بررسی عددی جریان لایه‌ای حول دو استوانه بیضوی با آرایش‌های مختلف داخل یک کانال، با استفاده از روش شبکه بولتزمن

مجتبی سالاری [۱]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه شیراز

محمد طیبی رهنی [۲]
دانشکده مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی شریف

وحید اصفهانیان [۳]
دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۱؛ تاریخ پذیرش: ۹۵/۸/۲۳)

چکیده

در این مقاله جریان دوبعدی آرام حول دو استوانه بیضوی داخل یک کانال با آرایش‌های مختلف به‌طور عددی با استفاده از روش شبکه بولتزمن در اعداد رینولدز مختلف بررسی شده است. برای مدل‌سازی شرط عدم لغزش در مرز منحنی جامد از یک شرط مرزی منحنی مرتبه دوم استفاده شده است. روش عددی به همراه شرایط مرزی به‌کار رفته در شبیه‌سازی جریان حول یک استوانه دایروی صحت‌سنجی شده است. طبق این نتایج، استوانه اول با توجه به موقعیتش در برابر جریان در آرایش ردیفی بیشترین مقدار نیروی پسا و در آرایش درکنارهم کمترین مقدار آن را دارد. البته، استوانه دوم به دلیل تاثیرپذیری از استوانه اول دارای رفتار پیچیده‌تری است. برخلاف جریان دائم که در آن بیشترین مقدار نیروی برآ در آرایش درکنارهم بر استوانه‌ها وارد می‌شود، در جریان غیردائم به دلیل ریزش گردابه‌ها و اثرات تداخلی ناشی از وجود گردابه‌ها در آرایش جابجاشده مقدار نیروی برآی بیشتری بر استوانه‌ها وارد می‌شود. در ضمن، عدد اشتروهال در آرایش ردیفی از آرایش جابجاشده بیشتر بوده و در آرایش درکنارهم ریزش گردابه مشاهده نشد.

واژه‌های کلیدی: استوانه بیضوی، آرایش ردیفی، آرایش جابجاشده، آرایش درکنارهم، روش شبکه بولتزمن

Numerical Investigation of Flow around Two Elliptical Cylinders with Different Arrangements Confined in a Channel, Using Lattice Boltzmann Method

M. Salari
Mechanical Engineering Dep't.
Shiraz University

M. Taeibi Rahni
Aerospace Engineering Dep't.
Sharif University of Technology

V. Esfahanian
Mechanical Engineering Dep't.
Tehran University

(Received: 22/November/2015; Accepted: 13/October/2016)

ABSTRACT

In this paper, a two-dimensional laminar flow over two elliptical cylinders with different arrangements, confined in a channel is numerically investigated, using lattice Boltzmann method (LBM) for different Reynolds numbers. A second order curved boundary condition used for the no-slip boundary condition at the solid curved boundaries. The results were validated for flow past a single circular cylinder. According to the results, the first cylinder has maximum drag force in tandem arrangement, but it has minimum value of drag in the side-by-side configuration. Of course, the second cylinder has more complicated behavior, being in the wake of the first one. In steady flows, the lift force is maximal in the side-by-side arrangement, while in unsteady flow, it is maximal in staggered arrangement, due to vortex shedding and the dominance of wake interference effects. The Strouhal number in tandem arrangement is greater than that of staggered arrangement and no vortices is shed in side-by-side arrangement.

Keywords: Elliptical Cylinder, Tandem Arrangement, Staggered Arrangement, Side-by-Side Arrangement, Lattice Boltzmann Method (LBM)

۱- دانشجوی دکتری: mojtaba-salari@shirazu.ac.ir
۲- استاد (نویسنده پاسخگو): taeibi@sharif.edu
۳- استاد: evahid@ut.ac.ir

۱- مقدمه

محققان زیادی به طور عددی و تجربی به مطالعه جریان حول استوانه‌هایی با مقاطع مختلف پرداخته‌اند، زیرا این موضوع کاربرد وسیع و متداولی در بسیاری از مسائل مهندسی مانند: مبدل‌های حرارتی، خطوط انتقال نیرو، ساختمان‌ها، سازه‌های ساحلی و دودکش‌های صنعتی دارد. زدراکوویچ [۱] جریان حول دو استوانه دایروی با چیدمان‌های مختلف شامل: درکنارهم[1]، ردیفی[2] و جابجاشده[3] را دراعداد رینولدز بالا به طور تجربی مورد بررسی قرار داد. او براساس نسبت فاصله بی‌بعد بین دو استوانه، سه رژیم جریان مختلف مشاهده کرد.

سورماس و همکاران [۲] نیز جریان آرام حول دو استوانه دایروی با آرایش‌های ردیفی و درکنارهم را با استفاده از روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی کردند. آن‌ها یک رژیم انتقالی هنگامی که فاصله بین استوانه‌ها کمتر از $2D$ بود، مشاهده کردند.

کوندو و ماتسوکوما [۳] جریان حول دو استوانه ردیفی را در عدد رینولدز $Re = 1{,}000$ برای نسبت فواصل $2 \le L/D \le 5$ با استفاده از روش المان محدود سه‌بعدی بادسوی مرتبه سوم بررسی نمودند. آن‌ها در دیاگرام زمانی ضریب دراگ متوسط در یک نسبت فاصله بی‌بعد مشخص بین دو استوانه یک تغییر ناگهانی مشاهده کردند. همچنین، نشان دادند که نتایج حاصل از روش عددی مورد استفاده با نتایج تجربی به خوبی سازگاری دارد.

اکبری و پرایس [۴] با حل عددی معادلات ناویر- استوکس به روش گردابه عددی[4] جریان حول دو استوانه دایروی جابجاشده را به ازای نسبت فواصل مختلف $1.1 \le L/D \le 3$ در عدد رینولدز $Re = 800$ مدل‌سازی کردند. آن‌ها پنج رژیم جریان مختلف بسته به آرایش هندسی استوانه‌ها گزارش نمودند.

کارمو و منغینی [۵] روش المان طیفی[5] را برای شبیه‌سازی جریان‌های دوبعدی و سه‌بعدی حول دو استوانه دایروی ردیفی به کار بردند. آن‌ها جریان را در محدوده اعداد رینولدز $160 \le Re \le 320$ برای نسبت فواصل بی‌بعد بین ۱/۵ تا ۸ در اعداد اشتروهال مختلف مورد بررسی قرار دادند. همچنین، آنان گزارش کردند که برای $Re > 190$ ، هنگامی که ساختارهای سه‌بعدی گردابه‌ای در جریان وجود دارد، شبیه‌سازی دوبعدی قادر به پیش‌بینی درست مقادیر ضرایب پسا نیست.

اگراول و همکاران [۶] جریان آرام حول دو استوانه مکعبی با آرایش درکنارهم را با استفاده از روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی کردند و اثرات تغییر پارامتر بی‌بعد فاصله را روی جریان بررسی نمودند. آن‌ها رژیم‌های جریان مختلفی در عدد رینولدز $Re = 73$ به ازای نسبت‌های مختلف فاصله مشاهده کردند.

سامنر و همکاران [۷] پدیده ریزش گردابه از دو استوانه دایروی جابجا شده را در اعداد رینولدز بالا برای نسبت فواصل $1.5 \le L/D \le 2.5$ به طور تجربی مورد مطالعه قرار دادند. ایشان در فواصل نزدیک $(L/D \le 1.5)$ الگوی جریانی مشابه جریان حول یک استوانه مشاهده کردند و عدد اشتروهال یکسانی برای این دو هندسه به‌دست آوردند. برای فواصل متوسط، ایشان دو عدد اشتروهال و برای فواصل بزرگ $(L/D > 2.5)$، عدد اشتروهال مشابه به استوانه را گزارش کردند.

سینگها و سینهاماهپاترا [۸] روش حجم محدود ضمنی مرتبه دوم را برای شبیه‌سازی جریان حول دو استوانه دایروی ردیفی در محدوده اعداد رینولدز $40 \le Re \le 150$ و برای نسبت فواصل $0.1 \le L/D \le 0.2$ به کار بردند. آن‌ها مشاهده نمودند که ضریب پسای متوسط وارد بر استوانه اول در جریان‌های دائم[6] و غیردائم[7] بیشتر از ضریب پسای وارد بر استوانه دوم است. همچنین نتیجه گرفتند که در فواصل دورتر، استوانه اول تحت تاثیر اثرات تداخل ناشی از وجود دو استوانه قرار ندارد و اثر آن بر استوانه دوم کمتر می‌شود (اما از بین نمی‌رود).

موسی و همکاران [۹] جریان دوبعدی حول دو استوانه دایروی ردیفی را در عدد رینولدز $Re = 100$ و نسبت فواصل $2 \le L/D \le 10$ با استفاده از روش شبکه بولتزمن با مدل برخورد آرامش چندگانه شبیه‌سازی نمودند. آنان بیان کردند که گردابه‌ها با فرکانس یکسانی از دو استوانه ریزش می‌کنند.

نعمتی و همکاران [۱۰] با استفاده از روش شبکه بولتزمن، اثرات تغییر سرعت زاویه‌ای (β) و نسبت فواصل مختلف را در عدد رینولدز $Re = 100$ بر جریان حول دو استوانه دایروی

1- Side-by-side
2- Tandem
3- Staggered
4- Vortex Method
5- Spectral Element Method
6- Steady
7- Unsteady

چرخان ردیفی بررسی کردند. آن‌ها بیان نمودند که با افزایش سرعت زاویه‌ای به مقداری بیشتر از یک مقدار بحرانی، خصوصیات جریان از پردیودیک به دائم تغییر می‌یابد.

عبدالهی و عاطفی [۱۱] جریان آرام حول یک مانع مربعی را با استفاده از روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی کردند. آن‌ها چهار رژیم جریان مختلف وابسته به عدد رینولدز گزارش کرده و بیان نمودند که در جریان دائم با افزایش عدد رینولدز طول گردابه‌های تشکیل شده به طور خطی افزایش یافته و رابطه‌ای نیز برای تخمین طول گردابه‌ها بر حسب رینولدز ارائه نمودند.

وکیل و گرین [۱۲] با استفاده از روش حجم محدود جریان دوبعدی حول دو استوانه ردیفی را در محدوده اعداد رینولدز $1 \leq Re \leq 20$ برای نسبت فواصل مختلف $0.1 \leq L/D \leq 30$ شبیه‌سازی کردند. آن‌ها برای اعداد رینولدز پایین ($1 \leq Re \leq 5$)، در تمامی فواصل، جریان بدون جدایش را مشاهده نمودند و در اعداد رینولدز بالاتر، چهار رژیم جریان مختلف گزارش کردند.

قدیری دهکردی و همکاران [۱۳] جریان‌های آرام (برای اعداد رینولدز 200 و $Re = 100$) و آشفته (در عدد رینولدز $Re = 2.2 \times 10^4$) حول دو استوانه دایروی ردیفی را در نسبت فواصل مختلف با استفاده از روش حجم محدود در آرایش ردیفی بررسی کردند. نتایج آنان دو الگوی جریان کاملاً متفاوت در دو جریان آرام و آشفته را نشان داد.

توجه شود که جریان حول استوانه‌های بیضوی کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. پاتل [۱۴] به طور عددی جریان حول یک استوانه بیضوی را در زوایای حمله مختلف $\theta = 0^o, 30^o, 45^o, 90^o$ در اعداد رینولدز پایین بررسی کرد. او گردابه‌های فون کارمن را در زوایای $\theta = 30^o, 45^o$ در اعداد رینولدز 200 و $Re = 60$ مشاهده نمود.

فاروق و همکاران [۱۵] اثر نسبت منظری[۱] بر روی جریان حول یک استوانه بیضوی نامحدود را با استفاده از نرم‌افزار فلونت[۲] در عدد رینولدز $Re = 40$ مطالعه کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که اندازه دنباله[۳] و ضریب پسا با افزایش نسبت منظری افزایش می‌یابد. هم‌چنین، آن‌ها یک رابطه برای بیان نسبت بین طول دنباله و ضریب پسا با نسبت منظری ارائه کردند.

طیبی رهنی و همکاران [۱۶] با استفاده از روش شبکه بولتزمن جریان حول یک استوانه بیضوی محدود در کانال را در زوایای برخورد مختلف $0 \leq \theta \leq 90$ ، در محدوده اعداد رینولدز متفاوت $5 \leq Re \leq 100$، برای نسبت‌های منظری مختلف شبیه‌سازی نمودند. آن‌ها اثرات این پارامترها را بر خصوصیات جریان و همچنین ضرایب پسا و برآ به طور مفصل بررسی کردند.

