

# ارتعاشات آزاد صفحه گرافنی مدور، با ملاحظه اثر سطح و عیوب

## هندسی

محمد حسین صبور<sup>۱</sup>، سید حسام الدین مدنی<sup>۲</sup> محمد فدایی<sup>۳\*</sup>

گروه مهندسی مکانیک  
دانشکده فنی و مهندسی  
دانشگاه صنعتی قم

دانشکده علوم و فنون نوین  
دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۱/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۲۰)

### چکیده

به دلیل پیچیدگی در پروسه تولید در ابعاد نانو، اغلب لایه‌های گرافن، دارای عیوب هندسی هستند. یکی از این نوع عیوب، ناشی از عدم وجود یک یا چند پیوند کربنی در لایه گرافن در حین پروسه تولید است. اگر این صفحه گرافنی معیوب یا ناقص در دمای کاری اتاق قرار داشته باشد، حفره یا سوراخ در آن گسترش یافته و حفره‌هایی بزرگ با ساختار بی‌شکل تشکیل می‌گردد که می‌توانند قابلیت مکانیکی گرافن را تحت تأثیر قرار دهند. یکی دیگر از کاربردهای صفحات سوراخ‌دار گرافنی در دیافراگم‌ها و فیلترهای جداسازی است. با توجه به توسعه تجهیزات نانو الکترومکانیکی و میکروالکترومکانیکی وجود چنین صفحاتی بسیار توسعه و گسترش پیدا خواهد کرد. از طرفی، با توجه به نسبت بالای سطح به حجم در گرافن، پدیده اثر سطح قابل اغماض نبوده و بایستی تأثیر آن لحاظ گردد. بنابراین، بررسی تأثیر عیوب هندسی یا حفره‌ها با در نظر گرفتن اثر سطح بر روی رفتار دینامیکی لایه گرافن از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله، حفره‌ها با چند دایره در محلی دلخواه مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با چند سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و با در نظر گرفتن اثر سطح در ابعاد نانو ارائه گردیده است. اثر پارامترهای سطحی در این نوع صفحات بررسی شده و فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش کمینه جداسازی مقدار تکین استخراج گردیده است.

**واژه‌های کلیدی:** گرافن، سوراخ خارج از مرکز، فرکانس طبیعی، اثر سطح

## Free Vibrations of a Circular Graphene Sheet with Surface Effect & Geometrical Defects

M.H. Sabour, S.H. Madani

New Sciences & Technologies Department,  
University of Tehran, Tehran, Iran

M. Fadaee

Department of Mechanical Engineering, College of  
Engineering

Qom University of Technology, Qom, Iran.

(Received: 10/April/2016 ; Accepted: 10/December/2016)

### ABSTRACT

Graphene sheets have gained much popularity and strong potential applications in design of nano-sized structural elements. Because of production process and constrains conditions, circular graphene sheet may be opposed to structural defect. These defects can be inverted to greater holes as amorphous construction when the graphene sheet is working in room temperature. Some of the defects and pin holes on a circular graphene sheet can be considered as multiple eccentric hole on the sheet. Hence, analyzing behavior of circular graphene sheet with multiple holes is important. According to high surface to volume ratio in single layer graphene sheet, surface effect is not negligible, should be considered. Free vibration of an annular graphene sheet, as the basis of any dynamical analysis, is analytically studied. Multipole Trefftz method as well as the translational addition theorem are employed to consider effects of circular defects on behavior of freely vibrating circular graphene sheet. Kirchhoff plate theory is used to solve the problem. Effects of surface effect parameter are investigated on the natural frequencies. These frequencies are derived by minimum singular value decomposition (SVD) method.

**Keywords:** Graphene, Eccentric hole, Natural frequency, Surface effect

۱- استادیار: sabourmh@ut.ac.ir

۲- دکتر: hesam\_madani@ut.ac.ir

۳- استادیار (نویسنده پاسخگو): Fadaee@qut.ac.ir

## ۱- مقدمه

آن‌ها با استفاده از نظریه جمع‌پذیری و با روش عددی تریفتر مدل تحلیلی را ارائه داده و در نهایت، با روش کمینه‌جدا سازی مقدار تکین فرکانس‌های طبیعی را محاسبه کردند لی و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۷ یک روش نیمه‌تحلیلی در تحلیل ارتعاشات آزاد یک صفحه دایروی با چند سوراخ ارائه دادند. اثر سطح، پدیده‌ای است که در سازه‌های مقیاس خرد وجود داشته، مدول الاستیسیته، چگالی و تنش در سطح سازه‌ها را تغییر می‌دهد. در سازه‌هایی در ابعاد نانو که نسبت سطح به حجم در آن‌ها بالا است، اثر سطح وجود داشته و بایستی بررسی گردد. آسمی و فرج‌پور [۹] ارتعاشات ترمومکانیکی یک صفحه گرافن با ملاحظه اثر سطح در مدل صفحه دایروی غیرمحلی را تحلیل کردند. انصاری و همکاران [۱۰-۱۲] اثر سطح در مدل سازی پساکمانش، رفتار ارتعاشی، ناپایداری و پاسخ ارتعاشی یک نانو صفحه دایروی را در نظر گرفتند. آن‌ها از تئوری صفحه میندلین<sup>۵</sup> استفاده کرده و نشان دادند که کاهش ضخامت صفحه حساسیت‌پذیری نتایج از اثر سطح را افزایش می‌دهد. وانگ<sup>۶</sup> و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد یک نانو رینگ/کمان را با استفاده از تئوری غیرمحلی الاستیسیته مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی دقیق این نانو سازه‌ها را به دست آورده و اثر مقیاس طول و سطح را در آن‌ها مورد بررسی قرار دادند. عباسی [۱۴] ارتعاشات اجباری یک نانو صفحه را با در نظر گرفتن اثرات سطح بررسی و مطالعه کرده است. او با استفاده از مدل صفحه کلاسیک معادلات خیز عرضی را با ملاحظه اثر سطح استخراج کرد. اسدی و فرشی [۱۵] ارتعاشات نانو صفحه دایروی را با در نظر گرفتن مشخصات سطح (به دلیل نسبت سطح به حجم بالا) مورد مطالعه قرار دادند. تئوری صفحه چندلایه کلاسیک، با ملاحظه اثرات سطح برای این مسئله به کار گرفته شد. آن‌ها فرض کردند نانو صفحه دایروی با لایه‌های پوسته نازک روی سطوح بالا و پایین وجود دارد.

