابی معتبر و قابل قبول باشد. از جمله مولفه‌های پایداری فیلتر کالمن به قرار زیر است [۲۸]:

۱. خطای تخمین حالت دارای توزیع گوسی با میانگین صفر باشد.

۲. میزان کوواریانس خطای تخمین محاسبه شده توسط فیلتر برابر با میزان خطای واقعی تخمین باشد.

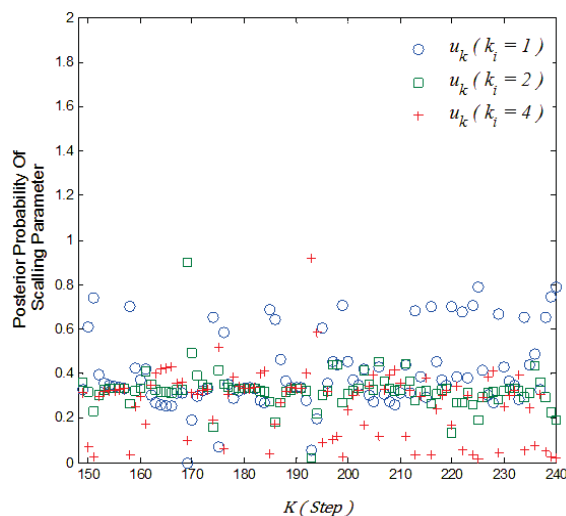
برای ارزیابی این دو مولفه، توان دوم خطای تخمین نرمالیزه شده (NEES^۴) به صورت رابطه (۵۱) تعریف می‌شود.

$$\tilde{\epsilon}(k) = (x_k - \hat{x}_{k|k})' P(k|k)^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k}) \quad (51)$$

در صورتی که میزان خطای تخمین، $(x_k - \hat{x}_{k|k})$ ، دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و کوواریانس $P(k|k)$ باشد، در این حالت، $\tilde{\epsilon}(k)$ دارای توزیع کای دو با n_x درجه آزادی واحد بود که در آن n_x اندازه بردار حالت فیلتر است.

برای بررسی میزان پایداری فیلتر در شبیه‌سازی مونت کارلو، میزان $\epsilon(k) \in$ طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\epsilon(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{\epsilon}^{(m)}(k) \quad (52)$$



شکل ۴. مقدار احتمال پسین پارامتر مقیاس محاسبه شده توسط فیلتر IMS_UKF

۴. بررسی پیچیدگی محاسباتی

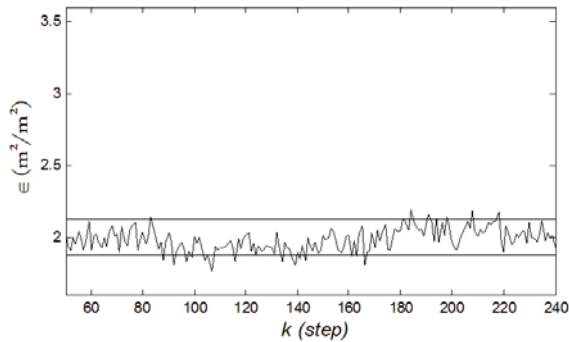
فیلتر IMM یک فیلتر ترکیبی زیر بهینه است که بهترین مصالحه را بین عملکرد و پیچیدگی محاسباتی برقرار کرده است. پیچیدگی محاسباتی این فیلتر برای اساس تعداد مدل‌های مورد استفاده، تقریباً خطی است (به استثنای تعداد محدودی عناصر درجه دوم) [۲۲]. براساس این فرض روش پیشنهادی به طور تقریبی برای هر بار تخمین موقعیت نیاز به سه بار اجرای فیلتر غیرملموس دارد و حال آنکه در روش عددی با دقت ۰/۱ بایستی در هر گام ۵۰ بار فیلتر غیرملموس اجرا شود. بنابراین می‌توان گفت که حجم محاسبات روش پیشنهادی به طور تقریبی ۳ برابر فیلتر با پارامتر ثابت و معادل $3/50$ فیلتر با پارامتر مقیاس عددی خواهد بود. تعداد عملیات نقطه شناور (FLOPS^۱) در هر بار اجرای الگوریتم نشان‌دهنده بار محاسباتی موردنیاز است که با توجه به ساختار فیلتر پیشنهادی و سایر روش‌های انتخابی در این مقاله مقدار آن در هر بار اجرا ثابت خواهد بود. در جدول ۳ تعداد مگا عملیات نقطه شناور (MFLOPS^۲) الگوریتم‌ها در هر بار اجرا با هم مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود فیلتر UKF با پارامتر مقیاس ثابت، کمترین تعداد عملیات نقطه شناور را دارد. بار محاسباتی فیلتر IMS-UKF، ۳/۲ برابر فیلتر UKF با پارامتر مقیاس ثابت است و همچنین مقدار بار محاسباتی فیلتر UKF با پارامتر مقیاس عددی ۵۱ برابر فیلتر UKF با پارامتر مقیاس ثابت و ۱۵/۹ برابر فیلتر IMS-UKF است.