بربیش [۱۷] به طور عددی و تجربی نحوه انتقال حرارت اجباری و خصوصیات جریان آشفته حول چهار استوانه بیضوی را در آرایش جابجا شده بررسی کرد. استوانه‌های بیضوی مورد مطالعه دارای نسبت منظری $AR = 0.5$ و در زاویه حمله صفر نسبت به جریان قرار داشتند. نتایج بدست آمده توسط وی نشان داد که در عدد رینولدز $Re < 14{,}100$، عدد ناسلت متوسط استوانه‌ها در آرایش جابجاشده چهارتایی کمتر از مقدار آن در آرایش جابجاشده سه‌تایی است و در اعداد رینولدز $Re > 14{,}100$، استوانه‌ها در آرایش جابجاشده چهارتایی مقادیر ناسلت متوسط بالاتری نسبت به استوانه‌ها درآرایش جابجاشده سه‌تایی دارند.

نجات و همکاران [۱۸] با استفاده از یک روش حجم محدود مرتبه دوم نحوه انتقال حرارت و جریان سیال غیرنیوتنی دوبعدی تراکم‌ناپذیر حول دو استوانه بیضوی ردیفی را برای شرایط $1 \leq Re \leq 40$، $1 \leq Pr \leq 100$، $0.25 \leq AR \leq 1$، $0.2 \leq n \leq 1.8$ (توان سیال غیرنیوتنی) و $1.25 \leq L/D \leq 20$ مطالعه کردند.

طیبی رهنی و همکاران [۱۹] جریان آرام حول دو استوانه بیضوی ردیفی را به ازای نسبت فواصل مختلف $2 \leq L/D \leq 5$ بررسی کردند. آن‌ها روش شبکه بولتزمن را به همراه شرایط مرزی منحنی برای مدل‌سازی جریان به کار برده و برای صحت‌سنجی، جریان حول استوانه دایروی را مدل‌سازی کرده و نشان دادند که نتایج به خوبی با نتایج موجود هم‌خوانی دارد. آن‌ها بیان کردند که در اعداد رینولدز پایین، نیروهای پسای وارد بر دو استوانه هم‌فاز هستند، در حالی که در عدد رینولدز به دلیل وجود ریزش گردابه در فاز مخالف هستند.

در این تحقیق، روش شبکه بولتزمن به همراه شرایط مرزی منحنی مرتبه دوم برای شبیه‌سازی جریان دوبعدی حول دو استوانه بیضوی درون کانال در آرایش‌های مختلف، شامل ردیفی، درکنارهم و جابجاشده به‌کاررفته است. اثرات عدد رینولدز و چیدمان‌های مختلف استوانه‌ها بر خصوصیات جریان به دقت مورد بررسی قرار گرفته است.

1- Aspect Ratio
2- FLUENT
3- Wake

۲- روش شبکه بولتزمن

روش شبکه بولتزمن یک روش محاسباتی نسبتاً جدید است که می‌تواند به طور نسبتاً دقیق رفتار ماکروسکوپیک سیال را با استفاده از مدل‌های میکروسکوپیک شبیه‌سازی نماید [۲۰]. روش‌های عددی معمول بر مبنای حل معادلات پیوسته ماکروسکوپیک به‌وجود آمده‌اند، در حالی که روش شبکه بولتزمن بر اساس مدل‌های میکروسکوپیک و معادلات جنبشی مزوسکوپیک استوار است. روش شبکه بولتزمن خصوصیات خوب روش دینامیک مولکولی شامل، تصویر فیزیکی واضح، بیان ساده شرایط مرزی و الگوریتم‌های کاملاً موازی را در بر می‌گیرد [۲۱].

معادله شبکه بولتزمن از معادله پیوسته بولتزمن بدست می‌آید. معادله پیوسته بولتزمن با تقریب BGK به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\delta f}{\delta t}+\xi.\nabla f=-\frac{1}{\lambda}(f-f^{(eq)}), \qquad (۱)$$

که در آن، ξ سرعت ذره، $f\equiv f(\boldsymbol{x},\xi,t)$ تابع توزیع ذره در فضای فازی پیوسته $(\boldsymbol{x},\xi)$ و f^{eq} تابع توزیع تعادلی ماکسول-بولتزمن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{eq}=\frac{\rho}{(2\pi/3)^{D/2}}\exp\left[-\frac{3}{2}(\xi-\boldsymbol{u})^2\right], \qquad (۲)$$

که در آن، D بعد مکانی است. برای سادگی، سرعت ذره (ξ) و سرعت سیال $(\boldsymbol{u})$ توسط $\sqrt{3RT}$ بی‌بعد شده‌اند و سرعت صوت با رابطه $C_s=1/\sqrt{3}$ داده می‌شود.

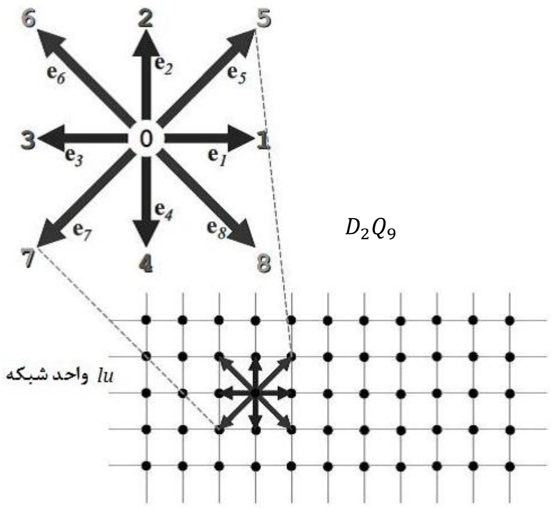
با این فرض که سرعت سیال در مقایسه با سرعت صوت کوچک باشد، معادله (۲) را تا دقت مرتبه دوم، می‌توان به صورت زیر نوشت [۲۱]:

$$f^{eq}=\frac{\rho}{(2\pi/3)^{D/2}}\exp\left(-\frac{3}{2}\xi^2\right)\left[1+3(\xi.\boldsymbol{u})+\frac{9}{2}(\xi.\boldsymbol{u})^2-\frac{3}{2}\boldsymbol{u}^2\right]. \qquad (۳)$$

برای تعیین مقادیر f به صورت عددی، معادله (۱) بدون نقض قوانین بقا با استفاده از یک سری بردارهای سرعت محدود $\{\xi_\alpha\}$ در فضای سرعت ξ به شکل زیر گسسته می‌گردد:

$$\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}+\zeta_\alpha.\nabla f_\alpha=-\frac{1}{\lambda}(f_\alpha-f_\alpha^{(eq)}). \qquad (۴)$$

در رابطه فوق، $f_\alpha(\boldsymbol{x},t)\equiv f(\boldsymbol{x},t,\zeta_\alpha)$ تابع توزیع مربوط به α امین بردار سرعت گسسته ذره ζ_α و $f_\alpha^{(eq)}$ تابع توزیع تعادلی مربوطه در فضای سرعت گسسته هستند [۲۲]. مدل نه سرعتی دوبعدی شبکه بولتزمن که به مدل D_2Q_9 معروف است، در سال ۱۹۹۲ توسط کیان و همکارانش [۲۳] ارائه شد و به طور گسترده در حل مسائل دوبعدی سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مدل، مکان ذرات، محدود به گره‌های شبکه و اندازه سرعت ذرات محدود به سه مقدار و جهت آن‌ها محدود به هشت جهت و همگی دارای یک جرم یکنواخت برابر یک واحد جرم شبکه ($1mu$) می‌باشند (شکل **۱**).



شکل (۱): مدل شبکه D_2Q_9 [۲۴].

واحد طول شبکه و گام زمانی در مدل‌های شبکه بولتزمن به‌ترتیب برابر lu و ts هستند. اندازه سرعت بردارهای e_1 تا e_4 برابر $1\,luts^{-1}$ و اندازه سرعت بردارهای e_5 تا e_8 برابر $\sqrt{2}\,luts^{-1}$ است. مولفه‌های x و y این بردارها برابر 0 یا ± 1 هستند (شکل **۲**) [۲۴]. در این مدل مقادیر e_α را از رابطه زیر نیز می‌توان به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}&e_0=0,\\&e_\alpha=c(\cos((\alpha-1)\frac{\pi}{4}),\ \sin((\alpha-1)\frac{\pi}{4}),\ \alpha=1,2,3,4,\\&e_\alpha=\sqrt{2}c(\cos((\alpha-1)\frac{\pi}{4}),\ \sin((\alpha-1)\frac{\pi}{4}),\alpha=2,4,6,8,\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن‌ها، $c=\delta x/\delta t$ ، δx و δt به‌ترتیب اندازه شبکه و اندازه گام زمانی می‌باشند. تابع توزیع تعادلی برای شبکه D_2Q_9 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_\alpha^{(eq)}=\rho w_\alpha[1+\frac{3}{c^2}e_\alpha.\boldsymbol{u}+\frac{9}{2c^4}(e_\alpha.\boldsymbol{u})^2-\frac{3}{c^2}\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}], \qquad (۶)$$

که w_α ضرایب وزنی[1] معادله فوق بوده و توسط رابطه (۷) داده می‌شوند:

1- Weighting Factor

$$w_\alpha=\begin{cases}4/9, & \alpha=0,\\ 1/9, & \alpha=1,3,5,\\ 1/36, & \alpha=2,4,6,8.\end{cases} \qquad (۷)$$

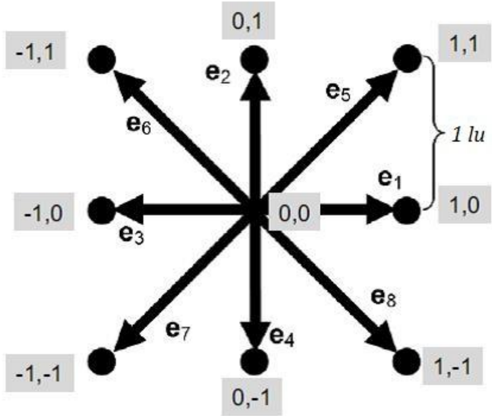
در فضای سرعت گسسته شده، چگالی و سرعت را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\rho=\sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha=\sum_{\alpha=0}^{8} f_\alpha^{(eq)}, \qquad (۸)$$

$$\rho u=\sum_{\alpha=1}^{8} e_\alpha f_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{8} e_\alpha f_\alpha^{(eq)}. \qquad (۹)$$

سرعت صوت در این مدل به‌صورت $c_s=c/\sqrt{3}$ و فشار از معادله حالت محاسبه می‌شود که همانند معادله حالت گاز به صورت زیر می‌باشد:

$$p=\rho c_s{}^2. \qquad (۱۰)$$



شکل (۲): مولفه‌های x و y سرعت در مدل D_2Q_9 [۲۴].

در روش شبکه بولتزمن، معادله (۴) به صورت خاصی گسسته می‌شود. معادله کاملاً گسسته شده با گام زمانی δt و گام مکانی $\delta x=\boldsymbol{e}_\alpha\delta t$، به صورت زیر می‌باشد:

$$f_\alpha(\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_\alpha\delta t,t+\delta t)-f_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t)= -\frac{1}{\tau}[f_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t)-f_\alpha^{(eq)}(\boldsymbol{x}_i,t)], \qquad (۱۱)$$

که در آن، $\tau=\lambda/\delta t$ زمان آرامش بدون بعد و $\boldsymbol{x}_i$ یک نقطه در فضای فیزیکی گسسته می‌باشد. به این معادله، معادله گسسته بولتزمن با تقریب BGK گفته می‌شود که معمولاً طی دو مرحله به نام‌های برخورد[۱] و انتشار[۲] به صورت زیر حل می‌شود:

مرحله برخورد:

$$\tilde{f}_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t+\delta t)=f_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t)-\frac{1}{\tau}[f_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t)-f_\alpha^{(eq)}(\boldsymbol{x}_i,t)], \qquad (۱۲)$$

مرحله انتشار:

$$f_\alpha(\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_\alpha\delta t,t+\delta t)=\tilde{f}_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t+\delta t),$$

که $\tilde{f}_\alpha$ حالت پس از برخورد را نشان می‌دهد. با این شیوه جداسازی در فرآیند حل، نیاز به ذخیره همزمان $f_\alpha(\boldsymbol{x}_i,t)$ و $f_\alpha(\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{e}_\alpha\delta t,t+\delta t)$ نمی‌باشد. اطلاعات روی هر گام زمانی برای شبیه‌سازی جریان غیردائم کافی می‌باشد [۲۲].