مدنی و همکاران [۱۶] ارتعاشات صفحات گرافنی تک‌سوراخ دایروی را با استفاده از تئوری غیرمحلی بررسی کرد و نشان داد که نقش سوراخ در تغییر فرکانس طبیعی بسیار قابل اهمیت می‌باشد.

در این مقاله، این حفره‌ها با چند دایره در محلی دلخواه مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با چند سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتر<sup>۷</sup> و با

حفره‌ها و فقدان اتمی در مقایسه با دیگر عیب‌های سازه‌ای نظیر چرخش پیوندی در گرافن، اثر بیشتری بر روی کاهش خواص مکانیکی صفحات دایروی گرافن دارند [۱]. از کاربردهای صفحات سوراخ‌دار گرافنی در دیافراگم‌ها و فیلترهای جدا سازی است. با توجه به توسعه تجیزات نانو الکترومکانیکی و میکروالکترومکانیکی وجود چنین صفحاتی بسیار توسعه و گسترش پیدا خواهد کرد. نانو صفحه‌ها در تشدیدکننده‌ها، نوسانگرها و حسگرها مورد استفاده قرار گرفته و در نانو فناوری نقش به‌سزایی ایفا می‌نمایند. مشخصات ارتعاشی نانو صفحه‌های گرافنی که در نانوکامپوزیت‌ها پراکنده هستند از لحاظ کارایی سازه‌ای بسیار حائز اهمیت می‌باشد [۲]. با توجه به پیشرفت علوم مهندسی در حوزه نانو تکنولوژی، وجود ساختارهای گرافنی با یک یا چند عیب و وجود سوراخ برای پین یا غیره در اتصالات صفحات گرافن و در تجهیزات الکترومکانیکی در ابعاد نانو، بررسی مدل‌های ارتعاشی و استخراج فرکانس‌های طبیعی ضروری به نظر می‌رسد [۳]. سه رویکرد حل برای تحلیل ارتعاشی و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی مدل پیشنهادی به نام روش‌های مربوط به اتم، روش‌های اتمی پیوسته و روش‌های مکانیک پیوسته وجود دارد. روش‌های پیوسته با ملاحظه عدم پیوستگی ساختارهای مقیاس نانو مسئله را مورد بررسی قرار می‌دهد. این روش از دقت کمتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار بوده اما در دسترس، کم‌هزینه و با محاسبات کمتر و در عین حال سرعت بیشتر می‌باشد. بیشتر مقالات در حوزه نانو مربوط به این رویکرد و روش می‌باشد [۴]. روش‌های تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات و پوسته‌ها در اشکال مختلف دایروی و مستطیلی و غیره در حوزه ماکرو به صورت عددی و تحلیلی در بسیاری از مقالات بررسی شده است. لین<sup>۱</sup> [۵] مدل ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی یک صفحه دایروی با یک سوراخ خارج از مرکز را با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه و براساس تبدیل توابع موج استوانه‌ای بررسی کرد. لاورا<sup>۲</sup> و همکاران [۶] با روش عددی ریلی ریتز<sup>۳</sup> فرکانس‌های طبیعی یک صفحه دایروی آزاد با یک سوراخ خارج از مرکز را بررسی و مطالعه کردند. لی<sup>۴</sup> و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۹ ارتعاشات آزاد یک صفحه دایروی با چند سوراخ خارج از مرکز را مطالعه کردند.

1- Lin

2- Laura

3- Rayleigh-Ritz

4- Lee

5- Mindlin

6 - Wang

7 -Trefftz

که در آن،  $\sigma_{\alpha\beta}^{s\pm}$ ،  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{s\pm}$  و  $\tau^{s\pm}$  به ترتیب تنش، کرنش و تنش باقیمانده لایه‌های سطح (+ بالا و - پایین) هستند.  $\mu^{s\pm}$  و  $\lambda^{s\pm}$  ثابت‌های لامه<sup>۲</sup> می‌باشند. همچنین،  $\delta_{\alpha\beta}$  دلتا کرونگر را نمایش می‌دهد. در معادلات بالا زیرنویس‌های یونانی مقادیر  $\gamma, x$  را نشان می‌دهد. در نتیجه، با توجه به روابط (۲) و (۴) برای تنش‌های سطوح بالا و پایین داریم:

$$\sigma_{xx}^{s\pm} = \tau + (2\mu^s + \lambda^s) \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda^s + \tau) \frac{\partial v}{\partial y} = \quad (\text{الف-۵})$$

$$\tau \mp \frac{h}{2} \left( (2\mu^s + \lambda^s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\lambda^s + \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_{yy}^{s\pm} = \tau + (2\mu^s + \lambda^s) \frac{\partial v}{\partial y} + (\lambda^s + \tau) \frac{\partial u}{\partial x} = \quad (\text{ب-۵})$$

$$\tau \mp \frac{h}{2} \left( (2\mu^s + \lambda^s) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (\lambda^s + \tau) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma_{xy}^{s\pm} = \mu^s \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \tau \frac{\partial v}{\partial x} = \mp (2\mu^s - \tau) \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{ج-۵})$$

$$\sigma_{xz}^s = \tau \frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{yz}^s = \tau \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{د-۵})$$