³ Lyapunov

⁴ Normalized State Estimation Error

¹ Floating Point Operations

² Mega Floating Point Operations



شکل ۷. متوسط توان دوم خطای نرمال شده برای فیلتر UKF با پارامتر عددی

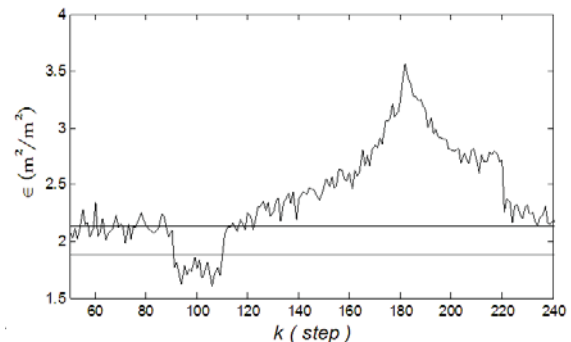
۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، فیلتر کالمن غیرملموس در میان روش‌های تخمین غیرخطی به‌طور خاص، بررسی شد و رویکردهای مختلف تعیین پارامتر مقیاس در این نوع از فیلترها به‌طور خلاصه بررسی شد. با توجه به این واقعیت که برای تعیین پارامتر مقیاس به‌صورت وفقی، روش تحلیلی وجود ندارد و روش‌های عددی دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی هستند، فیلتر IMS_UKF جهت کاهش بار محاسباتی پیشنهاد گردید. در ادامه از طریق شبیه‌سازی نشان داده شد که این فیلتر با وجود بار محاسباتی کمتر از روش‌های عددی، عملکرد بسیار نزدیکی به بهترین روش عددی موجود دارد. همچنین پایداری فیلتر پیشنهادی، مورد مقایسه قرار گرفت و نشان داده شد که فیلتر کالمن با پارامتر ثابت بر خلاف دو روش دیگر دارای پایداری قابل قبول نیست، بنابراین فیلتر پیشنهادی یک موازنه بسیار خوب بین عملکرد و بار محاسباتی فراهم می‌کند.