در مدل D_2Q_9 لزجت سینماتیکی سیال به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\upsilon=\frac{1}{3}(\tau-\frac{1}{2}), \qquad (۱۳)$$

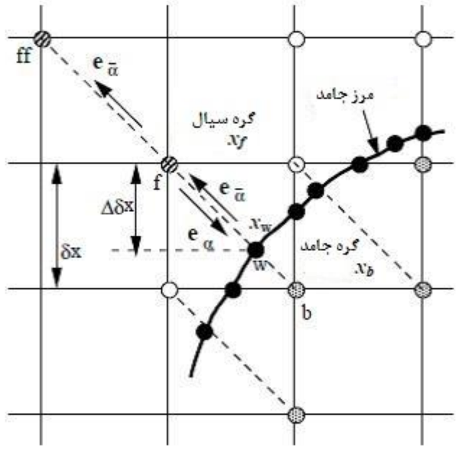
و واحد آن lu^2ts^{-1} در واحد شبکه است. برای آن‌که لزجت مثبت باشد (تا از نظر فیزیکی معنا داشته باشد) باید: $\tau>1/2$ [۲۴].

۲-۱- شرط مرزی دیواره منحنی

ابتدایی‌ترین و مرسوم‌ترین روش برای مدل‌سازی مرز دیواره جامد در روش شبکه بولتزمن، شرط مرزی برگشتی[۳] می‌باشد. در این شرط مرزی طی مرحله انتشار هنگامی که یک ذره به یک دیواره یا مکان شبکه جامد می‌رسد، روی مسیر حرکت اولیه‌اش تغییر جهت داده و برمی‌گردد. اگرچه، بیان این شرط بسیار ساده است، اما دارای دقتی از مرتبه اول بوده و یک سرعت لغزشی روی دیواره وجود دارد. یکی دیگر از معایب شرط مرزی برگشتی این است که این شرط سطوح منحنی را به صورت پله‌پله مدل می‌کند. این مشکل را تا حدودی با افزایش نقاط شبکه می‌توان حل کرد، اما این کار هزینه‌های محاسباتی را بالا می‌برد [۲۰]. از این رو تلاش‌های زیادی برای مدل کردن دقیق مرزهای منحنی توسط محققان مختلف انجام شده است. در این تحقیق با توجه به نتایج حاصل از کار انجام شده توسط سالاری [۲۵] و هم‌چنین بیگ‌زاده [۲۶] از شرط مرزی ارائه شده توسط فیلیپووا و هنل [۲۷] برای مدل‌سازی مرز منحنی استفاده شده است. مرز منحنی نشان داده شده در شکل ۳ را در نظر بگیرید. $\mathbf{x}_f$ بیانگر گره مرزی سیال، $\mathbf{x}_b$ گره مرزی جامد و $\mathbf{x}_w$ محل برخورد دیوار با بازوهای شبکه را نشان می‌دهد. سرعت مرزی در این مکان برابر $\boldsymbol{u}_w$ می‌باشد. پارامتر Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta=\frac{|\mathbf{x}_f-\mathbf{x}_w|}{|\mathbf{x}_f-\mathbf{x}_b|}. \qquad (۱۴)$$

1- Collision Step
2- Streaming Step
3- Bounce-Back Boundary Condition



شکل (۳): شبکه و مرز منحنی جامد [۲۸].

با توجه به شکل، واضح است که $0 \le \Delta \le 1$ و فاصله افقی و یا عمودی بین $\mathbf{x}_b$ و $\mathbf{x}_w$ برای یک شبکه‌ی مربعی برابر با $\Delta.\delta x$ می‌باشد. مومنتوم ذره‌ای که از گره سیال به سمت گره جامد حرکت می‌کند را با $\mathbf{e}_\alpha$ و از سمت گره جامد به سمت گره سیال را با $\mathbf{e}_{\bar\alpha} = -\mathbf{e}_\alpha$ نشان می‌دهیم. پس از مرحله برخورد، مقدار $\tilde f_\alpha$ برای گره سیال معلوم می‌باشد، اما برای گره‌ی جامد مجهول است. برای پایان یافتن مرحله انتشار باید داشته باشیم:

$$f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_b + \mathbf{e}_{\bar\alpha}\delta t, t+\delta t) = \tilde f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_b, t). \qquad (۱۵)$$

واضح است که مقدار $\tilde f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_b,t)$ باید تعیین شود. فیلیپووا و هنل مقدار این تابع توزیع مجهول را با استفاده از یک درون‌یابی خطی به صورت زیر تعیین کردند:

$$\tilde f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_b,t) = (1-\chi)\,\tilde f_\alpha(\mathbf{x}_f,t) + \chi f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b,t) + 2\omega_\alpha \rho \frac{3}{c^2} e_{\bar\alpha}.\boldsymbol{u}_w, \qquad (۱۶)$$

که $\boldsymbol{u}_w \equiv u(\mathbf{x}_w,t)$ سرعت در دیواره و χ ضریب وزنی است که درونیابی (یا برونیابی) خطی بین $\tilde f_\alpha(\mathbf{x}_f,t)$ و $f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b,t)$ را کنترل می‌کند. در رابطه فوق، $f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b,t)$ یک تابع توزیع تعادلی مجازی است که توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f_\alpha^{(*)}(\mathbf{x}_b,t) = \omega_\alpha \rho(\mathbf{x}_f,t)\left[1 + \frac{3}{c^2}\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{u}_{bf} + \frac{9}{2c^4}(\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{u}_f)^2 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}_f.\mathbf{u}_f\right], \qquad (۱۷)$$

که در آن، $\boldsymbol{u}_f \equiv u(\mathbf{x}_f,t)$ سرعت سیال نزدیک دیواره و $\mathbf{u}_{bf}$ باید تعیین شود. باید توجه داشت که ضریب وزنی (χ) بستگی به انتخاب $\mathbf{u}_{bf}$ دارد، زیرا انتخاب آن یکتا نیست. $\mathbf{u}_{bf}$ و χ برای مقادیر مختلف Δ در مرجع [۲۸] به صورت زیر تعیین شده است:

برای $\Delta \ge 1/2$،

$$\mathbf{u}_{bf} = (\Delta-1)\mathbf{u}_f/\Delta + \mathbf{u}_w/\Delta, \quad \chi = (2\Delta-1)/\tau, \qquad (۱۸)$$

و برای $\Delta < 1/2$،

$$\mathbf{u}_{bf} = \mathbf{u}_f, \quad \chi = (2\Delta-1)/(\tau-1). \qquad (۱۹)$$

۲-۲- محاسبه نیرو

در روش شبکه بولتزمن دو روش رایج برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر اجسام وجود دارد: روش تبادل مومنتوم[1] و روش انتگرال- تنش[2] روی سطح جامد. روش انتگرال- تنش در مسائل سه‌بعدی دارای بیانی پیچید و دشوار و برای مسائل دوبعدی یک روش پر زحمت محاسباتی است. درحالی‌که، روش تبادل مومنتوم روشی ساده، قابل اعتماد و دارای بیانی ساده برای مسائل دو و سه‌بعدی می‌باشد [۲۹]. با توجه به مطالب ذکر شده، در این تحقیق از روش تبادل مومنتوم استفاده شده است.

در روش تبادل مومنتوم دو آرایه عددی $\omega(i,j)$ و $\omega_b(i,j)$ تعریف می‌شود، به طوری که مقدار $\omega(i,j)$ در گره‌های سیال برابر صفر و در گره‌های جامد برابر یک است و مقدار $\omega_b(i,j)$ در گره‌های مرزی، x_b، برابر یک و در سایر نقاط برابر صفر است. برای یک سرعت داده شده e_α، $e_{\bar\alpha}$ بیانگر سرعت در جهت مخالف است، یعنی، $e_{\bar\alpha} = -e_\alpha$ (شکل **۳**). برای یک گره مرزی x_b داخل جسم جامد با $\omega_b(i,j) = 1$ و $\omega(i,j) = 1$، تبادل مومنتوم با همه نقاط سیال مجاور در یک گام زمانی برابر است با:

$$\sum_{\alpha\neq 0} e_\alpha[\tilde f_\alpha(x_b,t) + \tilde f_{\bar\alpha}(x_b + e_{\bar\alpha}\delta t, t)][1-\omega(x_b + e_{\bar\alpha}\delta t)]. \qquad (۲۰)$$

نیروی کل وارد بر جسم با جمع تمامی مقادیر تغییر مومنتوم مربوط به تمام گره‌های داخل جسم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{all\ x_b}\sum_{\alpha\neq 0} e_\alpha[\tilde f_\alpha(x_b,t) + \tilde f_{\bar\alpha}(x_b + e_{\bar\alpha}\delta t, t)][1-\omega(x_b + e_{\bar\alpha}\delta t)]. \qquad (۲۱)$$

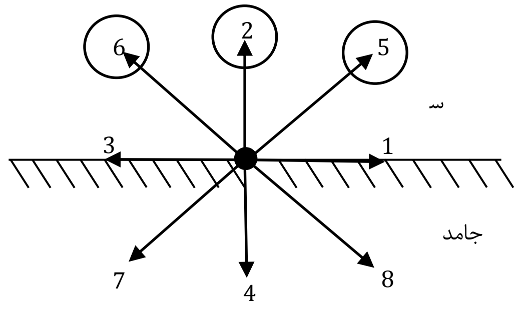
در روش تبادل ممنتوم، مقدار $\boldsymbol{F}$ پس از مرحله برخورد و به دست آوردن مقادیر $\tilde f_{\bar\alpha}(x_b,t)$ محاسبه می‌شود. تبادل ممنتوم در حین مرحله جاری شدن و هنگامی که $\tilde f_{\bar\alpha}(x_b,t)$ و

1- Momentum Exchanged Method
2- Stress-Integration Method

$\tilde{f}_\alpha(x_f,t)$ به ترتیب به سمت نقاط x_f و x_b حرکت می‌کنند، انجام می‌شود [۲۵].

۲-۳- شرط مرزی عدم لغزش در دیواره‌های پایین و بالا

از آن‌جایی که روش شبکه بولتزمن یک روش مرتبه دوم در مکان است، شرایط مرزی مناسب شرایطی از دقت مرتبه دوم می‌باشند. در این تحقیق برای مدل‌سازی شرایط مرزی در دیواره‌های کانال یک شرط مرزی مرسوم با دقت مرتبه دوم که در سال ۱۹۹۶ توسط زو و هی [۳۰] ارائه گردید، استفاده شده است. این شرط بر پایه برگشت[۱] توابع توزیع غیرتعادلی بنا شده است. برای مثال، گره واقع در مجاورت دیواره پایین کانال را در نظر بگیرید (شکل۴). پس از انتشار، مقادیر توابع توزیع f_0 ، f_1 ، f_3 ، f_4 ، f_7 و f_8 معلوم هستند. با فرض معین بودن مقادیر سرعت‌های u_x و u_y روی دیواره، می‌خواهیم مقادیر توابع توزیع مجهول f_2 ، f_5 ، f_6 و مقدار چگالی ρ را تعیین نماییم.



شکل ۴ توابع توزیع در مجاورت یک دیواره جامد پس از مرحله انتشار [۳۱].

با نوشتن معادلات بقا (معادلات ۸ و ۹) برای گره مذکور داریم:

$$f_2+f_5+f_6=\rho-(f_0+f_1+f_3+f_4+f_7+f_8), \qquad (۲۲)$$

$$f_5-f_6=\rho u_x-(f_1-f_3-f_7+f_8), \qquad (۲۳)$$

$$f_2+f_5+f_6=\rho u_y+(f_4+f_7+f_8). \qquad (۲۴)$$

از حل همزمان معادلات (۲۲) و (۲۴) چگالی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho=\frac{1}{1-u_y}[f_0+f_1+f_3+2(f_4+f_7+f_8)]. \qquad (۲۵)$$

با توجه به این که هنوز سه مقدار مجهول و فقط دو معادله مستقل وجود دارد، برای بستن سیستم نیاز به یک معادله اضافی می‌باشد. با نوشتن قانون برگشت برای بخش غیرتعادلی، توابع توزیع عمود بر مرز معادله سوم به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$f_2-f_2^{(eq)}=f_4-f_4^{(eq)}. \qquad (۲۶)$$

با استفاده از این رابطه در معادلات فوق، مقادیر توابع توزیع مجهول به شکل زیر تعیین می‌شوند:

$$f_2=f_4+\frac{2}{3}\rho u_y, \qquad (۲۷)$$

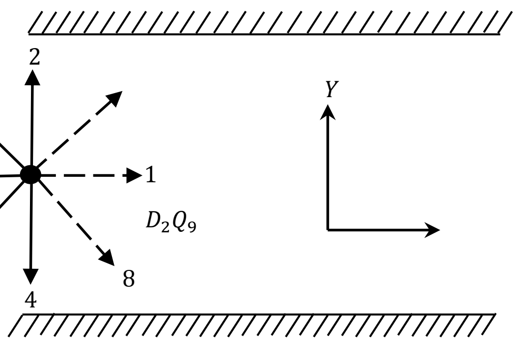
$$f_5=f_7-\frac{1}{2}(f_1-f_3)+\frac{1}{2}\rho u_x+\frac{1}{6}\rho u_y, \qquad (۲۸)$$

$$f_6=f_8+\frac{1}{2}(f_1-f_3)-\frac{1}{2}\rho u_x+\frac{1}{6}\rho u_y. \qquad (۲۹)$$

سپس، مرحله برخورد را باید برای این گره‌های مرزی اعمال کرد. یافتن مقادیر مجهول در مجاورت دیواره بالا مشابه فرآیند فوق است.