برای گسترش مدل صفحه با ملاحظه اثر سطح از منته‌های تنش زیر استفاده می‌گردد:

$$M_{xx} = \frac{h}{2} (\sigma_{xx}^{s+} - \sigma_{xx}^{s-}) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz \quad (\text{الف-۶})$$

$$M_{yy} = \frac{h}{2} (\sigma_{yy}^{s+} - \sigma_{yy}^{s-}) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz \quad (\text{ب-۶})$$

$$M_{xy} = \frac{h}{2} (\sigma_{xy}^{s+} - \sigma_{xy}^{s-}) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz \quad (\text{ج-۶})$$

با اعمال معادلات تعادل صفحات دایروی متقارن معادلات حاکم می‌تواند به صورت زیر به دست آید:

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \sigma_{xz}^{s+} + \sigma_{xz}^{s-} = \quad (\text{الف-۷})$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \sigma_{yz}^{s+} + \sigma_{yz}^{s-} = \quad (\text{ب-۷})$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + 2\tau \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y, t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \ddot{w} dz = \quad (\text{ج-۷})$$

$$(2\rho^s + \rho h) \ddot{w}$$

در نظر گرفتن اثر سطح در ابعاد نانو ارائه گردیده است. اثر پارامترهای سطحی در این نوع صفحات بررسی شده و فرکانس‌های طبیعی با استفاده روش کمینه جداسازی مقدار تکین استخراج گردیده است.

## ۲- تحلیل ارتعاشات آزاد یک نانوصفحه دایروی با

### ملاحظه اثر سطح

برای تحلیل ارتعاشات عرضی با توجه به تئوری صفحه نازک کلاسیک داریم [۹]:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{الف-۱})$$

$$v(r, \theta, z) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (\text{ب-۱})$$

$$w(r, \theta, z) = w(x, y, t) = w \quad (\text{ج-۱})$$

در نتیجه برای روابط کرنش-خیز عرضی داریم:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{xz} = 0 \quad (\text{الف-۲})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \varepsilon_{yz} = 0 \quad (\text{ب-۲})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \varepsilon_{zz} = 0 \quad (\text{ج-۲})$$

برای روابط کرنش-جابجایی و بر مبنای تنش صفحه‌ای نیز داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۳)$$

رابطه (۳) برای نقاط داخلی ماده فله<sup>۱</sup> و نه در نقاط سطحی برقرار می‌باشد. برای نقاط سطحی بایستی اثرات سطح در نظر گرفته شود (شکل هندسی در پیوست نشان داده شده است). اولین اثر سطح، افزایش صلبیت خمشی صفحه می‌باشد. دومین اثر، تنش باقیمانده سطح است که به صورت یکسان در سطح بالایی و پایینی توزیع می‌گردد. بر اساس تئوری سطح گورتین [۱۷] روابط تشکیل‌دهنده لایه‌های سطح عبارتند از:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{s\pm} = \tau^{s\pm} \delta_{\alpha\beta} + \lambda^{s\pm} \varepsilon_{\alpha\beta}^{s\pm} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu^{s\pm} \varepsilon_{\alpha\beta}^{s\pm} \quad (\text{الف-۴})$$

$$\sigma_{yz}^{s\pm} = \tau^{s\pm} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{ب-۴})$$

که در آن،  $J_n$  و  $Y_n$  توابع بسل عادی و  $I_n$  و  $K_n$  توابع بسل اصلاح شده می باشد. ضرایب  $A_{in}$  نیز ضرایب شکل مودها هستند که با توجه به شرایط مرزی استخراج می گردد. اعمال شرایط مرزی در تحلیل ارتعاشات صفحات به صورت زیر می باشد:

- گیردار که در آن  $w = w_r = 0$
- ساده که در آن  $w = M_r = 0$
- آزاد که در آن  $V_r = M_r = 0$

که در آن،  $M_r$  و  $V_r$  به ترتیب ممان خمشی و نیروی برشی در جهت شعاعی می باشد. در مختصات قطبی برای ممان خمشی و نیروی برشی داریم:

$$M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \quad (۱۲-الف)$$

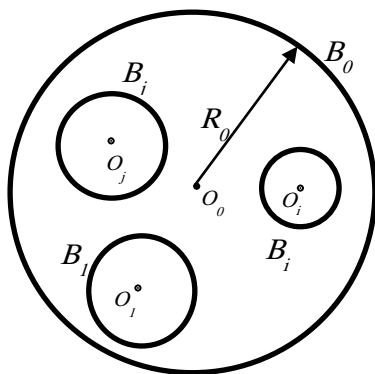
$$M_{r\theta} = -D(1-\nu) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \quad (۱۲-ب)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \quad (۱۲-ج)$$

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (۱۲-د)$$

### ۳- روش تریفتز و اعمال شرایط مرزی خارج مرکزی

در شکل ۱، یک صفحه دایروی با  $H$  سوراخ خارج از مرکز (مراکز دایره های خارج از مرکز  $O_i$  بوده که  $i$  از ۱ تا  $H$  می باشد) مشاهده می شود [۷].



شکل (۱): یک صفحه دایروی با چند سوراخ خارج از مرکز

این مسئله را می توان با توجه به  $H+1$  شرایط مرزی  $B_i$  به صورت زیر نشان داد:

$$B = \bigcup_0^H B_k \quad (۱۳)$$

که در آن،  $q, \rho, h$  به ترتیب ضخامت، چگالی و بار عرضی خارجی وارد بر نانوصفحه می باشد.