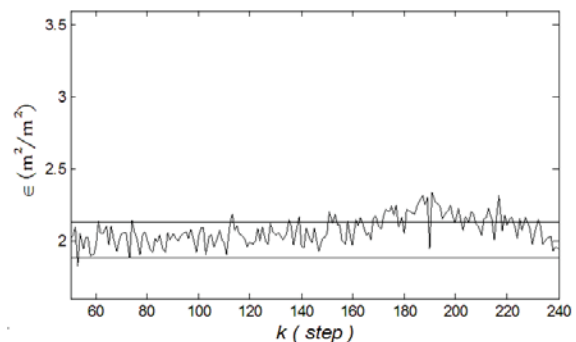
۷. مراجع

- [1] J. H. Kushner, "Dynamical equations for optimum non-linear filtering," Journal of Differential Equations, vol. 3, no. 2, pp. 179-190, 1967.
- [2] P. S. Maybeck, "Stochastic Models, Estimation, and Control," New York: Academic Press, 1982.
- [3] R. V. D. Merwe, "Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models," Doctor of Philosophy Thesis, Oregon Health & Science University, pp. 36-60, 2004.
- [4] D. Lero and Y. Bar-Shalom, "Tracking with debiased consistent converted measurements vs. EKF," IEEE Transaction on Aerospace and Electron. Syst., vol. 29, no. 3, pp. 1015-1022, 1993.
- [5] S. J. Julier and J. K. Uhlman, "Unscented filtering and nonlinear estimation," Proceedings of the IEEE, vol. 29, no. 3, pp. 401-421, 2004.
- [6] D. Hou, F. Yin, and L. Zhang, "Joint Sigma-Point Kalman Filter Based Bearing-Only Tracking," Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control, pp. 944-948, 2006.
- [7] J. K. Uhlmann, "Simultaneous map building and localization for real time applications," Univ. Oxford, U.K., Tech. Rep., 1994.

که در آن $\hat{\Sigma}^{(m)}(k)$ متوسط توان دوم خطای تخمین نرمالیزه شده در گام k ام و اجرای m ام شبیه‌سازی است. در صورت ارضای شرایط پایداری، $M \times \epsilon(k)$ دارای توزیع کای دو با $M \times n_x$ درجه آزادی است. به‌ازای $M = 1000$ بار اجرای شبیه‌سازی مونت کارلو، ناحیه احتمالی 95% برای $\epsilon(k)$ در بردار حالت دوتایی برابر $[1/878, 2/126]$ خواهد بود که این ناحیه همگرایی به همراه $\bar{\epsilon}(k)$ برای سه فیلتر تحت مقایسه در شکل ۵ الی ۷ نمایش داده شده است. همان‌طور که از نتایج شبیه‌سازی مشخص است فیلتر UKF با پارامتر مقیاس ثابت، در اکثر گام‌های اجرای الگوریتم در خارج از بازه مجاز احتمالی قرار دارد که خود نشانه وجود بایاس و واگرایی شدید این فیلتر می‌باشد و در مقابل فیلتر UKF با پارامتر مقیاس عددی بهترین وضعیت را دارد. فیلتر IMS-UKF در برخی از گام‌های اجرای الگوریتم، به مقدار بسیار کمی از ناحیه احتمالی خارج شده است با این وجود مقدار آن به اندازه‌ای نیست که نشان‌دهنده واگرایی فیلتر باشد، بنابراین می‌توان گفت عملکرد دو فیلتر IMS-UKF و فیلتر UKF با پارامتر مقیاس عددی از نظر ارضای شرایط پایداری قابل قبول است.