۲-۴- شرط مرزی سرعت در ورودی کانال

در ورودی کانال پروفیل سرعت سهمی‌گون فرض می‌شود که برای مدل کردن آن مشابه شرط مرزی عدم لغزش، از روش ارائه شده توسط زو و هی [۳۰] استفاده می‌شود. مرز ورودی در شکل **۵** را در نظر بگیرید. مقادیر u_x و u_y در مرز جریان مشخص هستند و باید مقادیر چگالی و توابع توزیع مجهول (که در شکل با خط‌چین مشخص شده‌اند) را با استفاده از معادلات بقا تعیین کرد.



شکل (۵): گره‌های مرزی در ورودی کانال.

در این جا نیز با وضعیتی مشابه با شرط مرزی سرعت دیواره جامد روبرو هستیم و لذا، به طریق کاملاً مشابه می‌توان مقادیر توابع توزیع مجهول را با استفاده از معادلات بقا و قانون برگشت برای بخش غیرتعادلی توابع توزیع عمود بر مرز را به صورت زیر تعیین کرد:

$$f_1-f_1^{(eq)}=f_3-f_3^{(eq)}. \qquad (۳۰)$$

1- Bounce-Back

با استفاده از روش فوق به‌راحتی مقادیر مجهول به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\rho=\frac{1}{1-u_x}[f_0+f_2+f_4+2(f_3+f_6+f_7)], \qquad (۳۱)$$

$$f_1=f_3+\frac{2}{3}\rho u_x. \qquad (۳۲)$$

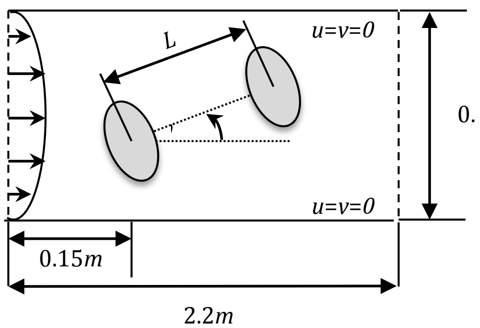
۲-۵- شرط مرزی خروجی کانال

در مرزهایی که تغییرات کمیت‌های ماکروسکوپیک سیال کم است، می‌توان از شرط گرادیان صفر استفاده کرد. به طور مثال، اگر مرز خروجی به اندازه کافی از جسم دور باشد، می‌توان مقادیر f_α مجهول را با استفاده از شرط مرزی برونیابی تعیین کرد. بنابراین با توجه به ناچیز بودن تغییرات پارامترهای سیال در خروجی، در این تحقیق از شرط مرزی برون‌یابی چن و همکاران [۳۲] در خروجی کانال استفاده می‌شود. اگر مرز خروجی جریان در $i=N$ قرار داشته باشد، با استفاده از روش اختلاف محدود با دقت مرتبه دوم به صورت پسرو در خروجی، مقدار تابع توزیع مجهول را می‌توان توسط مقادیر توابع توزیع دو نقطه همسایه به صورت زیر به‌دست آورد:

$$f_\alpha(N,j)=\frac{1}{3}\left[4f_\alpha(N-1,j)-f_\alpha(N-2,j)\right]. \qquad (۳۵)$$

۳- تعریف مساله

هندسه میدان جریان و شرایط مرزی در شکل **۶** نشان داده شده است. فاصله مراکز دو استوانه برابر L می‌باشد و $\theta=0$ بیانگر آرایش ردیفی، $\theta=90$ آرایش درکنارهم و سایر حالات بیانگر آرایش جابجا شده است که در این مقاله $\theta=45$ مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل (۶): هندسه و شرایط مرزی برای جریان حول دو استوانه بیضوی.

برای این مساله نسبت منظری[1] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AR=b/a, \qquad (۳۶)$$

که $2b$ محور کوچک و $2a$ محور بزرگ مقطع استوانه بیضوی است. عدد رینولدز در این مساله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Re=2\boldsymbol{U}a/\nu, \qquad (۳۷)$$

که در آن‌ها، $\boldsymbol{U}=2U(0,H/2,t)/3$ سرعت متوسط در کانال است. ضرایب پسا و برآ طبق تعریف برابرند با:

$$C_D=\frac{\boldsymbol{F}_D}{\rho\boldsymbol{U}^2a}, \quad C_L=\frac{\boldsymbol{F}_L}{\rho\boldsymbol{U}^2a}, \qquad (۳۸)$$

و نیروهای پسا و برآ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{F}_D=\int\left(\rho\upsilon\frac{\delta\upsilon_t}{\delta n}n_y-Pn_x\right)dS, \qquad (۳۹)$$
$$\boldsymbol{F}_L=-\int\left(\rho\upsilon\frac{\delta\upsilon_t}{\delta n}n_x+Pn_y\right)dS,$$

که در آن، S محیط دایره، n بردار عمود بر S با مولفه n_x در جهت محور x و مولفه n_y در جهت x، υ_t بردار مماس سرعت بر S و $t=(n_y,-n_x)$ بردار مماس است. عدد اشتروهال به صورت $St=Df/\boldsymbol{U}$ تعریف می‌شود که f فرکانس تشکیل گردابه‌های تناوبی است. طول جدایش به صورت زیر تعریف می‌شود:

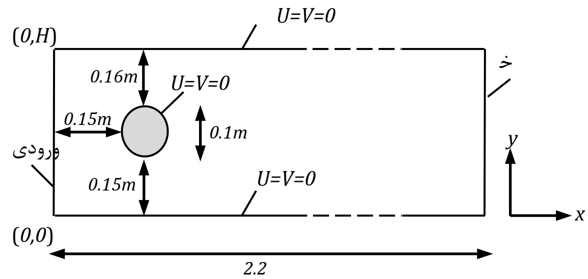
$$L_a=x_r-x_e, \qquad (۴۰)$$

که x_e مولفه x انتهای استوانه و x_r مولفه x انتهای ناحیه جدایش می‌باشد.

۴- صحت‌سنجی و تعیین شبکه حل

برای بررسی صحت کد عددی نوشته شده و هم‌چنین مقدار خطای حاصل از شرایط مرزی به کار رفته، جریان دائم و غیردائم حول استوانه دایروی ساکن درون کانال به ترتیب در اعداد رینولدز $Re=20$ و $Re=100$ شبیه‌سازی شده‌اند. برای این جریان نتایج بنچ – مارک[2] وجود دارد و می‌توانیم نتایج به‌دست آمده را با این نتایج مقایسه کرد [۳۳]. هندسه میدان جریان و شرایط مرزی در شکل **۷** نشان داده شده است. ارتفاع کانال برابر $H=0.41\ m$ و قطر دایره برابر $D=0.1\ m$ است.

1- Aspect Ratio
1- Bench-Marked



شکل (۷): هندسه میدان جریان و شرایط مرزی برای جریان دوبعدی حول استوانه دایروی [۳۳].

برای نشان دادن عدم وابستگی حل به تعداد گره‌های میدان جریان، ابتدا مساله جریان دائم را برای تعداد گره‌های مختلف حل کرده و با مقایسه نتایج با یکدیگر، تعداد گره‌های مناسب تعیین می‌شود. جدول **۱** نتایج حاصل از حل جریان دوبعدی دائم حول سیلندر دایروی ساکن درون کانال با عدد رینولدز ۲۰ را برای ابعاد شبکه مختلف بر حسب D/δ_x نشان می‌دهد. با توجه به این جدول برای $D/\delta_x = 40$ یا تعداد گره‌های ۶۵ × ۸۸۱ دیگر نتایج وابسته به شبکه حل نیست. پارامترهای حائز اهمیت در جریان دائم عبارتند از: ضریب پسا C_D، ضریب برآ C_L و طول جدایش جریان L_a. مقادیر فوق به همراه مقادیر ارائه شده توسط شفر و تورک [۳۳] در جدول **۲** ارائه شده‌اند. این جدول‌ها تطابق خوبی بین نتایج کار حاضر و نتایج مرجع [۳۳] نشان می‌دهند.

برای نشان دادن توانایی کد عددی در جریان‌های غیردائم به حل عددی جریان حول استوانه در اعداد رینولدز بالاتر (نسبت به جریان دائم)، پرداخته می‌شود. در مسائل غیردائم، ضرایب حائز اهمیت عبارتند از: ضریب پسا، ضریب برآ و عدد اشتروهال. ضرایب پسا و برآ تابعی از زمان بوده و با توجه به نتایج بنچ- مارک، مقادیر ماکزیمم آن‌ها برای مقایسه با مقادیر ارائه شده توسط شفر وتورک در جدول **۳** ارائه شده است. همان‌گونه که از جدول **۳** مشهود است کد عددی نوشته شده نتایج قابل قبولی با درصد خطای کم را نشان می‌دهد.

جدول (۱): مطالعه عدم وابستگی حل به ابعاد شبکه برای جریان حول یک استوانه دایروی ساکن درون کانال در $Re = 20$.

D/δ_x	C_D	C_L
۱۰	واگرا	واگرا
۲۰	۵/۶۱۵	۰/۰۱۱
۳۰	۵/۶۱۱	۰/۰۱
۴۰	۵/۶۰۹	۰/۰۱
۵۰	۵/۶۰۹	۰/۰۱

جدول (۲): ضرایب پسا، برآ و طول جدایش جریان برای شروط مرزی مختلف و برای جریان دائم حول استوانه دایروی ساکن درون کانال $(Re = 20)$.

پارامتر	مطالعه حاضر	مقادیر حداقل [۳۴]	مقادیر حداکثر [۳۴]	درصد خطا نسبت به مقادیر حداقل	درصد خطا نسبت به مقادیرحداکثر
C_D	۵/۶۰۹	۵/۵۷۰	۵/۵۹۰	۰/۷۰	۰/۳۴
C_L	۰/۰۱۰۰	۰/۰۱۰۴	۰/۰۱۱۰	۳/۸۵	۹/۰۹
L_a	۰/۰۸۱۷	۰/۰۸۴۲	۰/۰۸۵۲	۲/۹۷	۴/۱۱

جدول (۳): ضرایب پسا ماکزیمم، برآ ماکزیمم و عدد اشتروهال برای جریان غیردائم حول استوانه دایروی ساکن درون کانال و $(Re = 100)$.

پارامتر	مطالعه حاضر	مقادیر حداقل [۳۴]	مقادیر حداکثر [۳۴]	درصد خطا نسبت به مقادیر حداقل	درصد خطا نسبت به مقادیرحداکثر
$C_{D\,max}$	۳/۳۱۳	۳/۲۲۰	۳/۲۴۰	۲/۸۹	۲/۲۵
$C_{L\,max}$	۱/۰۳۷	۰/۹۹۰	۱/۰۱۰	۴/۷۵	۲/۶۷
St	۰/۳۰۲	۰/۲۹۵	۰/۳۰۵	۲/۳۷	۰/۹۸

جدول (۴): مطالعه عدم وابستگی حل به ابعاد شبکه برای جریان حول یک استوانه بیضوی ساکن درون کانال در $Re = 20$.