در نهایت، معادله خیز عرضی نانوصفحه با ملاحظه اثر سطح بر اساس معادلات (۶-۷) برابر است با:

$$D^* \nabla^4 w + \rho^* h \ddot{w} - 2\tau \nabla^2 w - q = 0 \quad (۸)$$

که در آن،  $\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2$  و  $\nabla^2$  خیز عرضی صفحه را نمایش می دهد. برای  $D^*, \rho^*$  داریم:

$$\rho^* = \rho \left( 1 + \frac{2\rho_s}{\rho h} \right), D^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \left( \frac{2\mu^s + \lambda^s}{4} \right) h^2$$

عبارت  $q$  بار عرضی توزیع شده روی نانوصفحه است که در تحلیل ارتعاشات آزاد صفر در نظر گرفته می شود. برای حل تحلیلی معادله (۸) به صورت زیر عمل می شود:

$$w = w(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (۹)$$

با تنظیم کردن و دستکاری ریاضی معادله (۸) داریم:

$$\nabla^4 w(r, \theta) - \frac{\rho^* h \omega^2}{D^*} w(r, \theta) - \frac{2\tau}{D^*} \nabla^2 w(r, \theta) = \left( \nabla^2 w(r, \theta) + \frac{-\frac{2\tau}{D^*} + \sqrt{\left(\frac{2\tau}{D^*}\right)^2 + 4\alpha^4}}{2} w(r, \theta) \right) \left( \nabla^2 w(r, \theta) + \frac{\frac{2\tau}{D^*} - \sqrt{\left(\frac{2\tau}{D^*}\right)^2 + 4\alpha^4}}{2} w(r, \theta) \right) = 0 \quad (۱۰)$$

پارامتر  $\alpha$  (پارامتر فرکانسی) به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho^* h \omega^2}{D^*}}$$

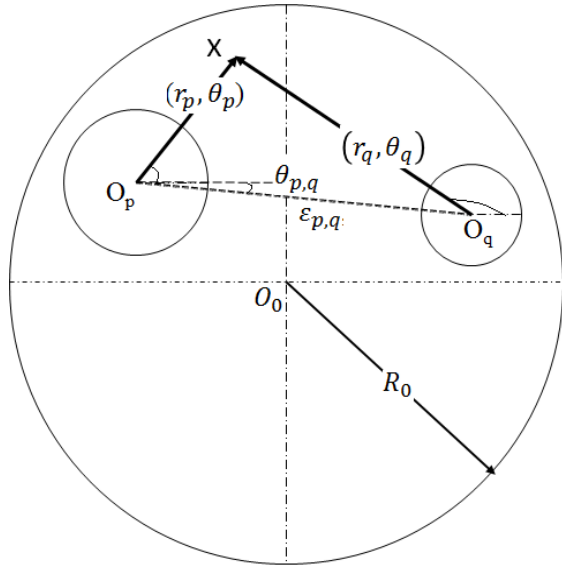
پارامترهای  $\kappa, \lambda$  به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\kappa = \sqrt{\frac{-\frac{2\tau}{D^*} + \sqrt{\left(\frac{2\tau}{D^*}\right)^2 + 4\alpha^4}}{2}}, \lambda = \sqrt{\frac{\frac{2\tau}{D^*} + \sqrt{\left(\frac{2\tau}{D^*}\right)^2 + 4\alpha^4}}{2}}$$

برای حل معادله (۱۰)، می توان با استفاده از جداسازی متغیرها  $w(r, \theta) = R(r) \cdot e^{i\theta}$  را در نظر گرفت. در نتیجه، برای خیز داریم:

$$w(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{1n} J_n(\kappa r) + A_{2n} Y_n(\kappa r) + A_{3n} I_n(\lambda r) + A_{4n} K_n(\lambda r)) e^{in\theta} \quad (۱۱)$$

در معادله (۱۵)،  $(\varepsilon_{p,q}, \theta_{p,q})$  مختصات قطبی  $O_p$  نسبت به مختصات قطبی  $O_q$  است. در نتیجه، اعمال شرایط مرزی به راحتی امکان پذیر خواهد شد.



شکل (۲): نمایش هندسی دایره مرکزی و داخلی

برای اعمال شرایط مرزی داخلی و خارجی طبق معادلات (۱۴-۱۵) داریم:

$$w(r_0, \theta_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (e^{im\theta_0} \{A_{1m} J_m(\kappa r_0) + A_{2m} I_m(\lambda r_0)\})$$

$$+ \sum_{k=1}^H \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{1m}^k j_{m-n}(\kappa \varepsilon_{k,0}) e^{i(m-n)\theta_{k,0}} H_n^{(1)}(\kappa r_0) e^{in\theta_0}$$

$$+ B_{2m}^k (-1)^{m-n} I_{m-n}(\lambda \varepsilon_{k,0}) e^{i(m-n)\theta_{k,0}} K_n(\lambda r_0) e^{in\theta_0}$$

$$w(r_p, \theta_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_p} \{B_{1m}^p H_m^{(1)}(\kappa r_p) + B_{2m}^p K_m(\lambda r_p)\}$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta_p} \cdot e^{i(m-n)\theta_{0,p}} \{A_{1m} J_{m-n}(\kappa \varepsilon_{0,p}) J_n(\kappa r_p)$$

$$+ A_{2m} I_{m-n}(\lambda \varepsilon_{0,p}) I_n(\lambda r_p)\}$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1, k \neq p}^H \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta_p} \cdot e^{i(m-n)\theta_{k,p}} \{B_{1m}^k H_{m-n}(\kappa \varepsilon_{k,p}) J_n^{(1)}(\kappa r_p)$$

$$+ B_{2m}^k (-1)^n K_{m-n}(\lambda \varepsilon_{k,p}) I_n(\lambda r_p)\}$$

در معادلات بالا، اندیس  $O$  برای دایره خارجی و اندیس  $p$  برای هر سوراخ یا دایره داخلی است. در قسمت‌های دوم هر دو معادله بالا با توجه به جابه‌جایی نمایه‌های  $m$  و  $n$  خواهیم داشت:

در نتیجه با توجه به تئوری تریفتز برای خیز صفحه چند سوراخ می‌توان خیز صفحه را از ترکیب خیز چند دایره داخلی و خارجی به صورت زیر نوشت:

$$w(r_0, r_1, \dots, r_H, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_H) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_0} \{$$

$$A_{1m} J_m(\kappa r_0) + A_{2m} I_m(\lambda r_0)\} \quad (۱۴)$$

$$+ \sum_{k=1}^H \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_k} \{B_{1m}^k H_m^{(1)}(\kappa r_k) + B_{2m}^k K_m(\lambda r_k)\}$$

که در آن،  $B_{im}^k$  و  $B_{im}^k$  ضرایب شکل مودها هستند که با توجه به اعمال شرایط مرزی تعیین می‌گردند. با توجه به این که برای دایره بزرگ در حالت کلی بایستی در  $r_1 = 0$  مقدار خیز معلوم داشته باشد ضرایب توابع بسل  $Y$  و  $K$  صفر می‌گردند. برای دایره داخلی نیز در حالت کلی، هنگامی که  $r_2$  بزرگ می‌شود مقدار تابع بسل بهینه‌شده  $I$  بسیار بزرگ شده که در نتیجه ضریب این تابع بسل صفر شده و می‌توان مجموع ضرایب توابع بسل  $J$  و  $Y$  را به صورت تابع هنکل نوع اول  $H^{(1)} = J + i \cdot Y$  نمایش داد. همان‌طور که در شکل ۲ نیز مشخص می‌باشد  $(r_p, \theta_p)$ ،  $(r_q, \theta_q)$  به ترتیب زوایا و شعاع‌های قطبی نسبت به دو مرکز دایره  $p$  و  $q$  می‌باشد. با استفاده از تئوری جمع‌پذیری داریم:

$$J_m(\kappa r_p) e^{im\theta_p} \quad (۱۵-الف)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(\kappa \varepsilon_{p,q}) e^{i(m-n)\theta_{p,q}} J_n(\kappa r_q) e^{in\theta_q}$$

$$I_m(\lambda r_p) e^{im\theta_p} \quad (۱۵-ب)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{m-n}(\lambda \varepsilon_{p,q}) e^{i(m-n)\theta_{p,q}} I_n(\lambda r_q) e^{in\theta_q}$$

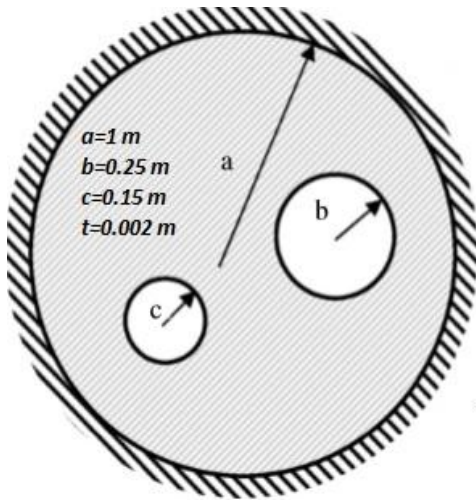
$$H_m^1(\kappa r_p) e^{im\theta_p} = \quad (۱۵-ج)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}^{(1)}(\kappa \varepsilon_{p,q}) e^{i(m-n)\theta_{p,q}} j_n(\kappa r_q) e^{in\theta_q}, r_q < \varepsilon_{p,q} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_{m-n}(\kappa \varepsilon_{p,q}) e^{i(m-n)\theta_{p,q}} H_n^{(1)}(\kappa r_q) e^{in\theta_q}, r_q > \varepsilon_{p,q} \end{cases}$$

$$K_m(\lambda r_p) e^{im\theta_p} = \quad (۱۵-د)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n K_{m-n}(\lambda \varepsilon_{p,q}) e^{i(m-n)\theta_{p,q}} I_n(\lambda r_q) e^{in\theta_q}, r_q < \varepsilon_{p,q} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} I_{m-n}(\lambda \varepsilon_{p,q}) e^{i(m-n)\theta_{p,q}} K_n(\lambda r_q) e^{in\theta_q}, r_q > \varepsilon_{p,q} \end{cases}$$

در شرایط مرزی در دایره خارجی گیردار و داخلی آزاد مشخص می‌باشد.



شکل (۳): ورق دایره ای با دو سوراخ [۸]

همان‌طورکه در جدول ۱ مشاهده می‌شود نتایج تحلیل با مطالعه حاضر با دقت بسیار خوبی با نتایج منابع و مراجع قبلی مطابقت داشته و مطالعه حاضر نتایج صحیحی را ارائه می‌دهد. فرکانس‌های به‌دست‌آمده به روش اجزاء محدود<sup>۱</sup> در نرم‌افزار آباکوس مدل شده است. مقادیر جدول ۱ پارامتر فرکانسی ( $\alpha$ ) می‌باشد.