شکل ۵. متوسط توان دوم خطای نرمال شده برای فیلتر UKF با پارامتر مقیاس ثابت



شکل ۶. متوسط توان دوم خطای نرمال شده برای فیلتر IMS_UKF

- [8] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariance'sin Filters and Estimators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 3, pp. 477–482, 2000.
- [9] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "Unscented Filtering and Nonlinear Estimation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–421, 2004.
- [10] I. Arasaratnam and S. Haykin, "Cubature Kalman filters," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 6, pp. 1254–1269, 2009.
- [11] K. Ito and K. Xiong, "Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 5, pp. 910–927, 2000.
- [12] M. Gokce and M. Kuzuoglu, "Unscented Kalman filter-aided Gaussian sum filter," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 9, no. 5, pp. 589 - 599, 2015.
- [13] J. Dunik, M. Simandl, and O. Straka, "Adaptive Choice of Scaling Parameter in Derivative-Free Local Filters," in *Proceedings of 2010 International Conference on Information Fusion*, Edinburgh, pp. 1-6, 2010.
- [14] O. Straka, J. Dunik, and M. Simandl, "Gaussian sum unscented Kalman filter with adaptive scaling parameters," in *Proc. 14th Int. Conf. Information Fusion*, pp. 1122-1130, 2011.
- [15] J. Dunik, M. Simandl, and O. Straka, "Adaptive choice of scaling parameter in derivative-free local filters," in *Proc. 13th Int. Conf. on Information Fusion*, pp. 1-8, 2010.
- [16] O. Straka, J. Dunik, and M. Simandl, "Unscented Kalman Filter with Controlled Adaptation," *16th IFAC Symposium on System Identification*, pp. 906-911, 2012.
- [17] O. Straka, J. Dunik, M. Simandl, and E. Blasch, "Comparison of adaptive and randomized unscented Kalman filter," *17th International Conference on Information Fusion*, pp. 1-8, 2014.
- [18] J. Dunik, M. Simandl, and O. Straka, "Unscented Kalman Filter: Aspects and Adaptive Setting of Scaling Parameter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 9, pp. 2411-2416, 2012.
- [19] Y. Bar-Shalom and X. R. Li, "Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software," Artech House: Norwood, 1993.
- [20] R. R. Pitre, V. P. Jilkov, and X. R. Li, "A comparative study of multiple-model algorithms for maneuvering target tracking," *2005 SPIE Conf. Signal Processing, Sensor Fusion and Target Recognition XIV*, pp. 549–560, 2005.
- [21] R. Bucy and K. Senne, "Digital synthesis of nonlinear filters," *Automatica*, vol. 7, no. 3, pp. 287–298, 1971.
- [22] Y. Bar-Shalom and X. R. Li, "Multitarget Multisensor Tracking: Principles and techniques," Artech House: Norwood, 1995.
- [23] Y. Bar-Shalom and X. R. Li, "Performance prediction of the interacting multiple model algorithm," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 3, pp. 755–771, 1993.
- [24] C.E. Seah and I. Hwang, "Performance analysis of Kalman filter based hybrid estimation algorithms," In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pp. 13498–13503, 2008.
- [25] A. Bessell, B. Ristic, A. Farina, X. Wang, and M. S. Arulampalam, "Error performance bounds for tracking a manoeuvring target," In *Proc. of the International Conference on Information Fusion*, vol. 1, pp. 903-910, 2003.
- [26] C. E. Seah and I. Hwang, "Stability Analysis of the Interacting Multiple Model Algorithm," *2008 American Control Conference*, pp. 2415–2420, 2008.
- [27] J. J. Deyst and C. F. Price, "Conditions for asymptotic stability of the discrete minimum-variance linear estimator," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 13, no. 6, pp. 702–705, 1968.
- [28] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, "Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software," John Wiley & Sons, 2004.

Adaptive Setting of Scaling Parameter in Unscented Kalman Filter Based on Interactive Multiple Modes

F. Masoumi Ganjgah^{*}, R. Fatemi Mofrad, N. Ghadimi

MalekAshtar University of Technology

(Received: 19/07/2015, Accepted: 01/05/2016)

Abstract

This paper studies the use of Unscented Kalman Filters (UKF) to estimate nonlinear dynamics and, specifically, adaptive determination of scaling parameters in these filters. Due to lack of analytic solution and use of numerical methods instead, the computational load of these filters increases drastically. In this paper, a new method is proposed based on Interactive Multiple Models (IMM) which has lower computational burden than previous methods. The performance of the proposed filter is evaluated by simulating a tracking scenario. Its accuracy, computational load and stability are compared with the numerical adaptive UKF filter and constant parameter UKF filter. The simulation results show that the proposed filter performs better than the constant parameter UKF and very close to the numerical adaptive UKF.

Keywords: Interactive Multiple Mode Filter, Nonlinear Estimation, Unscented Kalman Filter and Bayesian Approach .

^{*} Corresponding author E-mail: farhad@mut.ac.ir