اندازه شبکه	گام شبکه $(\Delta x = \Delta y)$	C_D	C_L
۴۴۱ × ۸۳	۰/۰۰۵	۵/۶۷۶	۰/۰۰۱
۶۶۱ × ۱۲۴	۰/۰۰۳۳	۵/۶۹۹	−۰/۰۰۴۶
۸۸۱ × ۱۶۵	۰/۰۰۲۵	۵/۷۰۴	−۰/۰۰۴۵
۱۱۰۱ × ۲۰۶	۰/۰۰۲	۵/۷۰۷	−۰/۰۰۵۲
۱۷۶۱ × ۳۲۹	۰/۰۰۱۲۵	۵/۷۰۹	−۰/۰۰۴۵

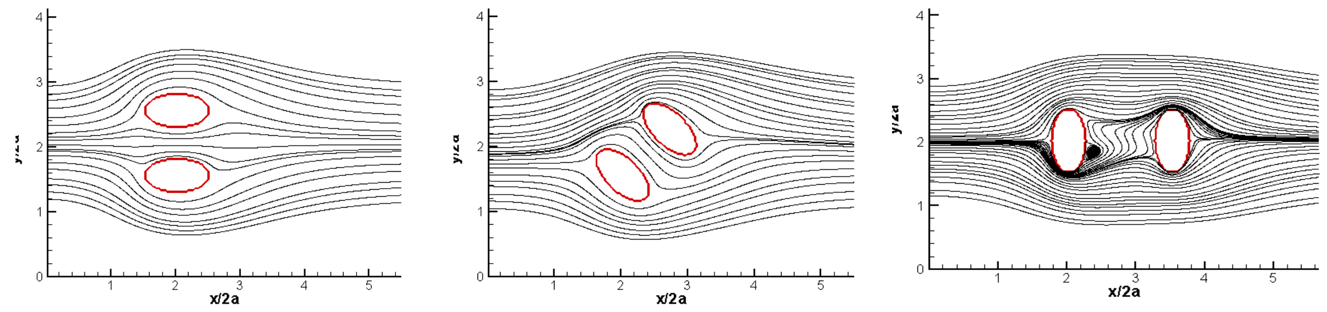
برای تعیین شبکه حل مناسب، مساله را برای شبکه‌های مختلف حل کرده تا پارامترهای جریان تغییر نکنند. این شبکه‌ها و ضرایب پسا برای جریان حول استوانه بیضوی عمود بر جریان $(\theta = 90)$ و برای نسبت منظری $AR = 0.5$ و عدد رینولدز $Re = 20$ در جدول **۴** ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که برای نسبت منظری $AR = 1$، استوانه به یک استوانه دایروی تبدیل می‌شود که نتایج مربوط به عدم وابستگی نتایج به دامنه حل در جدول **۱** ارائه گردید. با توجه به جدول‌های **۱** و **۴** برای شبکه ۱۶۵ × ۸۸۱ نتایج وابسته به ابعاد شبکه نیست و لذا با افزایش تعداد فاصله گره‌ها ضرایب تغییر چندانی نمی‌کنند.

۵- نتایج و بحث

تاثیر چیدمان و عدد رینولدز بر ضرایب پسا، برآ، شدت ریزش گردابه‌ها و همچنین الگوهای مختلف جریان تشکیل یافته حول استوانه‌ها در محدوده اعداد رینولدز $5 \leq Re \leq 100$ در این قسمت بررسی شده است. در محاسبات انجام شده قطر بزرگ بیضی برابر $0.1\,m$، نسبت منظری بیضی برابر $AR = 0.5$ و فاصله ثابت بین مراکز دو استوانه $L = 2a$ در نظر گرفته شده است.

۵-۱- بررسی رژیم‌های مختلف جریان (الگوهای جریان)

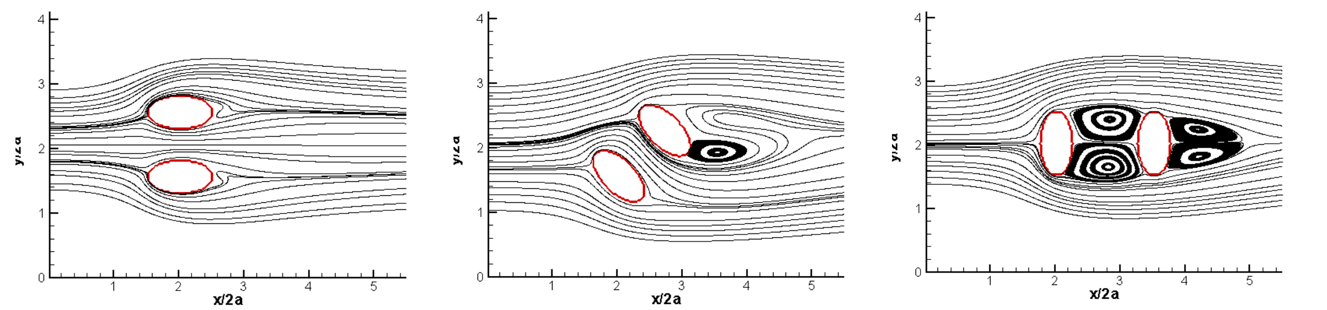
خطوط جریان در عدد رینولدز $Re = 5$ برای سه آرایش مختلف در شکل **۸** رسم شده است. در اعداد رینولدز پایین، سرعت کم جریان و اثر غالب نیروهای لزجی باعث تشکیل یک جریان متقارن و بدون جدایش حول هر دو استوانه در همه حالات می‌شود. با افزایش عدد رینولدز، مقدار نیروهای لزجی کاهش یافته تا این که در نهایت در یک رینولدز خاص جدایش لایه‌های مرزی رخ می‌دهد. برای استوانه‌های بیضوی در مقایسه با استوانه‌های دایروی به دلیل شکل هندسی خاص آن‌ها گرادیان فشار موجود در فاصله بیشتری توزیع شده و در نتیجه کاهش شیب فشار معکوس، جدایش جریان به تاخیر افتاده و در عدد رینولدز بالاتری رخ می‌دهد (زدراکوویچ [۱] این عدد را برای یک استوانه دایروی حدود $Re \approx 5$ تعیین کرد).



(پ) (ب) (الف)

شکل (۸): خطوط جریان حول دو استوانه بیضوی در $Re = 5$ در آرایش‌های (الف) ردیفی ، (ب) جابجاشده و (پ) درکنارهم.

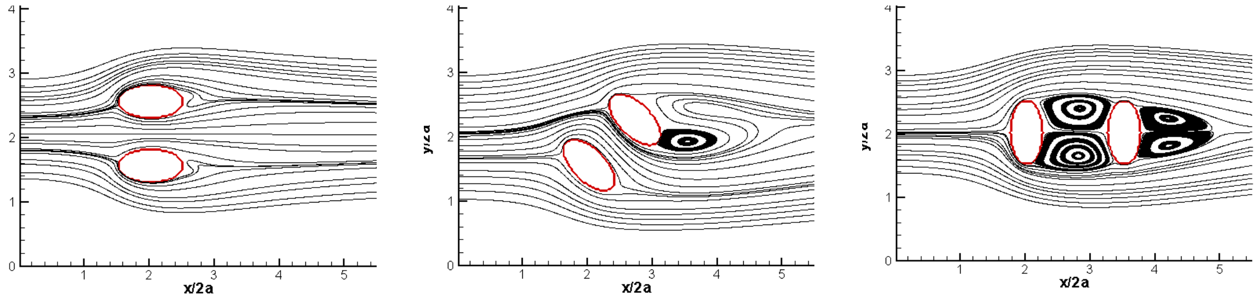
در اعداد رینولدز بالاتر از این مقدار بحرانی، در تمامی حالات پشت استوانه دوم دو گردابه متقارن تشکیل می‌شود (شکل **۹**) که طول گردابه تشکیل شده با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد. جریان حول استوانه اول بستگی به فاصله بین دو استوانه و عدد رینولدز جریان دارد. در فاصله مورد مطالعه این تحقیق و در عدد رینولدز $Re = 40$، همان‌گونه که به‌ترتیب در شکل‌های **۹- الف** و **۹- پ** در آرایش‌های ردیفی و درکنارهم مشاهده می‌شود، دو گردابه متقارن پشت استوانه اول نیز شکل می‌گیرد، اما در آرایش جابجاشده جریان حول استوانه اول فاقد جدایش است (شکل **۹- ب**).



(پ) (ب) (الف)

شکل (۹): خطوط جریان حول دو استوانه بیضوی محدود در $Re = 40$ در آرایش‌های، (الف) ردیفی، (ب) جابجاشده، (پ) درکنارهم.

با افزایش بیشتر عدد رینولدز، جریان ناپایا شده، لایه‌های برشی بر روی هم جمع شده و گردابه‌های کوچک به نحوی که در شکل‌های **۱۰– الف** و **۱۰– ب** در آرایش‌های ردیفی و جابجاشده مشاهده می‌شود، تشکیل شده و پدیده ریزش گردابه رخ می‌دهد.

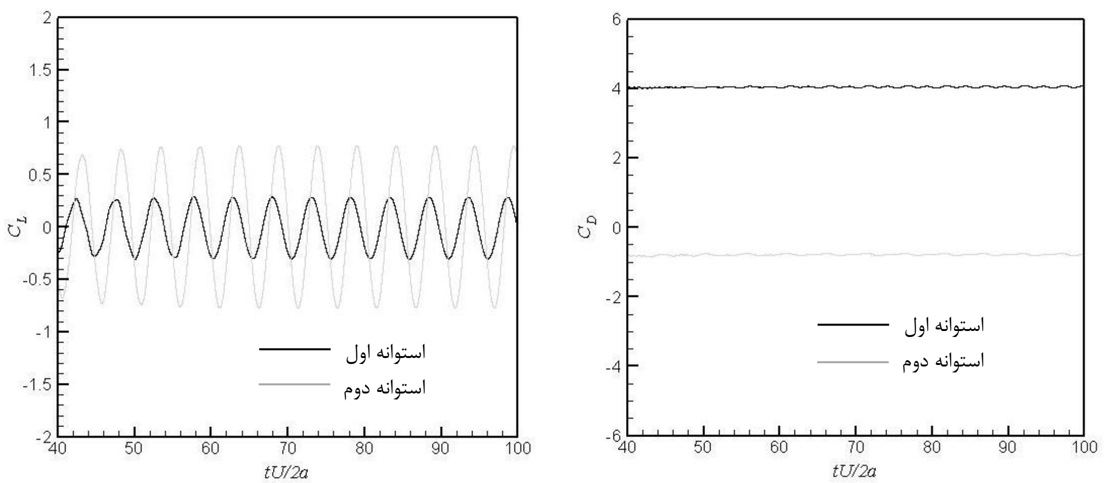


(پ) (ب) (الف)

شکل (۱۰): خطوط جریان حول دو استوانه‌ی بیضوی محدود در $Re=100$ در آرایش‌های (الف) ردیفی، (ب) جابجاشده و (پ) درکنارهم.

۵-۲- بررسی پدیده ریزش گردابه

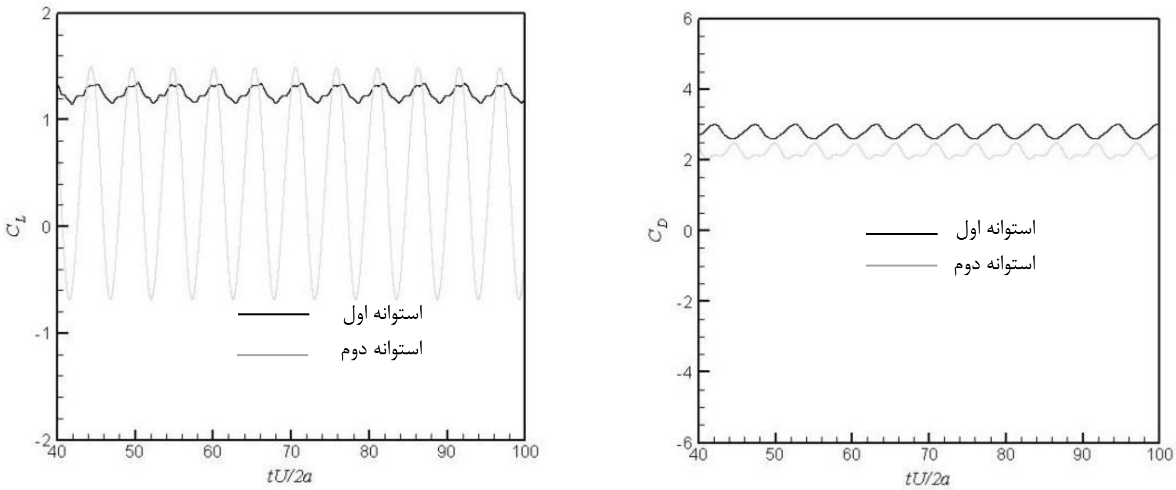
با توجه به اهمیت این موضوع، پدیده ریزش گردابه در چیدمان‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. در محاسبه عدد اشتروهال، f فرکانس تشکیل گردابه‌های تناوبی با استفاده از آنالیز فوریه نمودار ضریب برآ بر حسب زمان به‌دست آمده است. نمودار تغییرات ضرایب پسا و برآ وارد بر استوانه‌ها بر حسب زمان در عدد رینولدز $Re=100$ برای آرایش‌های مختلف در شکل‌های **۱۱** تا **۱۳** ارائه شده‌اند. در این شکل‌ها، منظور از استوانه اول استوانه واقع در بالادست جریان و منظور از استوانه دوم استوانه واقع در پایین دست جریان است. با توجه به شکل **۱۱** در آرایش ردیفی نیروی پسا وارد بر دو استوانه غیرهم‌فاز (غیر هم علامت) بوده و بر استوانه اول نیروی پسا مثبت وارد می‌شود در حالی که استوانه دوم نیروی پسا منفی را تحمل می‌نماید. همچنین، مشاهده می‌شود که نیروی برآی وارد بر دو استوانه هم‌فاز (هم علامت) است. با استفاده از آنالیز فوریه نمودار نیروی برآ بر حسب زمان، مقدار فرکانس ریزش گردابه برای هر دو استوانه یکسان به‌دست می‌آید.