**جدول (۱):** مقایسه پنج فرکانس ارتعاشی اول بدون بعد ورق دایروی با دو و سه سوراخ غیر هم‌مرکز با لبه‌های داخلی آزاد و لبه خارجی گیردار

نمونه	روش حل	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم
اول	منبع [۸]	۳/۱۷۷	۴/۵۲۹	۴/۶۹۹
	روش المان محدود	۳/۱۹۵	۴/۵۲۹	۴/۷۰۸
	مطالعه حاضر	۳/۱۷۶	۴/۵۲۷	۴/۶۹۵
دوم	منبع [۱۸]	۳/۱۹۶	۴/۴۸۷	۴/۸۱۵
	روش المان محدود	۳/۱۹۶	۴/۴۸۸	۴/۸۱۷
	مطالعه حاضر	۳/۱۹۵	۴/۴۸۵	۴/۸۱۱

$$w(r_0, \theta_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_0} \{A_{1m}J_m(\kappa r_0) + A_{2m}I_m(\lambda r_0)\} \\ + \sum_{k=1}^H \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)\theta_{k,0}} \{B_{1n}^k j_{n-m}(\kappa \varepsilon_{k,0}) H_m^{(1)}(\kappa r_0) + B_{2n}^k (-1)^{n-m} I_{n-m}(\lambda \varepsilon_{k,0}) K_m(\lambda r_0)\} \quad (۱۶-الف)$$

$$w(r_p, \theta_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta_p} \{B_{1m}^p H_m^{(1)}(\kappa r_p) + B_{2m}^p K_m(\lambda r_p)\} \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)\theta_{0,p}} \{A_{1n} J_{n-m}(\kappa \varepsilon_{0,p}) J_m(\kappa r_p) + A_{2n} I_{n-m}(\lambda \varepsilon_{0,p}) I_m(\lambda r_p)\} \\ + \sum_{k=1, k \neq p}^H \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-m)\theta_{k,p}} \{B_{1n}^k H_{n-m}(\kappa \varepsilon_{k,p}) J_m^{(1)}(\kappa r_p) + B_{2n}^k (-1)^m K_{n-m}(\lambda \varepsilon_{k,p}) I_m(\lambda r_p)\} \quad (۱۶-ب)$$

حال می‌توان معادلات شرایط مرزی داخلی و خارجی را اعمال نمود. بعد از اعمال شرایط مرزی، بسته به نوع آزاد، ساده و گیردار بودن در یک شعاع و کل زوایا در آن شعاع (عدم وابستگی به  $\theta$ ) برای هر دایره، دو معادله ایجاد می‌شود. با استفاده از ضرب  $e^{im\theta_q}$  (که  $q=0..H$ ) برای همه معادلات دایره خارجی و دایره داخلی و با توجه به خاصیت تعامد برای هر  $m = -\infty.. \infty$  یک معادله تشکیل می‌گردد.  $N$  نیز در هر کدام از معادلات، از  $-m$  تا  $m$  تغییر خواهد نمود. در نتیجه با کاهش مقدار  $m$  تا همگرایی  $(H+1)(4m+2)$  معادله وجود دارد.  $(H+1)(4m+2)$  نیز مجهول وجود دارد که در نتیجه یک دستگاه معادلات به صورت  $A_{(H+1)(4m+2)} X_{(H+1)(4m+2)} = 0$  وجود خواهد داشت. در این معادله،  $X$  ضرایب شکل مودها می‌باشد. برای این‌که این معادله جواب غیرصفر داشته باشد باید دترمینان ضرایب صفر باشد. برای استخراج فرکانس‌هایی که دترمینان ضرایب را صفر می‌کند از روش کمینه جداسازی مقدار تکین استفاده می‌شود.

#### ۴- نتایج و بحث

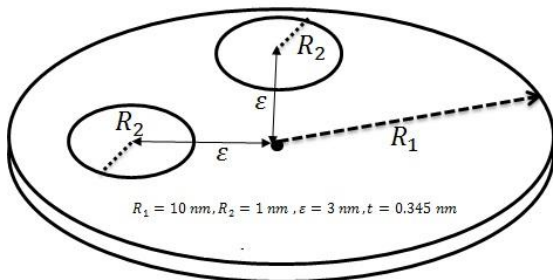
نمونه اول: در شکل ۳ ورق دایروی با دو سوراخ در ابعاد ماکرو

ادامه جدول (۱)

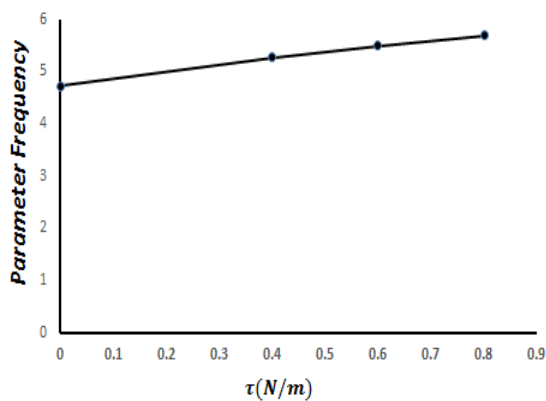
نمونه	روش حل	فرکانس	فرکانس
اول	منبع [۸]	۵/۷۵۱	۵/۹۵۷
	روش المان محدود	۵/۸۰۷	۶/۰۲۸
	مطالعه حاضر	۵/۷۴۱	۵/۹۴۲
دوم	منبع [۱۸]	۶/۰۲۳	۶/۱۰۷
	روش المان محدود	۶/۰۲۷	۶/۱۰۸
	مطالعه حاضر	۶/۰۱۵	۶/۱۰۰

که با توجه به مدول الاستیسیته سطحی مشخص می‌گردد. شکل ۶ مقادیر پارامتر فرکانسی اول به ازای مقادیر مختلف تنش سطحی باقیمانده مختلف به صورت زیر می‌باشد. شرایط مرزی خارجی گیردار و داخلی آزاد می‌باشد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود به ازای افزایش مقدار تنش باقیمانده سطح مقدار پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. همان‌طور که پیش‌بینی می‌شود وجود پدیده اثر سطح منجر به افزایش فرکانس می‌گردد.

همان‌طور که از رابطه پارامتر فرکانسی مشخص است با افزایش مقدار مدول الاستیسیته سطحی پارامتر فرکانسی به صورت افزایشی تغییر خواهد کرد. همان‌گونه که از شکل ۷ استنباط می‌شود در شرایط گیردار-گیردار نیز با افزایش تنش باقیمانده سطح مقدار پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که در این شرایط سفتی تکیه‌گاه‌ها بیشتر است سطح فرکانس از حالت قبل بالاتر می‌باشد.

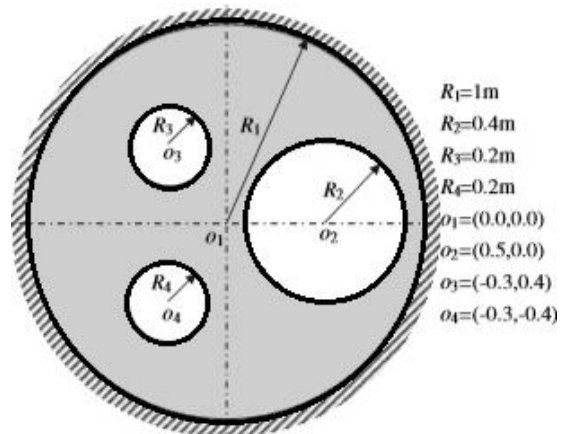


شکل (۵): صفحه مدور گرافنی با دو سوراخ



شکل (۶): پارامتر فرکانسی اول بی بعد بر حسب تنش باقیمانده سطحی برای شرایط گیردار-آزاد

نمونه دوم: در شکل ۴ ورق دایروی با دو سوراخ در ابعاد ماکرو در شرایط مرزی در دایره خارجی گیردار و داخلی آزاد مشخص می‌باشد.



شکل (۴): ورق دایروی با سه سوراخ [۱۸]

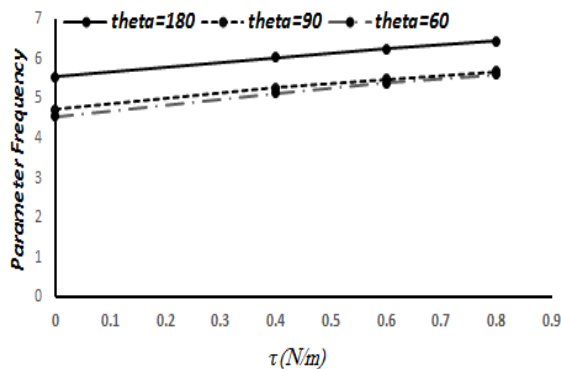
نمونه سوم: یک صفحه با دو سوراخ (خارج مرکز) که در آن اثرات سطح مورد بررسی قرار گرفته و فرکانس‌های طبیعی استخراج گردیده است. در شکل ۵ یک صفحه گرافنی مدور با دو سوراخ نمایش داده شده است. مشخصات نانوماده گرافن به صورت فله و به صورت لایه سطحی برابر است با:

$$E = 10^9 \text{ Gpa}, \rho = 2750 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, \nu = 0.3$$

$$\rho^s = 5.46 \times 10^{-7} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2}, E^s = 4,6,8 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \tau = 0.4, 0.5, 0.6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

ثابت‌های لامه برابر هستند با:

$$\lambda^s = \frac{E^s \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu^s = \frac{E^s}{2(1+\nu)}$$



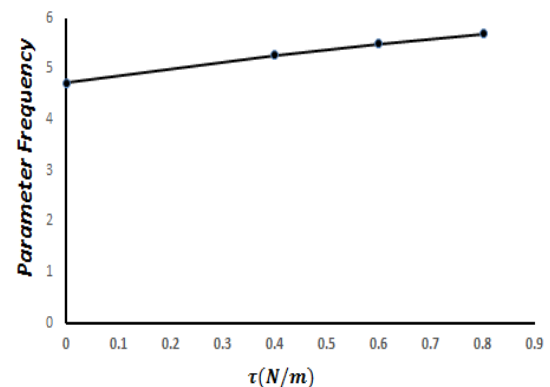
شکل (۹): پارامتر فرکانسی اول برحسب تغییرات تنش سطحی و زاویه بین سوراخ‌ها برای شرایط گیردار- گیردار

### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تاثیر عیوب فقدان اتمی بر ارتعاشات صفحات گرافنی تک‌لایه مدور با ملاحظه پدیده اثر سطح بررسی و نشان داده شد که وجود سوراخ‌ها در گرافن، موجب افزایش فرکانس‌های طبیعی و در نتیجه تغییر خواص ارتعاشی گرافن می‌گردد. اثر سطح که تنش و کرنش را در لایه‌های سطحی تغییر می‌دهد، نقش افزایشی داشته و با رشد آن فرکانس افزایش می‌یابد. برای اولین بار چندین سوراخ در گرافن معیوب با چند دایره مدل شده و ارتعاشات آزاد یک صفحه مدور گرافنی با چند سوراخ خارج از مرکز با استفاده از روش تریفتز و با در نظر گرفتن اثر سطح مطالعه و بررسی گردید. نتایج و شبیه‌سازی برای فرکانس بی‌بعد اول نشان می‌دهد که با افزایش شعاع سوراخ‌ها فرکانس‌های طبیعی ورق معیوب افزایش می‌یابد. همچنین، با افزایش زاویه بین حفره‌ها و عیوب، فرکانس طبیعی ورق معیوب بیشتر می‌شود.