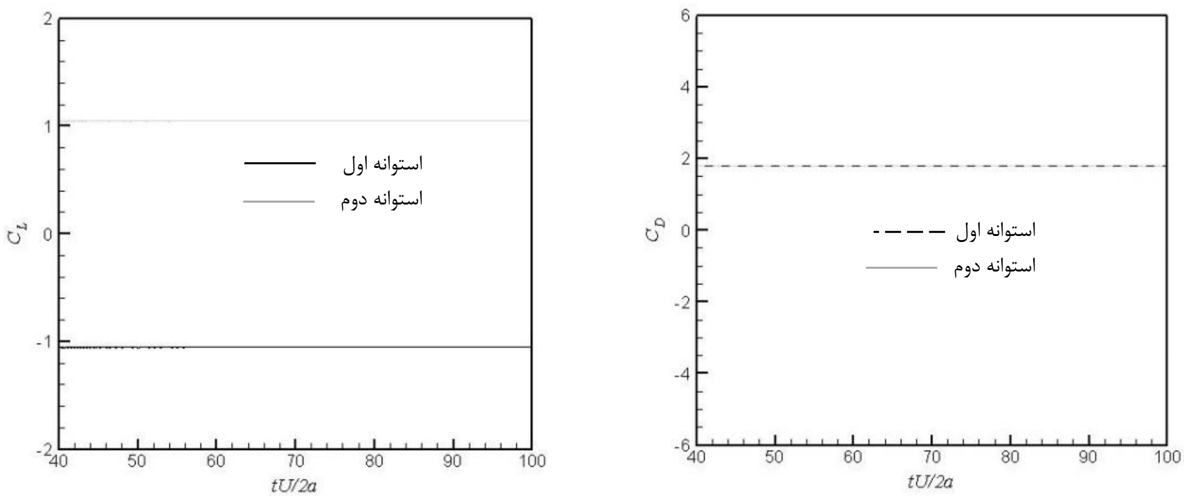
شکل (۱۱): تغییرات ضرایب پسا و برآ نسبت به زمان برای دو استوانه بیضوی محدود در $Re=100$ در آرایش ردیفی.

در آرایش جابجاشده (شکل**۱۲**) نیروهای پسا و برآ وارد بر دو استوانه هم‌فاز بوده و بر هر دو استوانه نیروی پسای مثبت وارد می‌شود، اما همان‌گونه که در شکل مشهود است، حدود تغییرات نیروی وارد بر استوانه اول در مقایسه‌ی با آرایش ردیفی کمتر، اما برای استوانه دوم بیشتر است. همچنین، واضح است که دامنه تغییرات نیروی برآی وارد بر هر دو استوانه در مقایسه با آرایش ردیفی بیشتر بوده و با کاربرد آنالیز فوریه مقدار فرکانس ریزش گردابه کمتر از حالت ردیفی به‌دست می‌آید.

شکل **۱۳** نمودار تغییرات زمانی ضرایب پسا و برآ وارد بر استوانه‌ها در عدد رینولدز $Re=100$ را برای آرایش درکنارهم نشان می‌دهد. با توجه به این شکل واضح است نیروی پسا وارد بر دو استوانه هم‌فاز بوده و دامنه تغییرات نسبتاً یکسان دارند، اما بر استوانه اول (پایینی) نیروی برآ منفی و بر استوانه دوم (بالایی) نیروی برآ مثبت با دامنه تغییرات تقریباً مشابه وارد می‌شود. نکته حائز اهمیت دیگری که از نمودار تغییرات زمانی نیروی برآ در این آرایش و همچنین شکل **۱۰- پ** مشخص است، عدم ریزش گردابه در آرایش درکنارهم می‌باشد.

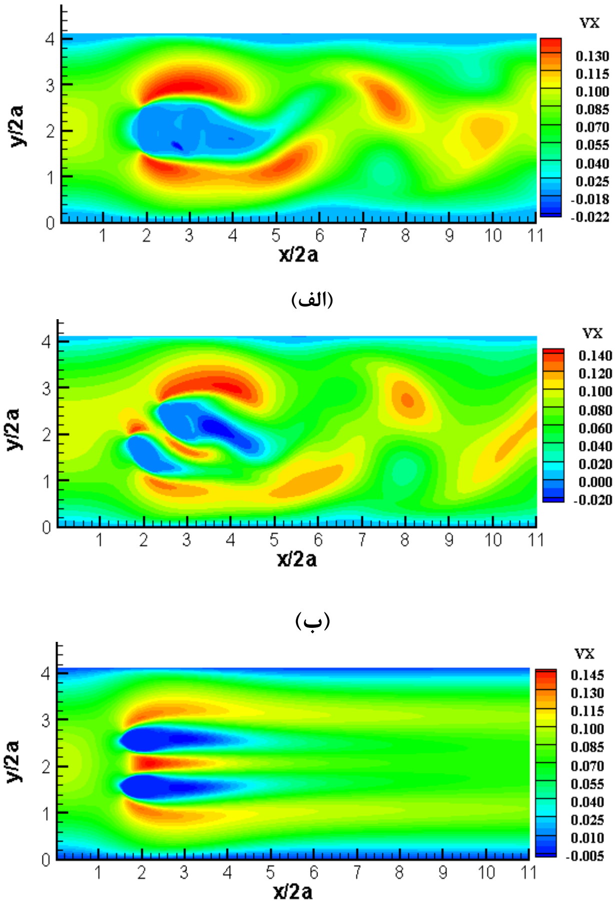


شکل (۱۲): تغییرات ضرایب پسا و برآ نسبت به زمان برای دو استوانه بیضوی محدود در $Re=100$ در آرایش جابجاشده.



شکل (۱۳): تغییرات ضرایب پسا و برآ نسبت به زمان برای دو استوانه بیضوی محدود در $Re=100$ در آرایش درکنارهم.

خطوط هم‌تراز سرعت برای جریان غیردائم حول دو استوانه در عدد رینولدز $Re = 100$ در آرایش‌های متفاوت در شکل **۱۴** رسم شده است. در این شکل پدیده ریزش گردابه در آرایش‌های ردیفی و جابجاشده و عدم ریزش در آرایش درکنارهم به خوبی مشهود است.



(الف)

(ب)

(پ)

شکل (۱۴): خطوط هم‌تراز سرعت برای جریان حول دو استوانه بیضوی محدود در $Re = 100$ در آرایش‌های (الف) ردیفی، (ب) جابجاشده و (پ) درکنارهم.

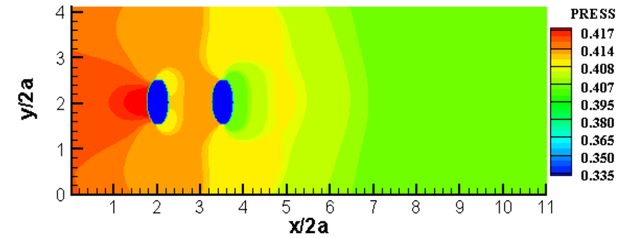
مقادیر عدد اشتروهال برای دو استوانه در آرایش‌های مختلف به همراه مقادیر آن برای یک استوانه بیضوی در کانال [۱۶] برای مقایسه در جدول **۵** ارائه شده است. همان‌گونه که ذکر شد، در شرایط مورد مطالعه این تحقیق، به علت اثرات جریان دو استوانه بر یکدیگر ریزش گردابه‌های دو استوانه با فرکانس یکسان رخ می‌دهد و در نتیجه اعداد اشتروهال دو استوانه با یکدیگر مساوی است، اما با توجه به نحوه قرارگیری آن‌ها در جریان، شدت ریزش گردابه در آرایش ردیفی بیشتر از آرایش جابجاشده است. همچنین، با توجه به جدول فوق مشاهده می‌شود که به علت تاثیرات وجود استوانه دوم مقدار عدد اشتروهال برای دو استوانه کمتر از مقدار آن برای حالت مشابه استوانه منفرد محدود در کانال است.

جدول (۵): عدد اشتروهال برای جریان غیردائم حول استوانه‌های بیضوی در آرایش‌های مختلف در عدد رینولدز $Re = 100$.

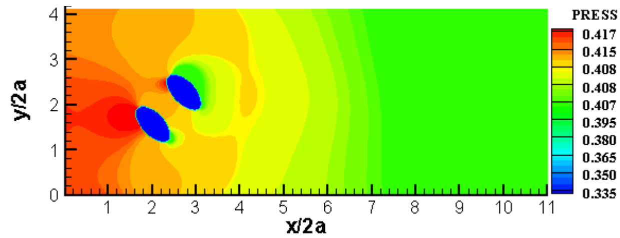
چیدمان	زاویه حمله	استوانه منفرد [۱۶]	استوانه اول	استوانه دوم
در کنار هم	$\theta = 0$	-	-	-
جابجا شده	$\theta = 45$	۰/۲۲۸	۰/۱۹۱	۰/۱۹۱
ردیفی	$\theta = 90$	۰/۲۱۷	۰/۱۹۸	۰/۱۹۸

۵-۳- بررسی نیروهای وارد بر استوانه‌ها

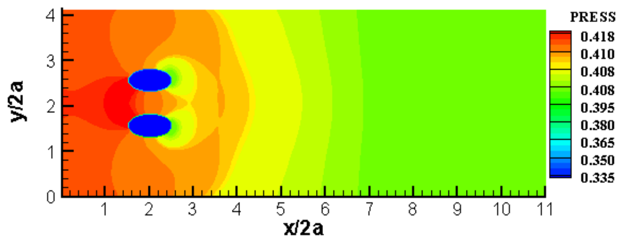
شکل **۱۵** خطوط هم‌تراز فشار را برای جریان دائم حول دو استوانه در عدد رینولدز $Re = 5$ در آرایش‌های متفاوت نشان می‌دهد. در اعداد رینولدز پایین، نیروهای لزجی دارای اثر غالب بوده و سهم عمده نیروی پسا مربوط به پسای اصطکاکی می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز، سهم پسای اصطکاکی کاهش یافته و پسای فشاری سهم بیشتری در نیروی پسا کل می‌یابد. در عدد رینولدز $Re = 5$، در آرایش‌های مختلف، تقریباً مقادیر پسای یکسانی بر استوانه اول وارد می‌شود، اما با توجه به این که استوانه دوم تحت تاثیر جریان استوانه اول قرار دارد در هر حالت نیروی پسا کمتری بر آن وارد می‌شود. با توجه به آرایش‌های مختلف، نیروی پسا وارد بر استوانه دوم در آرایش ردیفی دارای کمترین مقدار و در آرایش درکنارهم بیشترین مقدار را دارد. در آرایش ردیفی نیروی برآ وارد بر دو استوانه هم‌فاز بوده و دارای مقادیر یکسان می‌باشد. در آرایش‌های جابجاشده و درکنارهم با توجه به نحوه‌ی قرارگیری استوانه‌ها نسبت به یکدیگر، نیروی برآ وارده بر دو استوانه تقریباً برابر، اما غیرهم‌فاز بوده و نیروی منفی بر استوانه اول وارد می‌شود. مقادیر ضرایب پسا و برآ مذکور به ترتیب در جدول‌های **۶** و **۷** آمده است. همان‌گونه که مشهود است در عدد رینولدز $Re = 5$، بیشترین ضریب برآ مربوط به آرایش درکنارهم و کمترین آن مربوط به آرایش ردیفی است.



(الف)



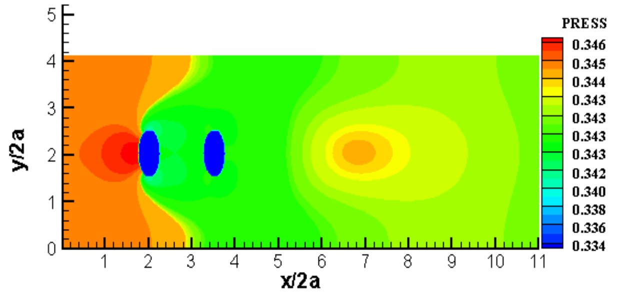
(ب)



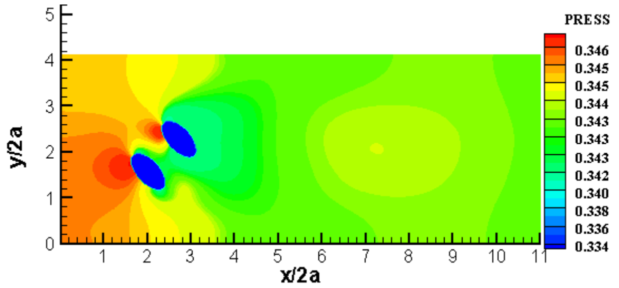
(پ)

شکل (۱۵): خطوط هم‌تراز فشار برای جریان حول دو استوانه بیضوی محدود در $Re=5$ در آرایش‌های (الف) ردیفی، (ب) جابجاشده و (پ)درکنارهم.

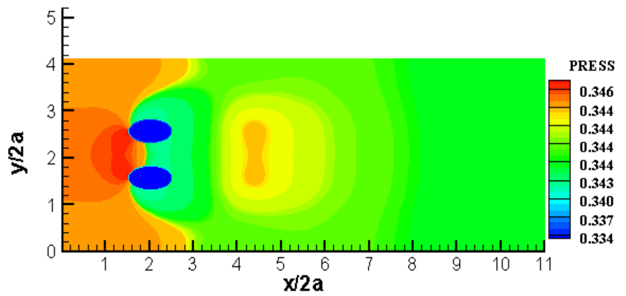
در اعداد رینولدز بالاتر از مقدار بحرانی اولیه، با توجه به جدایش جریان و تشکیل گردابه در پشت استوانه‌ها و به‌طور کلی تغییر الگوی جریان و نیز کاهش سهم پسا اصطکاکی و افزایش سهم پسای فشاری، میزان نیروهای وارده تغییر خواهد کرد. خطوط هم‌تراز فشار در عدد رینولدز $Re=40$، برای آرایش‌های مختلف در شکل **۱۶** رسم شده و مقادیر ضرایب پسا و برآ وارد بر هر استوانه در جدول‌های **۶** و **۷** آمده است. با توجه به شکل و جدول‌های فوق مشاهده می‌شود که ضرایب پسای وارده در تمامی چیدمان‌ها هم‌فاز بوده و دارای مقادیر مثبت هستند. بر استوانه اول (با توجه به نحوه قرارگیری در برابر جریان) در آرایش ردیفی بیشترین مقدار و در آرایش درکنارهم کمترین مقدار نیروی پسا وارد می‌شود. در ارتباط با استوانه دوم، در آرایش ردیفی (با توجه به قرارگیری نسبتاً کاملش در منطقه کم‌فشار پشت استوانه اول)، نیروی پسای کمی بر آن وارد می‌شود. در آرایش جابجاشده، با توجه به تاثیر کمتر استوانه اول بر استوانه دوم نیروی پسای بیشتری نسبت به آرایش ردیفی دریافت می‌دارد. در آرایش درکنارهم، استوانه دوم کمترین تاثیر را از استوانه اول گرفته و در این حالت مقدار ضریب پسای وارده بر دو استوانه با یکدیگر برابر است. در $Re=40$، با توجه به تغییرات صورت گرفته مذکور نیروی برآ بر خلاف اعداد رینولدز پایین در آرایش ردیفی غیرهم‌فاز و در آرایش جابجاشده هم‌فاز با مقادیر یکسان می‌باشد. با توجه به جدول **۷** همانند حالت قبل بیشترین ضریب برآ مربوط به آرایش درکنارهم و کمترین آن مربوط به آرایش ردیفی است.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل (۱۶): خطوط هم‌تراز فشار برای جریان حول دو استوانه بیضوی در $Re=40$ در آرایش‌های (الف) ردیفی، (ب) جابجاشده و (پ)درکنارهم.

جدول (۶): مقایسه ضرایب پسا دو استوانه بیضوی در آرایش‌های مختلف در اعداد رینولدز متفاوت.

	ردیفی		جابجاشده		در کنارهم	
Re	C_{D_1}	C_{D_2}	C_{D_1}	C_{D_2}	C_{D_1}	C_{D_2}
۵	۱۱/۸۱	۸/۲۱	۱۱/۴۷	۹/۹۵	۱۲/۰۰	۱۱/۹۷
۴۰	۴/۴۹	۰/۰۵	۳/۷۲	۲/۷۴	۲/۸۸	۲/۸۸
۱۰۰	۴/۱	-۰/۷۸	۳/۰۱	۲/۱۶	۱/۸۱	۱/۸۱

جدول (۷): مقایسه ضرایب برآ دو استوانه بیضوی در آرایش‌های مختلف در اعداد رینولدز متفاوت.

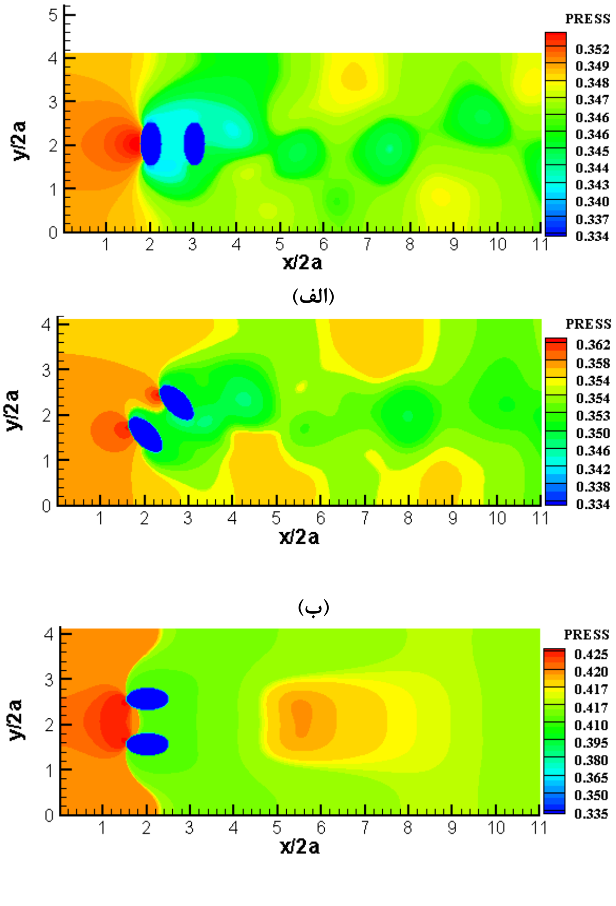
	ردیفی		جابجاشده		در کنارهم	
Re	C_{L_1}	C_{L_2}	C_{L_1}	C_{L_2}	C_{L_1}	C_{L_2}
۵	۰/۲۱	۰/۲۱	-۱/۹۳	۲/۳	-۵/۱۶	۵/۳۴
۴۰	-۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۶۹	۰/۶	-۱/۴۵	۱/۴۵
۱۰۰	۰/۲۸	۰/۷۸	۱/۳۴	۱/۴۹	-۱/۰۵	۱/۰۵

خطوط هم‌تراز فشار برای جریان غیردائم در عدد رینولدز $Re=100$ در آرایش‌های مختلف در شکل **۱۷** رسم شده‌اند. در جریان غیردائم، همان‌گونه که در شکل‌های **۱۱** تا **۱۳** مشهود است، ضرایب پسا و برآ به‌طور تناوبی با زمان تغییر می‌کنند و در جداول **۶** و **۷** مقادیر ماکزیمم این ضرایب ارائه شده است. با توجه به جدول **۶** و شکل **۱۱** در آرایش ردیفی نیروی پسا وارد بر دو استوانه غیرهم‌فاز بوده و بر استوانه اول نیروی پسا مثبت وارد می‌شود، در حالی که استوانه دوم نیروی پسا منفی را تحمل می‌نماید. دلیل این امر را می‌توان با توجه به شکل **۱۷** به این صورت توجیه نمود که به دلیل قرار داشتن کامل استوانه دوم در ناحیه کم‌فشار پشت استوانه اول، یک فضای مکشی[۱] ایجاد شده که نتیجه آن پسا منفی وارده بر استوانه دوم است. وجود استوانه دوم باعث افزایش فشار در پشت استوانه اول شده و در نتیجه استوانه اول نیروی پسای کمتری در مقایسه با یک استوانه تنها دریافت می‌کند [۱۶]. همچنین، واضح است که در این آرایش، نیروی برآی وارده بر دو استوانه هم‌فاز بوده و به دلیل وجود اثرات تداخلی ریزش گردابه‌ها، نیروی برآی بیشتری بر استوانه دوم وارد می‌شود.

با توجه به شکل‌های **۱۳- ۱۲** و نیز جدول **۶**، مشاهده می‌شود که در آرایش‌های جابجاشده و درکنارهم نیروی پسا وارده هم‌فاز بوده، اما با توجه به نحوه‌ی قرارگیری استوانه اول در برابر جریان در آرایش جابجاشده نیروی کمتری نسبت به آرایش ردیفی و در آرایش درکنارهم نیروی کمتری نسبت به آرایش جابجاشده بر استوانه اول وارد می‌شود. استوانه دوم نیز در آرایش جابجاشده به علت تاثیر کمتر استوانه اول بر استوانه دوم نیروی پسا بیشتری نسبت به آرایش ردیفی دریافت می‌دارد. در آرایش درکنارهم استوانه دوم کمترین تاثیر را از استوانه اول گرفته و در این حالت مقدار ضریب پسا وارده بر دو استوانه با یکدیگر برابر است. نتیجه دیگری که با توجه به جدول **۶** می‌توان گرفت این است که در تمامی حالات نیروی پسا وارد بر استوانه‌ها با افزایش عدد رینولدز کاهش یافته و نیروی پسا وارد بر استوانه اول از نیروی پسا وارد بر استوانه دوم بزرگ‌تر است. با توجه به شکل **۱۲** و جدول **۷** مشاهده می‌شود که در آرایش جابجاشده نیروی برآ وارد بر دو استوانه هم‌فاز بوده و با توجه به تفاوت توزیع فشار ناشی از چیدمان (شکل **۱۷**)، نیروی برآ بیشتری نسبت به آرایش ردیفی بر دو استوانه وارد می‌شود. به علت اثرات تداخلی گردابه‌ها بر استوانه دوم نیروی برآی بیشتری وارد می‌شود. با توجه به شکل **۱۳** و جدول **۷** در آرایش درکنارهم نیروی برآ وارد بر دو استوانه دارای مقدار برابر، اما غیرهم‌فاز بوده و نیروی منفی بر استوانه دوم وارد می‌شود. در این آرایش، با توجه به نحوه‌ی چیدمان مقدار نیروی برآ از آرایش ردیفی بیشتر است. در آرایش جابجاشده به دلیل ریزش گردابه‌ها و اثرات تداخلی ناشی از وجود گردابه‌ها مقدار نیروی برآ بیشتری از آرایش درکنارهم بر استوانه‌ها وارد می‌شود.

جدول **۷** نشان می‌دهد در آرایش درکنارهم که پدیده ریزش گردابه وجود ندارد، با افزایش عدد رینولدز مقدار نیروی برآی وارد بر هر استوانه کاهش می‌یابد. در آرایش‌های ردیفی و جابجاشده در جریان پایا مقدار نیروی برآ وارد بر هر استوانه با افزایش عدد رینولدز کاهش یافته و در جریان غیردائم، با توجه به ریزش گردابه و اثرات تداخلی آن‌ها بر یکدیگر، مقدار نیروی برآ وارده افزایش می‌یابد.

1- Suction Region



شکل (۱۷): خطوط هم‌تراز فشار برای جریان حول دو استوانه بیضوی در $Re=100$ در آرایش‌های (الف) ردیفی، (ب) جابجاشده و (پ) درکنارهم.

۸- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، جریان حول دو استوانه بیضوی ساکن درون کانال در آرایش‌های مختلف شامل: درکنارهم، ردیفی و جابجاشده برای محدوده اعداد رینولدز $5 \le Re \le 100$ با استفاده از روش شبکه بولتزمن مورد بررسی قرار گرفته است. براساس نتایج به‌دست‌آمده، در اعداد رینولدز بسیار پایین و کمتر از رینولدز بحرانی ($Re=5$)، به دلیل اثر غالب نیروهای لزجی یک جریان متقارن و بدون جدایش حول هر دو استوانه در همه حالات مشاهده می‌شود. در آرایش‌های مختلف ضرایب پسا هم‌فاز بوده و مقادیر مربوط به استوانه اول تقریباً یکسان هستند، بر استوانه دوم بسته به شدت تاثیر جریان استوانه اول در آرایش ردیفی کمترین و در آرایش درکنارهم بیشترین نیروی پسا وارد می‌شود. بیشترین مقدار نیروی برآ در آرایش درکنارهم و کمترین مقدار آن در آرایش ردیفی روی می‌دهد.