### ۶- مراجع

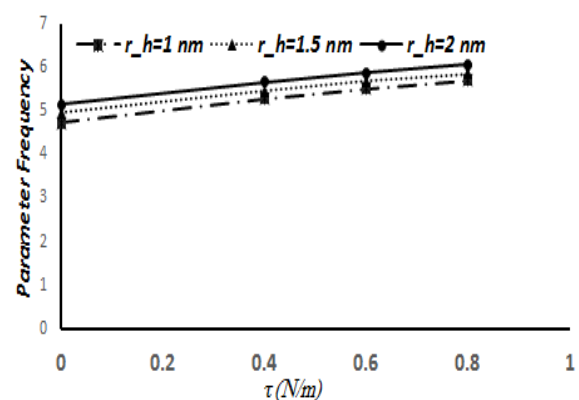
1. Dewapriya, N., Arachchige, M. "Molecular Dynamics Study of Effects of Geometric Defects on the Mechanical Properties of Graphene", Nuwan Dewapriya Mallika Arachchige, 2012.
2. Behfar, K., Naghdabadi, R. "Nanoscale Vibrational Analysis of a Multi-layered Mraphene Sheet Embedded in an Elastic Medium", J. Compos. Sci. Technol., Vol. 65, Nom's. 7-8, pp. 1159-1164, 2005.
3. Mohammadi, M., Goodarzi, M., Ghayour, M., Farajpour, A. "Influence of In-plane Pre-load on the Vibration Frequency of Circular Graphene Sheet



شکل (۷): پارامتر فرکانسی اول برحسب تنش باقیمانده سطحی برای شرایط گیردار- گیردار

در شکل ۸ پارامتر فرکانسی اول برحسب تغییرات تنش سطحی و شعاع سوراخ‌ها ارائه گردیده است. همان‌طور که از شکل مشخص است افزایش شعاع سوراخ و همچنین افزایش تنش سطحی منجر به افزایش فرکانس بی‌بعد می‌گردد. این پدیده برای حالت‌های دیگر تکیه‌گاهی نیز صحت دارد. در نتیجه افزایش شعاع سوراخ منجر به افزایش فرکانس خواهد گردید.

در شکل ۹ پارامتر فرکانسی اول برحسب تغییرات تنش سطحی و زاویه بین سوراخ‌ها ارائه گردیده است. با توجه به نمودارهای این شکل، مشاهده می‌شود که با افزایش تنش سطحی و همچنین افزایش زاویه بین دو سوراخ، فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه با افزایش شعاع بین دو سوراخ فرکانس افزایش می‌یابد.

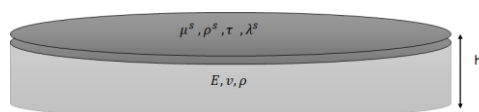


شکل (۸): پارامتر فرکانسی اول برحسب تنش سطحی و شعاع سوراخ‌ها برای شرایط گیردار- گیردار



14. Assadi, A. "Size Dependent Forced Vibration of Nanoplates with Consideration of Surface Effects", *Journal of Applied mathematical modeling*, Vol. 37, No. 5, pp. 3575-3588, 2013.
15. Assadi, A., Farshi, B. "Vibration Characteristics of Circular Nanoplates", *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, pp. 074312-074312-5, 2010.
16. Madani, S.H., Sabour, M.H., Fadaee, M. "Effect of Geometrical Defect on Free Vibration of a Circular Graphene sheet using Trefftz Method", in *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 13, No. 2, pp. 113-121, 2017, (in Persian) .
17. Gurtin, M. E. ,Weissmülle, J., Larch, F. "A General Theory of Curved Deformable Interfaces in Solids at Equilibrium", *Philosophical Magazine*", Vol. 78, No. 5, pp. 1093-1109, 1998.
18. Lee, W. M. , Chen, J. T. "Null-field Integral Equation Approach for Free Vibration Analysis of circular plates with multiple circular holes", *Journal of Comput Mech*, Vol. 42, pp. 733-747, 2008.
4. Ravari, M.K., Shahidi, A. "Axisymmetric Buckling of the Circular Annular Nanoplates Using Finite Difference Method", *Meccanica.*, Vol. 48, No. 1, pp. 135-144, 2013.
5. Lin, W. "Free Transverse Vibrations of Uniform Circular Plates and Membranes with Eccentric Holes", *Journal of Sound and Vibration*", Vol. 81, No. 3, pp.425-435, 1982.
6. Laura, P.A.A., Masia, U., Avalos, D.R. "Small Amplitude, Transverse Vibrations of Circular Plates Elastically Restrained Against Rotation with an Eccentric Circular Perforation with a Free Edge", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, No's. 3-5, pp. 1004-1010, 2006.
7. Lee, W.M., Chen, J.T. "Free Vibration Analysis of a Circular Plate with Multiple Circular Holes by Using the Multipole Trefftz Method", *CMES*, Vol.1403, No.1, pp.1-19, 2009.
8. Lee, W.M., Chen, J.T., Lee, Y.T. "Free Vibration Analysis of Circular Plates with Multiple Circular Holes Using Indirect BIEMs", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, pp. 811-830, 2007.
9. Asemi, SR., Farajpour, A. "Decoupling the Nonlocal Elasticity Equations for Thermo-Mechanical Vibration of Circular Graphene Sheets Including Surface Effects", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 60, pp. 80-90, 2014.
10. Ansari, R., Mohammadi, V., Faghih Shojaei, M., Gholami, R., Sahmani, S. "Surface Stress Effect on the Pull-in Instability of Circular Nanoplates", *Journal of Acta Astronautica*, Vol. 102, pp. 140-150, 2014.
11. Ansari, R., Gholami, R., Shojaei, MF., Mohammadi, V., Sahmani, S. "Surface Stress Effect on the Vibrational Response of Circular Nanoplates with Various Edge Supports", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, No.2, pp. 021021-021027, 2013.
12. Ansari, R., Mohammadi, V., Faghih Shojaei, M., Gholami, R., Sahmani, S. "Surface Stress Effect on the Postbuckling and Free Vibrations of Axisymmetric Circular Mindlin Nanoplates Subject to Various Edge Supports", *Journal of Composite Structures*, Vol. 112, pp. 358-67, 2014.
13. Wang, C.M., Duan, W.H. "Free Vibration of Nanorings/Arches Based on Nonlocal Elasticity", *Journal of Applied Physics*, Vol. 104, No.014303-014308, 2008.

## ۷- پیوست‌ها



شکل (۱۰): مشخصات ماده فله و سطح خارجی