با افزایش عدد رینولدز به مقدار بالاتر از رینولدز بحرانی اولیه، در عدد رینولدز $Re=40$ در تمامی حالات دو گردابه متقارن پشت استوانه دوم تشکیل می‌شود که طول گردابه حاصل با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد، اما ساختار جریان حول استوانه اول بسته به فاصله بین دو استوانه و عدد رینولدز جریان متفاوت خواهد بود. با توجه به نحوه قرارگیری استوانه اول در برابر جریان، در آرایش ردیفی بیشترین مقدار و در آرایش درکنارهم کمترین مقدار نیروی پسا بر آن وارد می‌شود. بیشترین مقدار پسا بر استوانه دوم در آرایش درکنارهم وارد شده و کمترین مقدار نیروی پسا با توجه به قرارگیری نسبتاً کاملش در منطقه کم‌فشار پشت استوانه اول، در آرایش ردیفی وارد می‌شود. در این محدوده نیز بیشترین نیروی برآ در آرایش درکنارهم و کمترین مقدار آن در آرایش ردیفی بر استوانه‌ها وارد می‌شود.

با افزایش بیشتر رینولدز جریان غیردائم شده و پدیده ریزش گردابه رخ می‌دهد. در شرایط مورد مطالعه این تحقیق، در عدد رینولدز $Re=100$، در آرایش درکنارهم ریزش گردابه مشاهده نشده و در آرایش‌های ردیفی و جابجاشده به علت اثرات متقابل جریان دو استوانه بر یکدیگر فرکانس ریزش گردابه‌های دو استوانه یکسان بوده و در نتیجه اعداد اشتروهال دو استوانه با یکدیگر مساوی است، اما به علت تاثیرات وجود استوانه دوم مقدار عدد اشتروهال برای دو استوانه در آرایش‌های مذکور کمتر از مقدار آن برای حالت مشابه یک استوانه تنها است. با توجه به موقعیت استوانه‌ها در جریان شدت ریزش گردابه در آرایش ردیفی بیشتر از آرایش جابجاشده است. با توجه به نحوه قرارگیری استوانه اول در برابر جریان، در آرایش ردیفی بیشترین مقدار و در آرایش درکنارهم کمترین مقدار نیروی پسا بر آن وارد می‌شود. بر استوانه دوم بیشترین مقدار پسا به علت تاثیر کمتر استوانه اول بر استوانه دوم در آرایش جابجاشده وارد شده و کمترین مقدار نیروی پسا با توجه به قرارگیری کاملش در منطقه کم‌فشار پشت استوانه اول، در آرایش ردیفی وارد می‌شود. در جریان غیردائم کمترین مقدار نیروی برآ در آرایش ردیفی و به دلیل ریزش گردابه‌ها و اثرات تداخلی ناشی از وجود گردابه‌ها بیشترین مقدار آن در آرایش جابجاشده بر استوانه‌ها وارد می‌شود. نتایج نشان می‌دهند، در تمامی آرایش‌ها نیروی پسا وارد بر استوانه‌ها با افزایش عدد رینولدز کاهش یافته و نسبت ضریب پسا وارد بر

استوانه اول بر ضریب پسا استوانه دوم همواره بزرگ‌تر از یک است. نیروی برآ با افزایش عدد رینولدز رفتار متفاوتی نشان می‌دهد، در جریان دائم در آرایش‌های ردیفی و جابجاشده مقدار نیروی برآ وارد بر هر استوانه کاهش یافته و در جریان غیردائم با توجه به ریزش گردابه و اثرات تداخلی آن‌ها بر یکدیگر مقدار نیروی برآ وارده افزایش می‌یابد.

۷- فهرست علائم

L	فاصله بین مراکز دو استوانه (m)
P	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
St	عدد اشتروهال
C_D	ضریب پسا
C_L	ضریب برآ
f^{eq}	تابع توزیع تعادلی ماکسول- بولتزمن
f_α	تابع توزیع ذره در فضای گسسته
$\tilde{f}_\alpha$	تابع توزیع ذره پس از مرحله برخورد
f_α^{eq}	تابع توزیع تعادلی ذره در فضای گسسته
$f \equiv f(x,\xi,t)$	تابع توزیع ذره در فضای فازی پیوسته
F_D	نیروی پسا ($kgms^{-2}$)
F_L	نیروی برآ ($kgms^{-2}$)
L_a	طول جدایش جریان(m)
Re	عدد رینولدز

علائم یونانی

δx	اندازه شبکه در واحد شبکه بولتزمن (LL)
δt	گام زمانی در واحد شبکه بولتزمن (LT)
λ	زمان آرامش (s)
τ	زمان آرامش بی‌بعد
ξ	سرعت بی‌بعد ذره در فضای فازی پیوسته
ρ	چگالی (kgm^{-3})
ν	لزجت دینامیکی (m^2s^{-1})
θ	زاویه قرارگیری استوانه‌ها نسبت به جریان (درجه)

۸- مراجع

1. Zdrakovich, M. M. “Review of Flow Interference between Two Circular Cylinders in Various Arrangements”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 99, No. 4, pp. 618-633, 1977.
2. Surmas, R. Dos Santos, L.O.E., and Philippi, P.C. “Lattice Boltzmann Simulation of the Flow Interference in Bluff Body Wakes”, Future Generation Computer Systems, Vol. 20, No.6, pp. 951–958, 2004.
3. Kondo, N. anf Matsukuma, D. “Numerical Simulation for Flow around Two Circular Cylinders in Tandem Arrangment”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 19, No. 4, pp. 277–288, 2005.
4. Akbari, M.H., Price, S.J. “Numerical Investigation of Flow Patterns for Staggered Cylinder Pairs in Cross-flow”, Journal of Fluids and Structures, Vol. 20, No. 4, pp. 533–554, 2005.
5. Carmo, B.S., and Meneghini, J.R. “Numerical Investigation of the Flow around Two Circular Cylinders in Tandem”, Journal of Fluids and Structures, Vol. 22, No. 6, pp. 979–988, 2006.
6. Agrawal, A., Djenidi, L., and Antonia, R.A. “Investigation of Flow around a Pair of Side-by-Side Square Cylinders, Using Lattice Boltzmann Method”, Computers & Fluids, Vol. 35, No. 10, pp. 1093-1107, 2006.
7. Sumner, D., Richards, M.D., Akosile, O.O. “Two Staggered Circular Cylinders of Equal Diameter in Cross-Flow”, Journal of Fluids and Structures, Vol. 20, No. 2, pp. 255–276, 2005.
8. Singha, S. and Sinhamahapatra, K.P. “High Resolution Numerical Simulation of Low Reynolds Number Incompressible Flow about Two Cylinders in Tandem Arrangment”, ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 132, No. 1, pp. 1-10, 2010.
9. Mussa, A., Asinari, P., Luo, L-S. “Lattice Boltzmann Simulation of 2D Laminar Flows Past Two Tandem Cylinder”, Journal of Computational Physics, Vol. 25, No. 3, pp. 479-505, 2009.
10. Nemati, H., Sedighi, K., Farhadi, M. Mohammadi Pirouz, M., and Fattahi, E. “Numerical Simulation of Fluid Flow of Two Rotating Side-by-Side Circular Cylinders, Using Lattice Boltzmann Method”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 24, No’s. 3–4, pp. 83–94, 2010.
11. Abdollahi, M., and Atefi, Gh. A. “Simulation of Vortex Shedding Phenomenon in a 2-D Flow over a Squared Section Obstacle inside a Channel, Using Lattice Boltzmann Method”, Aerospace Mechanic Journal, Vol. 7, No. 4, 2010 (In Persian).
12. Vakil, A. and Green, SH.I. “Two-dimensional Side-by-Side Circular Cylinders at Moderate Reynolds Numbers”, Computers & Fluids, Vol. 51, No. 1, pp. 136-144, 2011.
13. Ghadiri-Dehkordi, B., Moghaddam, S.H., Jafari, H. H., “Numerical Simulation of Flow over Two Circular Cylinders in Tandem Arrangement”, Journal of Hydrodynamics,Vol. 23, No. 1, pp. 114-126, 2011.
14. Patel, V.A. “Flow around the Impulsively Started Elliptic Cylinder at Various Angles of Attack”, Computers & Fluids, Vol. 9, No. 4, pp. 435-462, 1974.

15. Faruquee, Z., Ting, S-K.D., Fartaj, A., Barron, M.R., and Carriveau, R. "The Effects of Axis Ratio on Laminar Fluid Flow around an Elliptical Cylinder", International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 28, No. 5, pp. 1178-1189, 2007.
16. Taeibi-Rahni, M., Esfahanian, V., and Salari, M. "Investigation of Flow around a Confined Elliptical Cylinder, Using Lattice Boltzmann Method", Middle-East Journal of Scientific Research, Vol. 15, No. 1, pp. 08-13, 2013.
17. Berbish, N.S. "Heat Transfer and Flow Behavior around Four Staggered Elliptic Cylinders in Cross Flow", Heat and Mass Transfer, Vol. 47, No. 3, pp. 287-300, 2011.
18. Nejat, A., Mirzakhalili, E., Aliakbari, A., FallahNiasar, M., Vahidkhah, S.K. "Non-Newtonian Power-Law Fluid Flow and Heat Transfer Computation Across a Pair of Confined Elliptical Cylinders in the Line Array", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 171, No.1, pp. 67-82, 2012.
19. Taeibi-Rahni, M., Esfahanian, V., and Salari, M. "Numerical Simulation of Flow over Two Elliptical Cylinders in Tandem Arrangement, Using Lattice Boltzmann Method, The 12th Iranian Aerospace Society Conference", AmirKabir University of Technology, Tehran, Iran, 2013.
20. Deladisma, M.D. "Accuracy and Enhancement of the Lattice Boltzmann Method for Application to a Cell-Polymer Bioreactor System", PhD Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Georgia, 2006.
21. Chen, S., Doolen, G.D. "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, Annual Review of Fluid Mechanics", Vol. 30, No. 1, pp. 329-364, 1998.
22. Yu, D., Mei, R., Luo, L-S., Shyy, W. "Viscous Flow Computations with the Method of Lattice Boltzmann Equation", Progress in Aerospace Sciences, Vol. 39, No. 5, pp. 329-367, 2003.
23. Qian, Y. H., d'Humières, D., Lallemand, P. "Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation", Europhysics Letter, Vol. 17, No. 6, pp. 479-484, 1992.
24. Sukop, M.C. and Thorne, D.T. "Lattice Boltzmann Modeling", An Introduction to Geoscientists and Engineers, Springer, Berlin, 2006.
25. Salari, M. "Simulation of Flow over Tube Bundles with Different Arrangements, Using Lattice Boltzmann Method", M.Sc. Thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, 2012 (In Persian).
26. Beigzadeh-Abbassi, A.R. "Simulation of Self-Propulsive Phenomenon, Using Lattice Boltzmann Method", M.Sc. Thesis, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, 2011 (In Persian).
27. Filippova, O. and Hänel, D. "Grid Refinement for Lattice-BGK Models", Journal of Computational Physics, Vol. 147, No. 1, pp. 219-228, 1998.
28. Yu, D., Mei, R., Luo, L-S., Shyy, W. "An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method", Journal of Computational Physics, Vol. 155, No. 2, pp. 307-329, 1999.
29. Mei, R., Yu, D., Shyy, W., Luo, L-S. "Force Evaluation in Lattice Boltzmann Method, Involving Curved Geometry", ICASE Report No. 2002–22, NASA Langley Research Center, USA, 2002.
30. Zou, Q., He, X. "On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model", Physics of Fluids, Vol. 9, No. 6, pp. 1591-1598, 1997.
31. Bao, J., Yuan, P., and Schaefer, L. "A Mass Conserving Boundary Condition for the Lattice Boltzmann Method", Journal of Computational Physics, Vol. 227, No. 18, pp. 8472-8487, 2008.
32. Chen, S., Martínez, D. and Mei, R. "On Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Method", Physics of Fluids, Vol. 8, No. 9, pp. 1788-1802, 1996.
33. Schäfer, M., Turek, S. "Benchmark Computations of Laminar Flow around a Cylinder, Lehrstuhl für Strömungsmechanik", Universität Erlangen-Nürnberg, 1996.